

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И
СПОРТА УКРАИНЫ

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

Механико-математический факультет

Кафедра геометрии

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ
ОГРАНИЧЕННОЙ СНИЗУ НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Научный руководитель:
член-корр. НАН Украины, проф.
Борисенко А. А.

Рецензент:
к. ф.-м. н., доцент,
с. н. с. отдела геометрии
ФТИНТ НАН Украины
Горькавый В. А.

Выполнил:
студент группы М-151
Драч К. Д.

Харьков
2012

Содержание

Введение	3
1 Оценка ширины сферического слоя в общем римановом случае	4
1.1 Предварительные замечания и формулировка основных результатов	4
1.2 Вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов	6
1.3 Доказательство теоремы 1.1	13
1.4 Доказательство теоремы 1.2	13
2 Изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной снизу кривизны	17
2.1 Вступление и формулировка основного результата	17
2.2 Доказательство теоремы 2.1	17
3 Охрана труда в отрасли	29
Список литературы	36

Введение

Одной из ключевых задач геометрии в целом является изучение глобального строения гиперповерхностей как подмногообразий произвольных римановых многообразий.

При этом, естественно выделять классы изучаемых поверхностей в зависимости от их локальных геометрических свойств. Настоящая работа посвящена исследованию глобального поведения класса гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны и их нерегулярных аналогов.

Работа состоит из трех разделов.

В первом разделе приводятся обобщения результатов, полученных автором в квалификационной работе [11]. А именно, в ней были получены оценки для ширины сферического слоя, то есть пространства между двумя концентрическими сферами, в который можно заключить полную регулярную гиперповерхность ограниченной снизу нормальной кривизны, лежащую в многообразии постоянной секционной кривизны. В первом разделе настоящей работы дается обобщение этого результата для случая нерегулярных гиперповерхностей и с его помощью выводятся оценки ширины сферического слоя для поверхностей в общих римановых пространствах.

В случае двумерной евклидовой плоскости, гиперповерхностями ограниченной снизу нормальной кривизны являются замкнутые кривые ограниченной снизу кривизны. Будем рассматривать вложенные кривые ограниченной кривизны и их нерегулярные аналоги.

Для них во втором разделе доказывается новое изопериметрическое неравенство, дающее оценку минимальной площади, ограничиваемой кривыми из этого класса, при фиксированной длине. При доказательстве используется теория оптимального управления и принцип максимума Понтрягина.

Третий раздел посвящен охране труда в отрасли. В нем приводится инструкция по охране труда при работе на персональном компьютере, разработанная на основании государственных норм [12]. В конце приводится комплекс упражнений, рекомендуемых для уменьшения негативного влияния от работы за компьютером на организм человека.

Работа состоит из 3 разделов, занимает 36 страниц, содержит 6 рисунков и библиографию из 12 источников.

1 Оценка ширины сферического слоя в общем римановом случае

Вильгельм Бляшке доказал [8], что если нормальные кривизны полной гиперповерхности F^n зашпемлены некоторыми положительными константами k_1 и k_2 , то есть $k_2 \geq k_n \geq k_1 > 0$, то в каждой точке F^n существует опорные сферы радиусов $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$, соответственно содержащие гиперповерхность и содержащиеся в ней. Но оказывается, что о сферичности поверхности можно говорить и в случае, когда ее нормальные кривизны ограничены только снизу.

Критерием сферичности поверхности может выступать ширина сферического слоя, в который ее можно поместить. Понятно, что чем меньше эта ширина, тем поверхность ближе к сфере.

В работе [3] было доказано, что замкнутая поверхность в пространстве Лобачевского кривизны -1 содержится в сферическом слое ширины $d \leq \ln 2$, если нормальные кривизны гиперповерхности $k_n \geq 1$ в каждой точке и в каждом направлении. Аналогичная оценка имеет место в многообразиях Адамара [4]. В работе [11] были получены оценки ширины сферического слоя для гиперповерхностей в многообразиях постоянной секционной кривизны при условии, что нормальные кривизны гиперповерхностей ограничены снизу. В этом разделе этот результат обобщается на нерегулярный случай, а также доказываются аналогичные оценки в случае многообразий непостоянной секционной кривизны.

1.1 Предварительные замечания и формулировка основных результатов

Пусть $M^{n+1}(c)$ – полное односвязное риманово многообразие постоянной секционной кривизны c .

Напомним (см. [1, 2]), что локально выпуклая гиперповерхность $\partial\Omega \subset M^{n+1}(c)$ (в том числе и нерегулярная) называется λ -выпуклой, если в каждой точке $P \in \partial\Omega$ существует сфера S_P кривизны λ , такая, что в окрестности P гиперповерхность лежит со стороны выпуклости S_P . Соответствующая область Ω называется λ -выпуклой областью.

Заметим, что регулярная класса C^k , $k \geq 2$, гиперповерхность $\partial\Omega$ есть λ -выпуклой тогда и только тогда, когда ее нормальные кривизны во всех точках и по всем направлениям $k_n \geq \lambda$. Таким образом, понятие λ -выпуклости есть естественным обобщением того факта, что нормальные кривизны не меньше λ .

С учетом этих определений, для ширины сферического слоя в случае

пространств постоянной кривизны справедлива

Теорема 1.1 ([11]). Пусть $\partial\Omega$ – полная гиперповерхность в полном односвязном $(n+1)$ -мерном многообразии $M^{n+1}(c)$ постоянной секционной кривизны c , ограничивающая область Ω

1. Пусть объемлющее пространство есть евклидово пространство \mathbb{E}^{n+1} . Если $\partial\Omega$ есть k_0 -выпуклая гиперповерхность, $k_0 > 0$, то $\partial\Omega$ можно заключить в сферический слой ширины

$$d \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{k_0} \quad (1.1)$$

2. Пусть объемлющее пространство $M^{n+1}(c) = S^{n+1}(k_1^2)$ – $(n+1)$ -мерная сфера кривизны k_1^2 , $k_1 > 0$. Если $\partial\Omega$ есть k_0 -выпуклая гиперповерхность, $k_0 > 0$, то $\partial\Omega$ содержится в сферическом слое ширины

$$d \leq \frac{2}{k_1} \arccos \sqrt{\cos k_1 R} - R \quad (1.2)$$

где R – радиус окружности кривизны k_0 на двумерной сфере кривизны k_1^2 .

3. Пусть объемлющее пространство $M^{n+1}(c) = \mathbb{H}^{n+1}(-k_1^2)$ – пространство Лобачевского кривизны $-k_1^2$, $k_1 > 0$. Если $\partial\Omega$ есть k_0 -выпуклая гиперповерхность, $k_0 > k_1$, то $\partial\Omega$ лежит в сферическом слое ширины

$$d \leq \frac{2}{k_1} \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch} k_1 R} - R \quad (1.3)$$

где R – радиус окружности кривизны k_0 в двумерном пространстве Лобачевского кривизны $-k_1^2$.

Замечание 1: Известно, что $R = \frac{1}{k_1} \operatorname{arcctg} \frac{k_0}{k_1}$ на двумерной сфере кривизны k_1^2 ; $R = \frac{1}{k_1} \operatorname{arccth} \frac{k_0}{k_1}$ в двумерном пространстве Лобачевского кривизны $-k_1^2$. Через R , как и везде далее, будем обозначать радиус окружности кривизны k_0 на плоскости постоянной кривизны c . Тогда, с учетом этого, оценки (1.2), (1.3) могут быть переписаны соответственно:

$$2. \quad d \leq \frac{1}{k_1} \left(2 \arccos \frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt[4]{k_0^2 + k_1^2}} - \operatorname{arcctg} \frac{k_0}{k_1} \right)$$

$$3. \quad d \leq \frac{1}{k_1} \left(2 \operatorname{arcch} \frac{\sqrt{k_0}}{\sqrt[4]{k_0^2 + k_1^2}} - \operatorname{arccth} \frac{k_0}{k_1} \right)$$

Замечание 2: Приведенные оценки являются точными в том смысле, что существуют примеры поверхностей, для которых достигается равенство в соответствующих неравенствах.

Оценку ширины сферического слоя можно обобщить и для случая объемлющего пространства непостоянной секционной кривизны. А именно, справедлива

Теорема 1.2. Пусть $\partial\Omega$ – замкнутая C^2 -гладкая гиперповерхность в полном односвязном $(n+1)$ -мерном римановом многообразии M^{n+1} , ограничивающая область Ω .

1. Пусть секционные кривизны M^{n+1} по всем двумерным площадкам σ , $k_2^2 \geq K_\sigma \geq k_1^2$, $k_1, k_2 > 0$. И пусть гиперповерхность лежит в шаре радиуса $\frac{\pi}{k_2}$ с центром, совпадающим с центром вписанного в $\partial\Omega$ шара. Тогда, если нормальные кривизны $\partial\Omega$ по всем направлениям $k_n \geq k_0 > 0$, то гиперповерхность $\partial\Omega$ можно заключить в сферический слой ширины (1.2);
2. Пусть для любой двумерной площадки $0 \geq K_\sigma \geq -k_1^2$, $k_1 > 0$. Тогда, если все нормальные кривизны $\partial\Omega$ по всем направлениям $k_n \geq k_0 > k_1$, то $\partial\Omega$ лежит в сферическом слое ширины (1.3).

1.2 Вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов

Лемма 1.1. Пусть $\partial\Omega$ – полная k_0 -выпуклая гиперповерхность в пространстве $M^{n+1}(c)$ постоянной секционной кривизны c , где

1. при $c = 0$ или $c = k_1^2 > 0$, $k_0 > 0$
2. $c = -k_1^2$, $k_0 > k_1$

Тогда $\partial\Omega$ есть вложенная выпуклая гиперповерхность, и в любой точке $P \in \partial\Omega$ существует опорная для $\partial\Omega$ сфера радиуса R , целиком содержащая внутри эту гиперповерхность.

Замечание: Тут под R , как мы уже отмечали, понимается радиус окружности кривизны k_0 в двумерном многообразии $M^2(c)$ постоянной секционной кривизны c .

Доказательство. Для C^k -гладкой гиперповерхности, $k \geq 2$, утверждение непосредственно следует из [5].

Пусть теперь $\partial\Omega$ нерегулярная k_0 -выпуклая гиперповерхность. Для достаточно малых τ рассмотрим внешне эквидистантные поверхности

$\partial\Omega_\tau$, которые будут $\varepsilon(\tau)$ -выпуклыми с $\varepsilon(\tau) \rightarrow k_0 - 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\tau) > 0$ (в случае 1) или $\varepsilon(\tau) > k_1$ (в случае 2). Известно, что поверхность $\partial\Omega_\tau$ является $C^{1,1}$ -гладкой гиперповерхностью. Но тогда ее можно сколь угодно близко приблизить регулярными гиперповерхностями $\partial\Omega_{\tau,\delta}$, нормальные кривизны которых $k_n \geq \varepsilon(\tau) - \nu(\delta)$ с $\nu(\delta) \rightarrow 0 + 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\tau) - \nu(\delta) > 0$ (в случае 1) или $\varepsilon(\tau) - \nu(\delta) > k_1$ (в случае 2). По уже доказанному регулярному случаю, $\partial\Omega_{\tau,\delta}$ содержится в сфере радиуса $R_{\tau,\delta}$ кривизны $\varepsilon(\tau) - \nu(\delta)$, опорной в произвольной точке $P_{\tau,\delta} \in \partial\Omega_{\tau,\delta}$. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, получим, что сфера радиуса $R = \lim_{\tau,\delta \rightarrow 0} R_{\tau,\delta}$, опорная в точке $P = \lim_{\tau,\delta \rightarrow 0} P_{\tau,\delta} \in \partial\Omega$, будет целиком содержать гиперповерхность $\partial\Omega$. Это верно для любой точки P . Лемма в нерегулярном случае доказана. \square

Для дальнейшего нам понадобится следующее наблюдение. Пусть A и B – две произвольные точки в $\Omega \subset M^{n+1}(c)$ (см. рис. 1.1). Рассмотрим произвольное вполне геодезическое двумерное подпространство $M^2(c)$ в $M^{n+1}(c)$ (в силу постоянства секционной кривизны, такое существует). В $M^2(c)$ существует ровно две окружности радиуса R , проходящие через A и B . Каждую из них эти две точки разбивают на две дуги – большую и меньшую. Везде далее будем меньшую дугу окружности радиуса R , проходящую через точки A и B называть *меньшей дугой окружности радиуса R для точек A и B* .

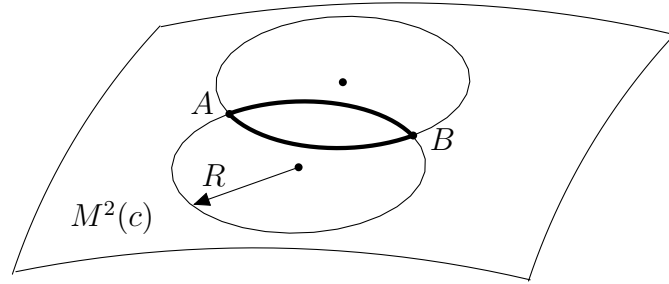


Рис. 1.1

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1.2. Пусть $\partial\Omega$ – полная k_0 -выпуклая гиперповерхность в полном односвязном пространстве $M^{n+1}(c)$ постоянной секционной кривизны c , ограничивающая область Ω (в случае $c = 0$ или $c = k_1^2 > 0$, $k_0 > 0$, а в случае $c = -k_1^2 < 0$, $k_0 > k_1$). Тогда любая меньшая дуга

окружности радиуса R , проходящая через любые две точки $A, B \in \Omega$, лежит в Ω .

Доказательство леммы 1.2. Предположим, что это не так и существуют такие $A, B \in \Omega$ и некоторая меньшая дуга ω для точек A и B , целиком не лежащая в области Ω . Рассмотрим пересечение Ω тем двумерным подпространством $M^2(c)$, которое содержит A, B и ω . Пусть $\gamma = M^2(c) \cap \partial\Omega$ – кривая в этом пересечении (см. рис. 1.2).

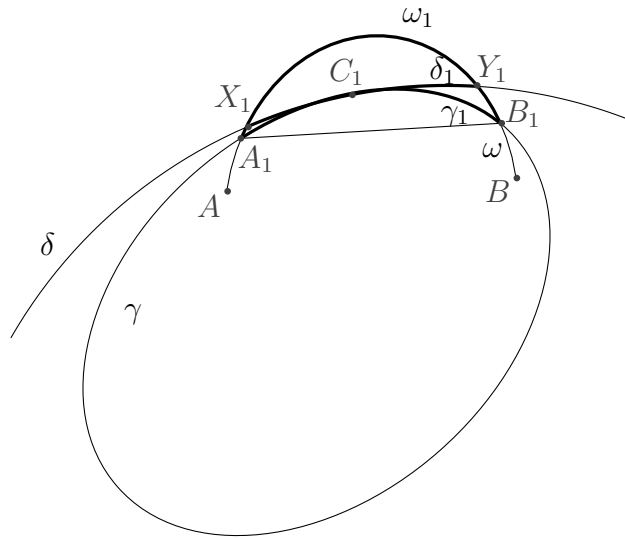


Рис. 1.2

Известно, что в сечении λ -выпуклой поверхности любым двумерным подпространством получается λ -выпуклая кривая. Таким образом, кривая γ является k_0 -выпуклой.

Пусть A_1, B_1 – точки пересечения ω с γ . Причем, если обозначить через ω_1 часть ω , лежащую между точками A_1 и B_1 , а через γ_1 – часть кривой γ , ограниченную дугой ω и хордой AB , то ω_1 и γ_1 будут выпуклыми кривыми, лежащими по одну сторону от геодезической, соединяющей A_1 и B_1 .

Пусть C_1 – произвольная точка на γ_1 , не совпадающая с A_1 или B_1 . Так как γ – k_0 -выпуклая замкнутая кривая, то по лемме 1.1 окружность δ радиуса R , опорная для γ в точке C_1 , целиком содержит γ . Пусть окружность δ пересекает ω_1 в двух точках X_1 и Y_1 . При этом, если X_1 или Y_1 совпадает с A_1 или B_1 , то в силу произвольности выбора C_1 , $\omega_1 \equiv \gamma_1$ и получим противоречие с тем, что ω_1 не лежит в Ω . Следовательно, $X_1 \neq A_1, Y_1 \neq B_1$.

Но тогда, так как ω_1 – меньшая дуга окружности радиуса R , то и дуга δ_1 окружности δ , ограниченная дугой ω_1 и хордой A_1B_1 , меньше половины окружности δ . А в силу выпуклости, δ_1 и ω_1 лежат по одну сторону от геодезической X_1Y_1 .

Таким образом мы получили, что для двух данных точек X_1 и Y_1 существуют две различные меньшие дуги окружностей радиуса R , лежащие по одну сторону от геодезической X_1Y_1 , чего быть не может. Отсюда следует утверждение леммы 1.2. □

Пусть опять $M^{n+1}(c)$ – полное односвязное риманово многообразие постоянной секционной кривизны c . Рассмотрим в нем компактную выпуклую область Ω , граница которой $\partial\Omega$ – замкнутая C^2 -гладкая гиперповерхность. Пусть $O \in \Omega$ – точка внутри области, а точка $P \in \partial\Omega$ такая, что $dist(O, P) = dist(O, \partial\Omega)$. Обозначим $\varphi(Q)$ – угол между геодезической OQ , проведенной из точки O в некоторую точку $Q \in \partial\Omega$, и внешней нормалью к $\partial\Omega$ в точке Q . Пусть $S_P \subset M^{n+1}(c)$ – сфера, проходящая через точку P перпендикулярно OP так, что точка O лежит в соответствующем ей шаре B_P . Обозначим $\beta(\bar{Q})$ – угол между геодезической $O\bar{Q}$, проведенной в некоторую точку $\bar{Q} \in S_P$, и внешней нормалью к сфере в этой точке.

Лемма 1.3. *Если во введенных выше обозначениях, для любых двух точек $Q \in \partial\Omega$ и $\bar{Q} \in S_P$ таких, что длины геодезических OQ и $O\bar{Q}$ равны,*

$$\varphi(Q) \leq \beta(\bar{Q}),$$

то сфера S_P является касательной сферой к гиперповерхности $\partial\Omega$ в точке P и область Ω целиком лежит в шаре B_P .

Доказательство. Введем на многообразии $M^{n+1}(c)$ полярную систему координат с центром в точке O . Тогда метрика может быть записана в виде $ds^2 = dt^2 + g_{ij}d\theta^i d\theta^j$, где t – параметр расстояния от начала координат, а $\theta^1, \dots, \theta^n$ – координаты на стандартной единичной евклидовой сфере S^1 . Можно считать, что координаты точки $P = (h, 0, \dots, 0)$, где $h = dist(O, P) = dist(O, \partial\Omega)$.

В окрестности точки P нашу поверхность и сферу можно задать явным образом. Пусть $\partial\Omega$ задается как $t = f(\theta^1, \dots, \theta^n)$, а S_P – как $t = \rho(\theta^1, \dots, \theta^n)$.

Пусть точки $Q \in \partial\Omega$ и $\bar{Q} \in S_P$ лежат в рассматриваемой окрестности и таковы, что $OQ = O\bar{Q}$. Тогда соответствующие внешние нормали

$N_{\partial\Omega}(Q)$, $N_{S_P}(\bar{Q})$ к поверхностям в этих точках могут быть записаны как

$$\begin{aligned} N_{\partial\Omega}(Q) &= \frac{\text{grad}_M(t-f)}{|\text{grad}_M(t-f)|} = \frac{\partial_t - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \frac{\partial f}{\partial \theta^j}}} = \frac{\partial_t - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\Omega}^2}} \\ N_{S_P}(\bar{Q}) &= \frac{\text{grad}_M(t-\rho)}{|\text{grad}_M(t-\rho)|} = \frac{\partial_t - g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial \theta^i} \frac{\partial \rho}{\partial \theta^j}}} = \frac{\partial_t - g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + |\nabla \rho|_{S_P}^2}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где все производные рассматриваются в соответствующих точках Q или \bar{Q} , ∂_t , ∂_{θ^i} , $i = 1, \dots, n$ – координатный базис в соответствующих касательных пространствах $T_Q M^{n+1}(c)$ или $T_{\bar{Q}} M^{n+1}(c)$, и мы обозначили $\partial f = \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^i}$, $\partial \rho = \frac{\partial \rho}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^i}$ (везде подразумевается суммирование по индексам).

В силу (1.4) углы между радиальными направлениями $\partial_t(Q)$ и $\partial_t(\bar{Q})$ в точки Q и \bar{Q} и соответствующими нормальными могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \cos \varphi(Q) &= \langle N_{\partial\Omega}(Q), \partial_t(Q) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\Omega}^2}} \\ \cos \beta(\bar{Q}) &= \langle N_{S_P}(\bar{Q}), \partial_t(\bar{Q}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \rho|_{S_P}^2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

И так как по условию $\varphi(Q) \leq \beta(\bar{Q})$, то окончательно получаем в соответствующих точках

$$|\nabla f|_{\partial\Omega}^2 \leq |\nabla \rho|_{S_P}^2 \quad (1.6)$$

Покажем, что для всех $(\theta^1, \dots, \theta^n) \in S^n$

$$f(\theta^1, \dots, \theta^n) \leq \rho(\theta^1, \dots, \theta^n) \quad (1.7)$$

и равенство достигается только для замкнутой области S^n , содержащей точку $(0, \dots, 0)$.

Из этого, в силу выбора начала координат, и будет следовать утверждение леммы.

А) Докажем нашу лемму для случая $n = 1$. Нам достаточно показать, что для любого $\theta \in S^1$

$$f(\theta) \leq \rho(\theta) \quad (1.8)$$

В полярной системе координат на многообразии $M^2(c)$, $g^{-1}(t, \theta) = g_{11}^{-1}(t, \theta) = \frac{1}{\text{sc}^2 k_1 t}$, где

$$\text{sc} k_1 t = \begin{cases} \sin k_1 t, & \text{если } c = k_1^2 > 0; \\ t, & \text{если } c = 0; \\ \text{sh } k_1 t, & \text{если } c = -k_1^2 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $g^{-1}(t, \theta) > 0$ и не зависит от величины угла. А это значит, что из неравенства (1.6) для тех значений θ_1 и θ_2 , в которых $f(\theta_1) = \rho(\theta_2)$, верным является

$$f'^2(\theta_1) \leq \rho'^2(\theta_2) \quad (1.9)$$

Для окружности S_P известно, что $\rho(\theta)$ является строго монотонно возрастающей функцией на $[0, \pi]$, если радиус окружности S_P не равен h . Если же он равен h , то $\rho \equiv h$, и из (1.9) следует, что $f \equiv h$, поэтому (1.8) будет выполнено.

В силу того, что $h = f(0)$ – минимальное расстояние, то в некоторой правой окрестности нуля $[0, \tilde{\theta})$, $\tilde{\theta} < \pi$ функция $f(\theta)$ тоже строго монотонно возрастающая.

Действительно, если в какой-то окрестности нуля $f \equiv h$, то (1.8) выполнено. Если же в любой сколь угодно малой правой окрестности 0 у функции f есть точки, в которых она равна h и не равна h , то рассмотрим дугу кривой между двумя такими соседними точками P_1 и P_2 . В силу выпуклости, существует окрестность точки P_1 , лежащей на дуге кривой между P_1 и P_2 , в которой функция f строго монотонно возрастает. Тогда будем считать, что $P = P_1$.

Так как $f(0) = \rho(0) = h$, то $\tilde{\theta}$ можно выбрать таким, что для любого $\theta_2 \in [0, \tilde{\theta})$ можно найти $\theta_1 \in [0, \tilde{\theta})$ такой, что $f(\theta_1) = \rho(\theta_2)$. Значит, в этой окрестности из (1.9) следует

$$0 < f'(\theta_1) \leq \rho'(\theta_2) \quad (1.10)$$

В силу последнего соотношения (1.10), если обозначить $\tilde{h} := f(\tilde{\theta})$, то на отрезке $[h; \tilde{h})$ определены обратные функции $\theta = f^{-1}(t)$, $\theta = \rho^{-1}(t)$. Тогда, если $t_0 := f(\theta_1) = \rho(\theta_2)$, то из (1.10) получаем

$$(f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(\theta_1)} \geq \frac{1}{\rho'(\theta_2)} = (\rho^{-1})'(t_0) > 0 \quad (1.11)$$

А значит, f^{-1} монотонно возрастает быстрее, чем ρ^{-1} . И так как $f^{-1}(h) = \rho^{-1}(h) = 0$, то $\theta_1 = f^{-1}(t_0) \geq \rho^{-1}(t_0) = \theta_2$. Причем, если в (1.11) хоть в одной точке строгое неравенство, то $\theta_1 > \theta_2$. Но тогда, в силу монотонности функции f

$$f(\theta_2) < f(\theta_1) = \rho(\theta_2),$$

что, ввиду произвольности $\theta_2 \in [0, \tilde{\theta})$, влечет за собой (1.8) на выбранном отрезке. Если в (1.11) всюду равенство на $[h; \tilde{h})$, то на выбранном отрезке кривая совпадает с дугой окружности S_P .

Аналогичные рассуждения, но примененные к левой окрестности 0, гарантируют, что S_P является локально опорной окружностью в точке P , и что $\partial\Omega$ локально лежит внутри окружности S_P или совпадает с ней по какой-то дуге, содержащей точку P . Покажем, что это верно и для всех $\theta \in S^1$.

Предположим противное. Тогда, в силу того, что локально $\partial\Omega \subset B_P$, кривая $\partial\Omega$ должна выходить за пределы S_P . Пусть $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ – первая точка, в которой $\partial\Omega$ пересекает S_P и выходит за пределы. Получаем, что $f(\theta_0) = \rho(\theta_0)$. В силу условия, в точке $Q_0 = (f(\theta_0), \theta_0) = (\rho(\theta_0), \theta_0) \in \partial\Omega \cap S_P$ для соответствующих углов верно

$$\varphi(Q_0) \leq \beta(Q_0),$$

что противоречит с тем, что кривая выходит за пределы окружности (см. рис. 1.3)

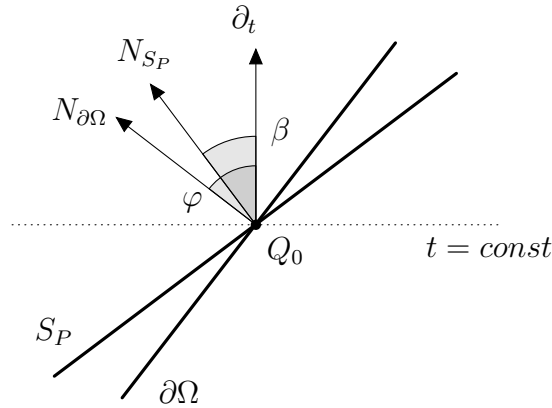


Рис. 1.3

Таким образом, мы пришли к противоречию, что и доказывает (1.8), а вместе с ним и лемму в случае $n = 1$.

В) Если $n \neq 1$, рассмотрим в $M^{n+1}(c)$ произвольное двумерное вполнегеодезическое подмногообразие $M^2(c)$, содержащее геодезическую OP . Оно пересечет сферу S_P по двумерной окружности, а гиперповерхность $\partial\Omega$ по двумерной кривой. Для них также будет выполнено условие леммы: $\tilde{\varphi}(Q) \leq \varphi(Q) \leq \beta(\bar{Q}) = \tilde{\beta}(\bar{Q})$, где $\tilde{\varphi}(Q)$, $\tilde{\beta}(\bar{Q})$ соответствующие углы между геодезическими OQ и $O\bar{Q}$ и нормальными в $Q \in \partial\Omega$ и $\bar{Q} \in S_P$ к кривым в сечении. Значит, можно применить рассуждения пункта А), и получить, что кривая лежит в соответствующем окружности круге. Но

так как это верно для любого $M^2(c)$, то мы получаем, что $\partial\Omega \subset B_P$. Лемма доказана. □

1.3 Доказательство теоремы 1.1

Регулярный случай был доказан в [11]. Рассмотрим нерегулярный случай.

Пусть $\partial\Omega$ – произвольная полная k_0 -выпуклая гиперповерхность. Применим рассуждения, аналогичные таковым при доказательстве леммы 1.1. Для $\partial\Omega$ рассмотрим внешне эквидистантные $C^{1,1}$ -гладкие $\varepsilon(\tau)$ -выпуклые гиперповерхности $\partial\Omega_\tau$ на небольшом расстоянии τ , $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon(\tau) = k_0$. Приближим их C^k -гладкими гиперповерхностями $\partial\Omega_{\tau,\delta}$, $k \geq 2$, нормальные кривизны которых $k_n \geq \varepsilon(\tau) - \nu(\delta)$ с $\nu(\delta) \rightarrow 0 + 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Для них оценка доказана выше. Переходя к пределу при $\tau, \varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая $\lim_{\tau,\delta \rightarrow 0} R_{\tau,\delta} = R$, получаем требуемые оценки в общем случае. Теорема полностью доказана.

1.4 Доказательство теоремы 1.2

Пусть O – центр вписанного в $\partial\Omega$ шара B радиуса r . В касательном пространстве $T_O M^{n+1}$ рассмотрим область $D = \exp_O^{-1}(\Omega)$. Тогда $\partial D = \exp_O^{-1}(\partial\Omega)$.

Обозначим через $\bar{O} \in M^{n+1}(c)$ произвольную точку в многообразии постоянной секционной кривизны c . Отождествляя касательные пространства $T_O M^{n+1}$ и $T_{\bar{O}} M^{n+1}(c)$ по изометрии, мы можем определить $\bar{\Omega} := \exp_{\bar{O}} D$. Тогда $\partial\bar{\Omega} = \exp_{\bar{O}}(\partial D)$. Также, обозначим $\bar{B} := \exp_{\bar{O}} B$ – шар радиуса r .

Введем на многообразиях M^{n+1} и $M^{n+1}(c)$ полярные системы координат с центрами в точках O и \bar{O} соответственно. Тогда их метрики могут быть записаны

$$\begin{aligned} M^{n+1} : ds^2 &= dt^2 + g_{ij} d\theta^i d\theta^j \\ M^{n+1}(c) : ds^2 &= dt^2 + G_{ij} d\theta^i d\theta^j \end{aligned}$$

где, как и в лемме 1.3, t – параметр длины, $\theta^1, \dots, \theta^n$ – координаты на стандартной евклидовой сфере S^n .

При этом (см. [10]), если секционные K кривизны M^{n+1} отрицательны $0 \geq K \geq -k_1^2$, то такая система координат будет регулярной всюду, кроме точки O . Если же секционные кривизны M^{n+1} положительны $k_2^2 \geq K \geq k_1^2 > 0$, то система координат будет заведомо регулярной в

шаре радиуса $\frac{\pi}{k_2}$ с выколотым центром. Таким образом, в силу условия теоремы, область $\Omega \subset M^{n+1}$ лежит в области регулярности выбранной на M^{n+1} полярной системы координат.

Используя стандартный аппарат сравнения (см. [6]), в силу того, что все секционные кривизны $K_\sigma \geq c$, для квадратичных форм g и G , определяемых матрицами (g_{ij}) , (G_{ij}) , и любого вектора $x(x^1, \dots, x^n)$ верно

$$g_{ij}x^i x^j \leq G_{ij}x^i x^j \quad (1.12)$$

(где значения коэффициентов квадратичных форм взяты для одних и тех же значений параметров)

Тогда для обратных матриц (g^{ij}) , (G^{ij}) , отвечающим одинаковым значениям параметров, в силу (1.12), для любого ко-вектора $a(a_1, \dots, a_n)$ верно

$$g^{ij}a_i a_j \geq G^{ij}a_i a_j \quad (1.13)$$

Пусть $\partial\Omega$ задается явно уравнением $t = f(\theta^1, \dots, \theta^n)$. Тогда, по построению $\partial\bar{\Omega}$ задается тем же уравнением. Если N и \bar{N} – единичные внешние нормали в соответствующих друг другу по изометрии касательных пространств точках $Q \in \partial\Omega$ и $\bar{Q} \in \partial\bar{\Omega}$, то аналогично лемме 1.3, они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} N(Q) &= \frac{\text{grad}_M(t-f)}{|\text{grad}_M(t-f)|} = \frac{\partial_t - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\Omega}^2}} \\ \bar{N}(\bar{Q}) &= \frac{\text{grad}_{M(c)}(t-f)}{|\text{grad}_{M(c)}(t-f)|} = \frac{\partial_t - G^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^j}}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\bar{\Omega}}^2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\partial f = \frac{\partial f}{\partial \theta^i} \partial_{\theta^i}$ – касательный вектор к сфере S^n .

Тогда, косинусы соответствующих углов $\varphi(Q)$ и $\bar{\varphi}(\bar{Q})$ между радиальным направлением ∂_t и соответствующей внешней нормалью N и \bar{N} в силу (1.14) равны

$$\begin{aligned} \cos \varphi(Q) &= \langle N(Q), \partial_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\Omega}^2}} \\ \cos \bar{\varphi}(\bar{Q}) &= \langle \bar{N}(\bar{Q}), \partial_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|_{\partial\bar{\Omega}}^2}} \end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем, что в силу (1.13), в соответствующих точках

$$\cos \varphi(Q) \leq \cos \bar{\varphi}(\bar{Q}) \quad (1.15)$$

Пусть $P \in \partial\Omega \cap B$ – одна из точек касания вписанного шара B радиуса r с гиперповерхностью $\partial\Omega$, $dist(O, \partial\Omega) = dist(O, P) = r$ и $\bar{P} \in \partial\bar{\Omega}$ – соответствующая ей по изометрии точка, $dist(\bar{O}, \partial\bar{\Omega}) = dist(\bar{O}, \bar{P}) = r$, $\bar{P} \in \partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}$. В многообразии $M^{n+1}(c)$ рассмотрим сферу $S_{\bar{P}}$ кривизны k_0 , проходящую через точку \bar{P} перпендикулярно геодезической $\bar{O}\bar{P}$ так, что точка \bar{O} лежит в соответствующем шаре $B_{\bar{P}}$.

Как и выше, для произвольной $Q_0 \in S_{\bar{P}}$ обозначим $\beta(Q_0)$ – угол между радиальным направлением в точку и соответствующей внешней нормалью в ней. В [9, 11] было доказано, что в точках $Q \in \partial\Omega$ и $Q_0 \in S_{\bar{P}}$ с $dist(O, Q) = dist(\bar{O}, Q_0)$ справедливо

$$\cos \beta(Q_0) \leq \cos \varphi(Q) \quad (1.16)$$

Из (1.15) и (1.16) следует, что в любых точках $\bar{Q} \in \partial\bar{\Omega}$ и $Q_0 \in S_{\bar{P}}$ таких, что $dist(\bar{O}, \bar{Q}) = dist(\bar{O}, Q_0)$ справедливо

$$\cos \beta(Q_0) \leq \cos \bar{\varphi}(\bar{Q})$$

Но тогда, по лемме 1.3, сфера $S_{\bar{P}}$ является опорной для гиперповерхности $\partial\bar{\Omega}$, а область $\bar{\Omega}$ полностью содержится в шаре $B_{\bar{P}}$

$$\bar{\Omega} \subset B_{\bar{P}} \quad (1.17)$$

Очевидно, что полученное включение справедливо для любой точки $\bar{P} \in \partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}$.

Рассмотрим область

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\bar{P} \in \partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}} B_{\bar{P}}$$

По построению, гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$ является полной и k_0 -выпуклой. Также, в силу (1.17)

$$\bar{\Omega} \subset \mathcal{C} \quad (1.18)$$

Применяя рассуждения, аналогичные таковым в доказательстве теоремы 1.1, покажем, что шар \bar{B} является вписанным и для гиперповерхности $\partial\mathcal{C}$.

Действительно, так как шар B – вписанный для $\partial\Omega$, то, как известно, множество $\partial\Omega \cap B$ не содержится ни в одной открытой полусфере ∂B . По построению, тоже самое верно и для множества $\partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}$. Предположим теперь противное, пусть \bar{B} не является вписанным шаром для $\partial\mathcal{C}$. Тогда, существует шар $B_1 \subset \mathcal{C}$ того же радиуса, не совпадающий с \bar{B} . Пусть O_1 – центр B_1 .

Обозначим π_0 и π_1 – два вполнегеодезических n -мерных подмногообразия $M^{n+1}(c)$, проходящих через точки \bar{O} и O_1 перпендикулярно геодезической $\bar{O}O_1$. Любой точке $\bar{P} \in \pi_0 \cap \bar{B}$ соответствует по параллельному переносу вдоль геодезической $\bar{O}O_1$ точка $P_1 \in \pi_1 \cap B_1$. И так как гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$ является k_0 -выпуклой, то по лемме 1.2 любая меньшая дуга окружности кривизны k_0 для точек \bar{P} и P_1 содержится в соответствующей области \mathcal{C} . Выберем среди них такую дугу s , которая образует с геодезическими $\bar{O}\bar{P}$ и O_1P_1 угол, больший $\frac{\pi}{2}$. Так как такое возможно сделать для любой точки $\bar{P} \in \pi_0 \cap \bar{B}$, то часть $\partial\bar{B}$, лежащая в том же полупространстве относительно π_0 , что и точка O_1 , не содержит ни одной точки $\partial\mathcal{C}$, а значит и множества $\partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}$. Получаем, что некоторые точки $\bar{P} \in \partial\bar{\Omega} \cap \bar{B}$ должны лежать на экваториальной окружности $\pi_0 \cap \partial\bar{B}$. Но в них опорная сфера кривизны k_0 по построению перпендикулярна геодезической $\bar{O}\bar{P}$. Значит, дуга s не содержится в этой сфере, что противоречит построению \mathcal{C} и тому, что s лежит в \mathcal{C} . Пришли к противоречию, что и доказывает, что шар \bar{B} радиуса r является вписанным для $\partial\mathcal{C}$.

Но тогда, в силу того $\partial\mathcal{C}$ является полной k_0 -выпуклой поверхностью, для ширины сферического слоя $\max dist(\bar{O}, \partial\mathcal{C}) - r$, в который можно, очевидно, заключить гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$, выполнены оценки из теоремы 1.1.

В силу (1.18), $\max dist(\bar{O}, \partial\bar{\Omega}) - r \leq \max dist(\bar{O}, \partial\mathcal{C}) - r$. А по построению, $\max dist(\bar{O}, \partial\bar{\Omega}) - r = \max dist(O, \partial\Omega) - r$. Следовательно,

$$\max dist(O, \partial\Omega) - r \leq \max dist(\bar{O}, \partial\mathcal{C}) - r,$$

из чего, с учетом теоремы 1.1, и получаются оценки на ширину сферического слоя в случае гиперповерхности, лежащей в римановом многообразии непостоянной кривизны. Теорема доказана.

2 Изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной снизу кривизны

2.1 Вступление и формулировка основного результата

Известна классическая изопериметрическая задача, которая утверждает, что из всех вложенных замкнутых кривых постоянной длины L на плоскости, наибольшую площадь будет ограничивать окружность длины L и радиуса $\frac{L}{2\pi}$. При этом понятно, что наименьшая площадь будет равна 0.

Напомним, что локально выпуклая кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ называется λ -выпуклой, $\lambda > 0$, если в каждой точке $P \in \gamma$ существует окружность радиуса $\frac{1}{\lambda}$ такая, что в окрестности P кривая γ лежит со стороны выпуклости этой окружности.

Для регулярной класса $C^k, k \geq 2$ кривой γ ее λ -выпуклость равносильна тому, что кривизна кривой $k \geq \lambda > 0$.

Будем теперь рассматривать не произвольные кривые постоянной длины, а класс замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых γ , длины которых равны $L \leq \frac{2\pi}{\lambda}$. Неравенство с необходимостью следует из λ -выпуклости.

Очевидно (и это следует из изопериметрической задачи), что среди таких кривых наибольшую площадь будет ограничивать все та же окружность длины L и кривизны $\frac{2\pi}{L} \geq \lambda$. Но оказывается, что для такого класса кривых существует минимум ограничиваемой площади.

Будем называть *правильным криволинейным двуугольником* или *луночкой* выпуклую кривую γ_0 длины $L \leq \frac{2\pi}{\lambda}$, составленную из двух равных дуг окружности радиуса $\frac{1}{\lambda}$.

Тогда, справедливо следующее изопериметрическое неравенство

Теорема 2.1. Пусть $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая. Пусть L и S – длина кривой и площадь области, ею ограниченной. Тогда

$$S \geq \frac{L}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin\left(\frac{L\lambda}{2}\right), \quad (2.1)$$

причем равенство достигается для луночки γ_0 .

2.2 Доказательство теоремы 2.1

Регулярный случай. Не ограничивая общности можем считать $\lambda = 1$. Пусть γ – локально выпуклая кусочно C^2 -гладкая кривая, кривизна ко-

торой в гладких точках $k \geq 1$. В негладких точках $P_i \in \gamma$ существуют $\overline{\lim} k(P) \geq 1$ и $\underline{\lim} k(P) \geq 1$ при $P \rightarrow P_i$, в том числе и бесконечные.

Как известно, положительность кривизны вложенной кривой γ влечет ее строгую выпуклость. Значит, γ можно однозначно задать опорной функцией $x(t) = \langle \gamma(t), n(t) \rangle$, $t \in [0; 2\pi]$ расстояния от начала координат (точки O) до опорной прямой к γ в точке с единичной внешней нормалью $n(t)$, где t – угол между $n(t)$ и положительным направлением оси Ox (тут $\gamma(t)$ – радиус-вектор кривой, проведенный в соответствующую этой нормали точку).

Обозначим через $u(t) = \frac{1}{k(t)}$ – радиус кривизны кривой в точке $\gamma(t)$. Тогда, в силу того, что $k \geq 1$,

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (2.2)$$

Заметим, что значение $u = 0$ соответствует точкам кривой, в которой кривизна равна бесконечности. Существование таких точек допускается условием теоремы.

Для опорной функции известно, что в точках C^2 -гладкости на $[0; 2\pi]$

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \quad (2.3)$$

Используя опорную функцию и радиус кривизны, выпишем выражения для длины L кривой и площади S , которую она ограничивает.

$$L = \int_0^{2\pi} ds(t) = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^{2\pi} u(t) dt \quad (2.4)$$

(где под ds понимается элемент длины дуги кривой).

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) ds(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) u(t) dt \quad (2.5)$$

Для доказательства неравенства (2.1) заметим, что площадь, ограничиваемая криволинейным двуугольником γ_0 длины L_{γ_0} как раз равна

$$S_{\gamma_0} = \frac{L_{\gamma_0}}{2} - \sin\left(\frac{L_{\gamma_0}}{2}\right) \quad (2.6)$$

Действительно, пусть γ_0 состоит из двух одинаковых дуг окружности радиуса 1, A и B – их две общие точки, O – центр одной из этих окружностей (см. рис. 2.1). Тогда, лежащая на ней дуга $AB = \frac{L_{\gamma_0}}{2}$, а искомая площадь равна двум площадям сегмента, соответствующего этой

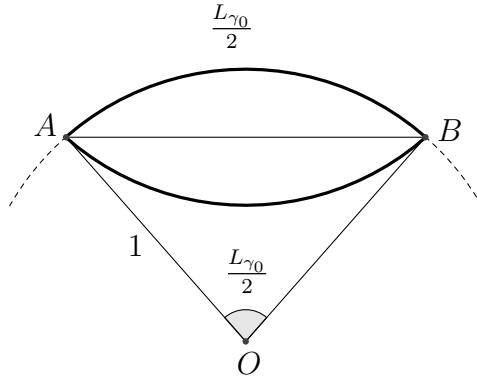


Рис. 2.1

дуге. Очевидно, что площадь сектора AOB равна $S_{\text{сект.}} = \frac{L_0}{4}$, а площадь треугольника $\triangle ABC$, $S_{\text{треуг.}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{L_{\gamma_0}}{2}\right)$. Значит

$$S_{\gamma_0} = 2S_{\text{сегм.}} = 2(S_{\text{сект.}} - S_{\text{треуг.}}) = \frac{L_{\gamma_0}}{2} - \sin\left(\frac{L_{\gamma_0}}{2}\right),$$

что и требовалось.

А значит, в силу (2.6), утверждение теоремы равносильно тому, что наименьшую ограничиваемую площадь среди всех кривых γ кривизны $k \geq 1$ некоторой фиксированной длины L_0 имеет криволинейный двуугольник γ_0 той же длины. Будем доказывать теорему в этой равносильной формулировке. А для этого, найдем минимум функционала площади S .

Используя условия (2.2) – (2.5), приходим к следующей формализованной постановке задачи

$$\begin{cases} S_{\gamma} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t)u(t)dt \rightarrow \min \\ L_{\gamma} = \int_0^{2\pi} u(t)dt = L_0 \\ \ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Интерпретируем задачу (2.7) как задачу оптимального управления, где радиус кривизны $u(t)$ будет выступать в роли управления, а опорная

функция $x(t)$ – в роли фазовой траектории. Исходя из того, что кривая γ – вложена, будем решать эту задачу по u в классе 2π -периодических кусочно-непрерывных функций, а по x в классе 2π -периодических кусочно дифференцируемых функций.

Добавим к задаче (2.7) начальные и граничные значения для опорной функции

$$x(0) = x(2\pi) = h_1, \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) = h_2$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [7]). Сделаем замену

$$x(t) =: x_1(t), \dot{x}(t) =: x_2(t) \quad (2.8)$$

Тогда приходим к классической задаче оптимального управления

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} x_1(t) u(t) dt \rightarrow \min \\ \int_0^{2\pi} \left(u(t) - \frac{L_0}{2\pi} \right) dt = 0 \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \\ x_1(0) = x_1(2\pi) = h_1, x_2(0) = x_2(2\pi) = h_2 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Для (2.9) запишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) dt + l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)),$$

где

$$\begin{aligned} L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) &= \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0 x_1 u + \lambda_1 \left(u - \frac{L_0}{2\pi} \right) + p_1 (\dot{x}_1 - x_2) + p_2 (\dot{x}_2 + x_1 - u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)) &= \\ &= \lambda_3 (x_1(0) - h_1) + \lambda_4 (x_1(2\pi) - h_1) + \lambda_5 (x_2(0) - h_2) + \lambda_6 (x_2(2\pi) - h_2) \end{aligned}$$

Тогда, для интегранта L на оптимальной фазовой траектории и оптимальном управлении (которые мы все так же будем обозначать $x(t)$ и $u(t)$) должны выполняться

1. Уравнение Эйлера по фазовым переменным x_i , $i = 1, 2$: $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1 : -\dot{p}_1 + \frac{1}{2}\lambda_0 u + p_2 &= 0 \\ i = 2 : -\dot{p}_2 - p_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Условие трансверсальности в точках 0 и 2π : $L_{\dot{x}_i}(0) = l'_{x_i(0)}(0)$, $L_{\dot{x}_i}(2\pi) = l'_{x_i(2\pi)}(2\pi)$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1 : p_1(0) = \lambda_3, \quad p_1(2\pi) = \lambda_4 \\ i = 2 : p_2(0) = \lambda_5, \quad p_2(2\pi) = \lambda_6 \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Условие минимума по переменной u

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq v \leq 1} L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, v, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1) = \\ = L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1). \end{aligned}$$

Для нашей задачи (2.9), заметим, что мы можем отбросить ту часть интегранта L , в которую не входит управление. А значит, условие минимума запишется как

$$\min_{0 \leq v \leq 1} \left(\frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \right) v = \left(\frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \right) u \quad (2.12)$$

Но тогда, из (2.12) следует, что

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 < 0 \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Проанализируем полученные условия. А) Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Тогда из уравнений (2.10) и условий (2.11) легко следует, что $p_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $p_1(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$, $\lambda_5 = \lambda_6 = C_1$, $\lambda_4 = \lambda_3 = -C_2$ для некоторых констант C_1 и C_2 . Но тогда для фиксированного множителя Лагранжа λ_1 функция u запишется

$$u(t) = \begin{cases} 1, & C_1 \cos t + C_2 \sin t > \lambda_1 \\ 0, & C_1 \cos t + C_2 \sin t \leq \lambda_1 \end{cases}$$

Представим выражение $C_1 \cos t + C_2 \sin t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t - \varphi)$, где угол φ такой, что $\sin \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$. Тогда видно, что оптимальное управление u , в силу периодичности, кусочно-постоянная функция на отрезке $[0, 2\pi]$ принимающая значения 0 и 1 с не более, чем двумя точками разрыва. Покажем, что такого быть не может, если $L_0 \neq 0$ или $L_0 \neq 2\pi$.

Действительно, заметим, что геометрический смысл функции $u(t)$ – радиус кривизны замкнутой строго выпуклой кривой γ в точке с внешней нормалью $n(t) = (\cos t, \sin t)$.

Предположим, что u не имеет разрывов на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда радиус кривизны кривой постоянен и равен либо 0, либо 1. Это отвечает случаям точки (когда $L_0 = 0$) и окружности радиуса 1 ($L_0 = 2\pi$). Если же длина кривой не равна этим крайним значениям, то $u(t)$ не может быть непрерывной функцией.

Пусть функция u на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет ровно две точки разрыва $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, $t_1 < t_2$. При этом, в силу 2π -периодичности u , можно считать, что на $[t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 0$, а на $[0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 1$. Тогда, опорные прямые, соответствующие точкам $t \in [0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$ будут огибающими замкнутой окружности радиуса 1, имеющей угловую точку с нормалью $n(t_1 - 0)$ к левой полукасательной и нормалью $n(t_2 + 0)$ к правой полукасательной, угол между которыми равен $t_2 - t_1$ (см. рис. 2.2). Чего быть не может. Значит, $\lambda_0 \neq 0$.

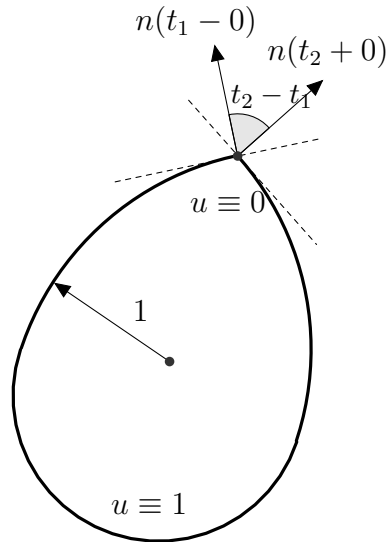


Рис. 2.2

Значит, можно считать, что $\lambda_0 = 2$.

Тогда из (2.10), (2.11), (2.13) и условия задачи, возвращаясь к исходной функции $x(t) = x_1(t)$ и обозначая $p(t) := p_2(t)$, получим что для оптимального процесса с необходимостью должны выполняться следующие уравнения

$$\ddot{p} + p = -u \quad (2.14)$$

$$\ddot{x} + x = u \quad (2.15)$$

с соответствующими начальными и краевыми значениями, где управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x - p + \lambda_1 < 0 \\ 0, & \text{при } x - p + \lambda_1 \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Сложим уравнения (2.14) и (2.15). Тогда новая функция $y := x + p$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2 \end{cases}$$

где начальные значения соответствующим образом зависят от множителей Лагранжа λ_i и начального положения кривой, задаваемого h_i . Решая его, получаем

$$y(t) = x(t) + p(t) = c_2 \sin t + c_1 \cos t. \quad (2.17)$$

Пусть $h(t)$ – опорная функция некоторой кривой $\delta(t)$. Сделаем замену системы координат путем переноса начала системы координат из точки O в точку $O_1(a_1, a_2)$ с сохранением направления и параллельности осей. Тогда опорная функция кривой $\delta(t)$ изменится следующим образом:

$$h_1(t) = h(t) - (a_1 \cos t + a_2 \sin t),$$

где $h_1(t)$ – опорная функция $\delta(t)$ в новой системе координат.

Запишем (2.17) в виде

$$x(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t\right) = -(p(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t\right)) \quad (2.18)$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &:= x(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t\right) \\ \tilde{p}(t) &:= p(t) - \left(\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t\right) \end{aligned}$$

то из сказанного выше будет следовать, что $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{p}(t)$ будут опорными функциями тех же кривых, что и $x(t)$ и $p(t)$, но взятые относительно системы координат с центром $O_1(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2})$. При чем, в силу (2.18), для них будет верно $\tilde{x}(t) = -\tilde{p}(t)$.

И так как вид условий (2.14) – (2.19) не зависит от выбора системы координат, то не ограничивая общности можно изначально считать, что $x(t) = -p(t)$. И тогда, получаем окончательную связь радиуса кривизны кривой γ с ее опорной функцией

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x(t) < \lambda \\ 0, & \text{при } x(t) \geq \lambda \end{cases} \quad (2.19)$$

где $\lambda = -\frac{\lambda_1}{2}$ некоторая константа.

Так как опорная функция непрерывна, из полученного условия следует, что γ состоит из дуг окружностей радиуса 1, состыковывающихся друг с другом в угловых точках. Причем, в силу выпуклости γ , в этих угловых точках угол между полукасательными, взятый с учетом направления нормалей кривой, меньше π .

Предположим, что $\lambda \leq 0$. Обозначим $x_{max} := \max_{t \in [0, 2\pi)} x(t)$ – максимальное значение опорной функции, а через A_{max} – точку на кривой γ , соответствующей этому значению опорной функции. Из максимальной следует, что $x_{max} \geq 0$ и равно 0 только если кривая – точка. Можем считать $x_{max} > 0$.

Но тогда из (2.19) следует, что в точке A_{max} радиус кривизны равен нулю, то есть A_{max} – угловая точка кривой. Рассмотрим полукасательные к кривой γ в этой точке. Соответствующее им значение опорной функции равно λ . И так как $\lambda \leq 0$, то обе полукасательные проходят через начало координат O_1 . Следовательно, γ есть дважды покрытый отрезок. И в силу ограничений на кривизну, γ может быть только точкой A_{min} , что возможно только при $L = 0$.

Значит, $\lambda > 0$. Допустим, что начало координат O_1 лежит на кривой или ее границе.

Если $x_{max} < \lambda$, то кривая является окружностью радиуса 1, что возможно лишь при $L_0 = 2\pi$. Поэтому, будем считать, что $x_{max} \geq \lambda$.

Рассмотрим аналогичное значение $x_{min} := \min_{t \in [0, 2\pi)} x(t)$ и соответствующую ему точку A_{min} на γ . В силу минимальности и того, что начало координат лежит вне или на границе кривой, $x_{min} \leq 0 < \lambda$.

Это означает в силу (2.19) точка A_{min} будет лежать на некоторой дуге $\widehat{A_1 A_2}$ окружности радиуса 1. Будем считать $\widehat{A_1 A_2}$ максимальной дугой, лежащей на γ и содержащей точку A_{min} .

В силу выбора точки A_{min} касательная в ней к кривой γ параллельная оси O_1x . Тогда из (2.19) следует, что дуга $\widehat{A_1A_2}$ будет симметрична относительно прямой O_1A_{min} , а обе пары полукасательных к γ в точках A_1 и A_2 будут находиться на расстоянии λ от начала координат.

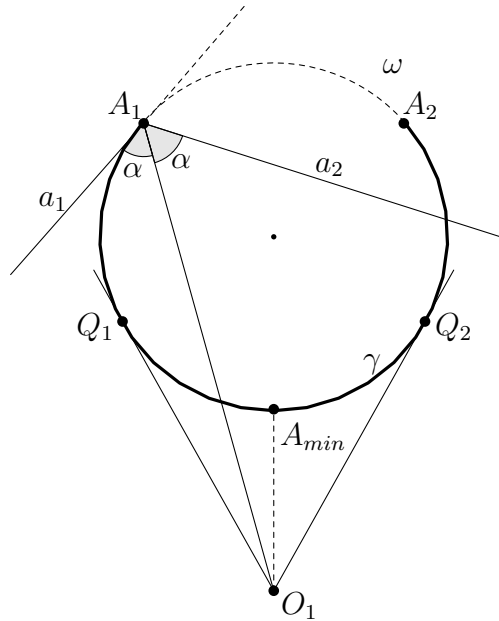


Рис. 2.3

Пусть ω – окружность радиуса 1, содержащая дугу $\widehat{A_1A_2}$ (см. рис. 2.3). Пусть a_1 и a_2 – две полукасательные к кривой γ в точке A_1 . Будем также считать, что a_1 – касательная к окружности ω в точке A_1 . Пусть Q_1 и Q_2 – точки на кривой γ , в которых существуют опорные прямые, проходящая через начало координат. Очевидно, что для таких прямых значение опорной функции $x(t)$ равно 0. Но в силу того, что в точке A_{min} опорная функция $x(t) \leq 0$, а в точках A_1 и A_2 ее значения $x(t) \geq \lambda > 0$, из непрерывности получаем, что Q_1 и Q_2 лежат на дуге $\widehat{A_1A_2}$. Заметим, что если точка O_1 не лежит на кривой γ , то $Q_1 \neq Q_2 \neq A_{min}$. Если же начало координат лежит на кривой, то $Q_1 \equiv Q_2 \equiv O_1 \equiv A_{min}$. Для определенности считаем, что $Q_1 \in \widehat{A_1A_{min}}$.

Обозначим угол между лучами a_1 и A_1O_1 через α . Так как $Q_1 \in \widehat{A_1A_{min}}$,

то луч A_1O_1 пересекает дугу $\widehat{A_1A_{min}}$. Поэтому

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \widehat{A_1A_{min}}, \quad (2.20)$$

где под $\widehat{A_1A_{min}}$ мы понимаем градусную меру этой дуги.

Из (2.20) и симметричности дуги $\widehat{A_1A_2}$ относительно $A_{min}O_1$ следует, что

$$2\alpha \leq \widehat{A_1A_{min}} = \frac{1}{2} \widehat{A_1A_2}$$

В силу того, что полукасательные a_1 и a_2 находятся на одинаковых расстояниях от начала координат, угол между ними равен 2α . Тогда из последнего неравенства следует, что полукасательная a_2 , являющаяся в тоже время и опорной прямой, пересекает дугу $\widehat{A_1A_2}$ во внутренней точке или в точке A_2 . Получили противоречие со строгой выпуклостью вложенной кривой γ . Значит, начало координат O_1 лежит внутри кривой.

Если начало координат лежит внутри кривой, то из ее выпуклости следует, что $x(t) > 0$. Причем, кривая не есть точка.

Аналогично, рассмотрим минимальное значение опорной функции $x_{min} > 0$ и одну из точек A_{min} , в которой оно достигается. Так как кривая в данном случае не может быть точкой, то $x_{min} < \lambda$. Поэтому, как и выше, построим максимальную дугу $\widehat{A_1A_2}$ окружности радиуса 1, содержащую точку A_{min} . Эта дуга будет симметричной относительно прямой O_1A_{min} , а точка A_{min} будет ее серединой. В силу максимальности дуги из (2.19), точки A_1 и A_2 будут угловыми точками кривой γ , обе пары полукасательных в которых находятся на расстоянии λ от начала координат.

Обозначим через φ угол между лучом A_1O_1 и дугой $\widehat{A_1A_2}$ в точке A_1 (то есть, угол между лучом и соответствующей полукасательной к дуге). В силу симметрии, угол между A_2O_1 и дугой $\widehat{A_1A_2}$ в точке A_2 также равен φ .

Заметим, что по углу φ , зная λ и положение точки O_1 , дуга $\widehat{A_1A_2}$ восстанавливается однозначно с точностью до поворота вокруг точки O_1 .

Как мы отмечали, из условия (2.19) следует, что кривая состоит из дуг единичной окружности, сходящихся в угловых точках. Рассмотрим дугу $\widehat{A_2A_3}$ окружности радиуса 1 между двумя угловыми точками A_2 и A_3 , которая состыковывается с дугой $\widehat{A_1A_2}$ в точке A_2 . Так как обе полукасательные в точке A_2 равноудалены от начала координат на расстояние λ , то эти дуги образуют одинаковые углы (равные φ) с лучом

A_2O_1 . Так как A_3 – угловая точка, то в ней полукасательная к дуге $\widehat{A_2A_3}$ удалена от O_1 на расстояние λ .

Наконец, так как по углу φ дуга $\widehat{A_2A_3}$ единичной окружности восстанавливается однозначно с точностью до поворота, то длины дуг $\widehat{A_1A_2}$ и $\widehat{A_2A_3}$ равны и эти дуги симметричны относительно прямой O_1A_2 .

Рассматривая следующую дугу $\widehat{A_3A_4}$ между двумя угловыми точками A_3 и A_4 , и применяя аналогичные рассуждения, получим, что длины $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_4}$ и углы в вершинах A_2 , A_3 – равны. И так далее. Так как каждая следующая дуга имеет одну и ту же длину, то таких дуг будет конечное число. Более того, если A_1, A_2, \dots, A_n – соответствующие угловые точки, то углы между полукасательными в вершинах A_2, \dots, A_n одинаковы и равны 2φ . Так как кривая γ – замкнута и вложена, то и угол в вершине A_1 тоже равен 2φ .

Таким образом, оптимальная кривая γ есть правильный криволинейный выпуклый n -угольник, составленный из равных дуг единичной окружности, вписанный в некоторую окружность σ радиуса $r < 1$. Будем считать, что его периметр $L \neq 0$, иначе кривая – точка, и $L \neq 2\pi$, иначе кривая – единичная окружность.

Пусть A_1, \dots, A_n – вершины многоугольника γ . Так как его периметр равен L , то в силу правильности получаем, что длина любой стороны A_iA_{i+1} , $i = 1, \dots, n$ равна $\frac{L}{n}$.

Из построения γ следует, что O_1 – центр окружности σ . В силу правильности, $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда площадь S_i части γ , ограниченной углом $\angle A_iOA_{i+1}$ и дугой A_iA_{i+1} для любого $i = 1, \dots, n$ равна

$$S' := S_i = \frac{L}{2n} - r \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n} \right), \quad (2.21)$$

где для радиуса r справедливо

$$\sin \frac{L}{2n} = r \sin \frac{\pi}{n} \quad (2.22)$$

Учитывая (2.21) и (2.22), для площади S многоугольника γ получаем

$$S = S(n) = nS' = \frac{L}{2} - n \frac{\sin \frac{L}{2n} \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \quad (2.23)$$

Так как n – это число сторон криволинейного многоугольника, то в (2.23) $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Покажем, что площадь $S(n)$ будет достигать своего минимального значения при $n = 2$, то есть когда γ – луночка. Для этого рассмотрим функцию

$$F(t) := \frac{L}{2} - \frac{\sin\left(\frac{Lt}{2}\right) \sin\left(\pi t - \frac{Lt}{2}\right)}{t \sin(\pi t)},$$

принимавшую при $t = \frac{1}{n}$ значения $S(n)$.

Для доказательства того, что $S(n)$ принимает наименьшее значение при $n = 2$ достаточно показать, что $F(t)$ строго монотонно убывает при $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

Перепишем $F(t)$ в виде

$$F(t) = \frac{L}{2} - \frac{1}{t \left(\cot\left(\frac{Lt}{2}\right) + \cot\left(\pi t - \frac{Lt}{2}\right) \right)} \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что строгое монотонное убывание $F(t)$ при $0 < t \leq \frac{1}{2}$ равносильно строгому монотонному убыванию функции $f(t) := t \cot\left(\frac{Lt}{2}\right) + t \cot\left(\left(\pi - \frac{L}{2}\right)t\right)$ на том же промежутке. Заметим, что

$$0 < \frac{L}{2} < \pi \text{ и } 0 < \pi - \frac{L}{2} < \pi. \quad (2.25)$$

На промежутке $0 < t \leq \frac{1}{2}$ рассмотрим функцию $g(t) = t \cot(bt)$, где $0 < b < \pi$. Имеем

$$g' = \frac{\sin(2bt) - 2bt}{2 \sin^2(bt)} < 0$$

так как $0 < 2bt \leq \pi$, а на $(0; \pi]$ мы знаем, что $\sin x < x$. Значит, на указанном промежутке $g(t)$ строго монотонно убывает. Из этого, с учетом замечания (2.25), следует, что тем же свойством и на том же промежутке обладает и $f(t)$ (как сумма монотонных). А значит, площадь $S(n)$ достигает своего минимума при $n = 2$.

Таким образом, с необходимостью, решением задачи (2.9) является правильный криволинейный двуугольник, составленный из двух равных дуг единичной окружности длины $\frac{L}{2}$.

При этом, решение задачи (2.9) существует в силу теоремы выбора Бляшке (см. [8]). А значит, правильный криволинейный двуугольник и есть решение в гладком случае.

Общий случай. Пусть теперь γ – произвольная замкнутая вложенная 1-выпуклая кривая. Рассмотрим ее внешнюю эквидистантную кривую γ_ε на расстоянии $\varepsilon > 0$. Она будет $\frac{1}{1+\varepsilon}$ -выпуклой. Известно, что γ_ε есть $C^{1,1}$ -гладкая кривая. Но тогда ее можно приблизить семейством гладких кривых $\gamma_{\varepsilon, \delta}$ кривизны $k \geq \frac{1}{1+\varepsilon} - \nu(\delta) > 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \nu(\delta) = 0$. Для таких кривых неравенство (2.1) доказано. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, получим, что оно справедливо и в общем случае. Теорема доказана.

3 Охрана труда в отрасли

Охрана труда – это система сохранения жизни и здоровья работников в процессе трудовой деятельности, включающая в себя правовые, социально - экономические, организационно - технические, санитарно - гигиенические, лечебно - профилактические, реабилитационные и иные мероприятия.

Государственные нормативные требования охраны труда устанавливают правила, процедуры и критерии, направленные на сохранение жизни и здоровья работников в процессе трудовой деятельности.

На современном этапе развития общества при выполнении практически всех видов работ неизбежно использование электронно - вычислительных машин или персональных компьютеров (ПК).

Для безопасного и эффективного использования компьютеров необходимо следовать государственным санитарным правилам и нормам работы с визуальными дисплейными терминалами (см. [12]).

Как типовую инструкцию по охране труда при работе на персональном компьютере можно предложить следующую.

1 ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ

- 1.1 К работе на персональном компьютере допускаются лица, прошедшие обучение безопасным методам труда, вводный инструктаж, первичный инструктаж на рабочем месте.
- 1.2 При эксплуатации персонального компьютера на работника могут оказывать действие следующие опасные и вредные производственные факторы: - повышенный уровень электромагнитных излучений; - повышенный уровень статического электричества; - пониженная ионизация воздуха; - статические физические перегрузки; - перенапряжение зрительных анализаторов.
- 1.3 Работник обязан:
 - 1.3.1 Содержать в чистоте рабочее место.
 - 1.3.2 Соблюдать режим труда и отдыха в зависимости от продолжительности, вида и категории трудовой деятельности, прописанные в [12].
 - 1.3.3 Соблюдать меры пожарной безопасности.
- 1.4 Рабочие места с компьютерами должны размещаться таким образом, чтобы расстояние от экрана одного видеомонитора

до тыла другого было не менее 2,0 м, а расстояние между боковыми поверхностями видеомониторов - не менее 1,2 м.

- 1.5 Рабочие места с персональными компьютерами по отношению к световым проемам должны располагаться так, чтобы естественный свет падал сбоку, преимущественно слева.
- 1.6 Оконные проемы в помещениях, где используются персональные компьютеры, должны быть оборудованы регулируемыми устройствами типа: жалюзи, занавесей, внешних козырьков и др.
- 1.7 Рабочая мебель для пользователей компьютерной техникой должна отвечать следующим требованиям:
 - высота рабочей поверхности стола должна регулироваться в пределах 680 - 800 мм; при отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм;
 - рабочий стол должен иметь пространство для ног высотой не менее 600 мм, глубиной на уровне колен не менее 450 мм и на уровне вытянутых ног не менее 650 мм;
 - рабочий стул (кресло) должен быть подъемно - поворотным и регулируемым по высоте и углам наклона сиденья и спинки, а также - расстоянию спинки от переднего края сиденья;
 - рабочее место должно быть оборудовано подставкой для ног, имеющей ширину не менее 300 мм, глубину не менее 400 мм, регулировку по высоте в пределах до 150 мм и по углу наклона опорной поверхности подставки до 20 градусов; поверхность подставки должна быть рифленой и иметь по переднему краю бортик высотой 10 мм;
 - рабочее место с персональным компьютером должно быть оснащено легко перемещаемым пюпитром для документов.
 - Для нормализации аэроионного фактора помещений с компьютерами необходимо использовать устройства автоматического регулирования ионного режима воздушной среды.
- 1.8 Женщины со времени установления беременности и в период кормления грудью к выполнению всех видов работ, связанных с использованием компьютеров, не допускаются.

- 1.9 За невыполнение данной инструкции виновники привлекаются к ответственности согласно правилам внутреннего трудового распорядка или взысканиям, определенным Кодексом законов о труде Украины.

2 ТРЕБОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ПЕРЕД НАЧАЛОМ РАБОТЫ

- 2.1 Подготовить рабочее место.
- 2.2 Отрегулировать освещение на рабочем месте, убедиться в отсутствии бликов на экране.
- 2.3 Проверить правильность подключения оборудования к электросети.
- 2.4 Проверить исправность проводов питания и отсутствие оголенных участков проводов.
- 2.5 Убедиться в наличии заземления системного блока, монитора и защитного экрана.
- 2.6 Протереть антистатической салфеткой поверхность экрана монитора и защитного экрана.
- 2.7 Проверить правильность установки стола, стула, подставки для ног, попитра, угла наклона экрана, положение клавиатуры, положение "мыши" на специальном коврик, при необходимости произвести регулировку рабочего стола и кресла, а также расположение элементов компьютера в соответствии с требованиями эргономики и в целях исключения неудобных поз и длительных напряжений тела.

Рациональной рабочей позой может считаться такое положение тела, при котором ступни работника расположены горизонтально на полу или на подставке для ног, бедра ориентированы в горизонтальной плоскости, верхние части рук – вертикально, угол локтевого сустава колеблется в пределах 70-90 градусов, запястья согнуты под углом не более 20 градусов, наклон головы – в границах 15-20 градусов.

3 ТРЕБОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ВО ВРЕМЯ РАБОТЫ

- 3.1 Работнику при работе на ПК запрещается:
 - прикасаться к задней панели системного блока (процессора) при включенном питании;

- переключать разъемы интерфейсных кабелей периферийных устройств при включенном питании;
- допускать попадание влаги на поверхность системного блока (процессора), монитора, рабочую поверхность клавиатуры, дисководов, принтеров и других устройств;
- производить самостоятельное вскрытие и ремонт оборудования;
- работать на компьютере при снятых кожухах;
- отключать оборудование от электросети и выдергивать электровилку, держа за шнур.

3.2 Продолжительность непрерывной работы с компьютером без регламентированного перерыва не должна превышать 2-х часов.

3.3 Во время регламентированных перерывов с целью снижения нервно - эмоционального напряжения, утомления зрительного анализатора, устранения влияния гиподинамии и гипокинезии, предотвращения развития позвоночного утомления выполнять комплексы упражнений.

4 ТРЕБОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ В АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

4.1 Во всех случаях обрыва проводов питания, неисправности заземления и других повреждений, появления гари, немедленно отключить питание и сообщить об аварийной ситуации руководителю.

4.2 Не приступать к работе до устранения неисправностей.

4.3 При получении травм или внезапном заболевании немедленно известить своего руководителя, организовать первую доврачебную помощь или вызвать скорую медицинскую помощь.

5 ТРЕБОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ПО ОКОНЧАНИИ РАБОТЫ

5.1 Отключить питание компьютера.

5.2 Привести в порядок рабочее место.

5.3 Выполнить упражнения для глаз и пальцев рук на расслабление.

Итак, исходя из вышеперечисленных требований с учетом [12] можно сделать вывод, что

- максимальное время работы за компьютером не должно превышать 6 часов за день;
- необходимо делать перерывы в работе за ПК продолжительностью 10 минут через каждые 45 минут работы;
- продолжительность непрерывной работы за компьютером без регламентированного перерыва не должна превышать 1 час;
- во время регламентированных перерывов с целью снижения нервно-эмоционального напряжения и утомления зрения, предотвращения развития позвоночного утомления целесообразно выполнять комплексы специальных упражнений.

Возможные комплексы упражнений для снижения негативного влияния от работы за персональным компьютером:

Упражнения для глаз:

1. Закрывать глаза, не напрягая глазные мышцы, на счет 1..4, широко раскрыть глаза и посмотреть вдаль на счет 1..6. Повторить 5 раз.
2. Посмотреть на кончик носа на счет 1..4, а потом перевести взгляд вдаль на счет 1..6. Повторить 5 раз.
3. Не поворачивая головы (голова прямо), делать медленно круговые движения глазами вверх-вправо-вниз-влево и в обратную сторону: вверх-влево-вниз-вправо. Затем посмотреть вдаль на счет 1..6. Повторить 5 раз.
4. При неподвижной голове перевести взор вверх на счет 1..4, прямо на счет 1..6; после чего аналогичным образом вниз-прямо, вправо-прямо, влево-прямо. Прodelать движение по диагонали в одну и другую стороны с переводом глаз прямо на счет 1..6. Повторить 4 раза.

Упражнения для мозгового кровообращения:

1. Позиция: сесть на стул, руки положить на пояс. Темп упражнения: медленный.
Упражнение: 1..2 - круг правой рукой назад с поворотом туловища и головы направо. 3..4 - круг левой рукой назад с поворотом туловища и головы налево. Повторить 6 раз.

2. Позиция: сесть на стул, руки развести в стороны, ладони выставить вперед, пальцы развести врозь. Темп упражнения: быстрый.

Упражнение: 1 - обхватить себя за плечи руками как возможно крепче и дальше, повернуться направо. 2 - вернуться в исходную позицию. 3 - обхватить себя за плечи руками как возможно крепче и дальше, повернуться налево. 4 - вернуться в исходную позицию. Повторить 6 раз.

3. Позиция: сесть на стул, руки положить на пояс. Темп упражнения: медленный.

Упражнение: 1 - повернуть голову направо. 2 - вернуться в исходную позицию. 3 - повернуть голову налево. 4 - вернуться в исходную позицию. Повторить 8 раз.

Упражнения для плеч и рук:

1. Позиция: встать, ноги поставить на ширине плеч, руки опустить вдоль тела. Темп упражнения: медленный.

Упражнение: 1 - поднять плечи. 2 - опустить плечи. Повторить 8 раз.

2. Позиция: встать, ноги поставить на ширине плеч. Темп упражнения: средний.

Упражнение: 1 - согнуть руки в локтях перед грудью. 2 - два раза резко развести руки назад. 3 - выпрямить руки перед собой. 4 - два раза резко развести руки назад. Повторить 6 раз.

3. Позиция: встать, ноги поставить на ширине плеч. Темп упражнения: средний.

Упражнение: 1..4 - четыре последовательных круга руками назад. 1..4 - четыре последовательных круга руками вперед. Повторить 6 раз.

Упражнения для позвоночника:

1. Позиция: встать, ноги поставить врозь, руки опустить вдоль тела. Темп упражнения: медленный.

Упражнение: 1 - руки назад. 2..3 - руки в стороны и вверх, встать на носки. 4 - расслабляя плечевой пояс, руки вниз с небольшим наклоном вперед. Повторить 6 раз.

2. Позиция: встать, ноги поставить врозь, руки согнуть в локтях, кисти сжать в кулаки. Темп упражнения: средний.

Упражнение: 1 - с поворотом туловища налево "удар" правой рукой вперед. 2 - возврат в исходную позицию. 3 - с поворотом туловища направо "удар" левой рукой вперед. 4 - возврат в исходную позицию. Повторить 8 раз.

Список литературы

- [1] *A. A. Borisenko* Convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2002 — **17** — p. 111–121.
- [2] *A. A. Borisenko, E. Gallego, A. Reventos* Relation between area and volume for λ -convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2001 — **14** — p. 267–280.
- [3] *A. A. Borisenko, V. Miquel* Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space // Illinois journal of mathematics — 1999 — **43** No. 2. — p. 61–78.
- [4] *A. A. Borisenko, V. Miquel* Comparison theorems on convex hypersurfaces in Hadamard manifolds // Annals of global analysis and geometry — 2002 — **21** — p.191–202.
- [5] *H. Karcher* Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der spharischen und der hyperbolischen Geometrie // Math. Annalen — 1968 — **177** — p. 122–132
- [6] *P. Petersen* Riemannian geometry — Graduate texts in mathematics, vol. 171, New York: Springer, 1998.
- [7] *А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения — М.: Изд-во "Факториал Пресс 2006. — 144 с.
- [8] *В. Бляшке* Круг и шар — М.: Наука, 1967. — 232 с.
- [9] *А. А. Борисенко, К. Д. Драч* О теореме сравнения углов для замкнутых кривых // Доповіді НАН України — 2011 — **6** — стр. 7–11
- [10] *Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер* Введение в Риманову геометрию — СПб: Наука, 1994. — 318 с.
- [11] *К. Д. Драч* О теореме сравнения углов для замкнутых кривых // Квалификационная работа на получение степени "Бакалавр математики— ХНУ им. В. Н. Каразина, 2011. — 41 с.
- [12] ДСанПіН 3.3.2.007-98 від 10 грудня 1998 р. N 7 "Державні санітарні правила і норми роботи з візуальними дисплейними терміналами електронно-обчислювальних машин "