

1 Лінійний простір.

1.1 Лінійна залежність та незалежність.

1. Знайти координати векторів $\vec{x} = 5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$, якщо $\vec{a} = (3, 0, -2)$, $\vec{b} = (1, 2, 5)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$, $\vec{d} = (8, 4, 1)$.
2. Вектор $\vec{a}$ має в деякому базисі координати $(x, x-1)$, $\vec{b} = (x^2 - 2x, x^2 - 2x + 1)$. При яких значеннях x вектори $\vec{a}, \vec{b}$ а) колінеарні, б) співнапрямлені?
3. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (4, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 5)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ утворюють базис у просторі. Знайти координати векторів $\vec{l} = (4, 4, -5)$, $\vec{m} = (2, 4, -10)$, $\vec{n} = (0, 3, -4)$ в цьому базисі.
4. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - три некопланарних вектора. Чи будуть компланарними вектори $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, якщо
1) $\vec{l} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$,
2) $\vec{l} = \vec{c}$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Чи є наступна система векторів лінійно залежною або лінійно незалежною:

5. $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (3, 6, 7)$.
6. $\vec{a}_1 = (2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, -1, 5)$, $\vec{a}_3 = (1, -4, 3)$.
7. $\vec{a}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\vec{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$.
8. $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $\vec{a}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.
9. Довести, що система векторів, яка містить два однакових вектора, лінійно незалежна.
10. Довести, якщо частина системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.
11. Довести, що будь-яка частина лінійно незалежної системи сама лінійно незалежна.

Знайти всі значення λ при яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

12. $\vec{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\vec{a}_3 = (1, -6, 1)$, $\vec{b} = (7, -2, \lambda)$.
13. $\vec{a}_1 = (4, 4, 3)$, $\vec{a}_2 = (7, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (4, 1, 6)$, $\vec{b} = (5, 9, \lambda)$.
14. $\vec{a}_1 = (3, 2, 6)$, $\vec{a}_2 = (7, 2, 9)$, $\vec{a}_3 = (5, 1, 3)$, $\vec{b} = (\lambda, 2, 5)$.

Задані вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в деякому базисі своїми координатами. Показати, що вони утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

15. $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{e}_3 = (1, 2, 3)$, $\vec{x} = (6, 9, 4)$.
16. $\vec{e}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\vec{e}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\vec{e}_3 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$, $\vec{x} = (7, 14, -1, 2)$.

1.2 Перетворення базису та координат.

1. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e}_1 = (1, 2)$, $\vec{e}_2 = (3, 5)$ до базису $\vec{u}_1 = (-1, 3)$, $\vec{u}_2 = (4, 6)$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, якщо його координати в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $(6, 7)$.
2. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e}_1 = (2, 4)$, $\vec{e}_2 = (1, 6)$ до базису $\vec{u}_1 = (2, -3)$, $\vec{u}_2 = (7, 2)$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, якщо його координати в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $(9, 8)$.
3. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{f}_1 = (3, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 1)$ до базису $\vec{g}_1 = (1, 2)$, $\vec{g}_2 = (-1, 1)$. Знайти координати вектора $\vec{x} = (6, 9)$ в кожному базисі.
4. Координати векторів $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, -2, -3)$, $\vec{u}_3 = (1, 3, 6)$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, якщо його координати в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $(1, 0, 2)$. Знайти координати векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в базисі $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.
5. На площині задані два базиси: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. $\vec{u}_1 = (-1, 3)$, $\vec{u}_2 = (2, -7)$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, якщо його координати в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: (a_1^1, a_2^1) .

6. $\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \vec{a}_2 = (0, 1, 2), \vec{a}_3 = (1, 0, 0), \vec{b}_1 = (1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 1, -1), \vec{b}_3 = (2, 1, 2)$. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ до базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.
7. $\vec{a}_1 = (2, 0, 3), \vec{a}_2 = (4, 1, 2), \vec{a}_3 = (3, 1, 2), \vec{b}_1 = (1, 2, -1), \vec{b}_2 = (4, 5, -2), \vec{b}_3 = (1, -1, 1)$. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ до базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.
8. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом та знайти зв'язок координат вектора $\vec{x}$ в цих двох базисах: $\vec{e}_1 = (1, 2, 1), \vec{e}_2 = (2, 3, 3), \vec{e}_3 = (3, 7, 1), \vec{u}_1 = (3, 1, 4), \vec{u}_2 = (5, 2, 1), \vec{u}_3 = (1, 1, -6)$.
9. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом та знайти зв'язок координат вектора $\vec{x}$ в цих двох базисах: $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 2, 1, 1), \vec{e}_3 = (1, 1, 2, 1), \vec{e}_4 = (1, 3, 2, 3), \vec{u}_1 = (1, 0, 3, 3), \vec{u}_2 = (-2, -3, -5, -4), \vec{u}_3 = (2, 2, 5, 4), \vec{u}_4 = (-2, -3, -4, -4)$.
10. Знайти координати точки x в системі координат $O(2, -1), \vec{e}_1 = (1, 5), \vec{e}_2 = (-1, 4)$ на площині, якщо відомі її координати в системі координат $O'(3, 2), \vec{e}_1' = (1, -1), \vec{e}_2' = (4, 2), x = (x', y')$.
11. Знайти координати точки x в системі координат $O(1, 3, 3), \vec{e}_1 = (3, 3, 1), \vec{e}_2 = (3, 5, 2), \vec{e}_3 = (1, 2, 1)$ у просторі, якщо відомі її координати $x = (x', y', z')$ в системі координат $O'(-1, 0, 2), \vec{e}_1' = (1, -2, 1), \vec{e}_2' = (4, 2, 1), \vec{e}_3' = (2, -1, 3)$.

1.3 Підпростори

1. Знайти рівняння, що визначають лінійний простір, натягнутий на вектори $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, -4), \vec{a}_2 = (2, 3, -4, 1), \vec{a}_3 = (2, -5, 8, -3), \vec{a}_4 = (5, 26, -9, -12), \vec{a}_5 = (3, -4, 1, 2)$.
2. Знайти рівняння, що визначають лінійний простір, натягнутий на вектори $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 5), \vec{a}_2 = (4, -3, 1, 3), \vec{a}_3 = (3, -2, 3, 4), \vec{a}_4 = (4, -1, 15, 17), \vec{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$.
3. Лінійний підпростір заданий, множиною розв'язків системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Зна-}$$
 йти базис лінійного підпростору
4. Лінійний підпростір заданий, множиною розв'язків системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 - 2 = 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$
 Знайти базис лінійного простору.
5. $L_1 : \vec{a}_1 = (0, 1, 1, 0), \vec{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1), L_2 : \vec{b}_1 = (1, 2, 1, 2), \vec{b}_2 = (1, 0, 1, 0), \vec{b}_3 = (0, 2, 1, 1)$. Знайти базис $L_1 + L_2$ і $L_1 \cap L_2$.
6. $L_1 : \vec{a}_1 = (1, -1, 1, -1), \vec{a}_2 = (1, 1, -1, -1), \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), L_2 : \vec{b}_1 = (2, -2, 0, 0), \vec{b}_2 = (3, -1, 1, 1), \vec{b}_3 = (1, -1, -1, 1)$. Знайти базис $L_1 + L_2$ і $L_1 \cap L_2$.
7. Знайти вимірність і базис лінійних підпросторів, що натягнуті на наступну систему векторів: $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), \vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4), \vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$.