1 Введение

Элементарной поверхностью[1] называется гомеоморфный образ открытого круга D^2 в пространство R^3. Если (u,v) декартовы прямоугольные координаты в D^2, а вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ такова что, $\vec{r}(u,v)\in C^k$ (аналитическая) и $rg\, d\vec{r}(u,v)=2$ для всех (u,v), то поверхность, задаваемая вектор-функцией $\vec{r}$ называется регулярной класса C^k (аналитической). Координаты (u,v) называются криволинейными координатами поверхности.

Если (x,y,z) - декартовы координаты в R^3, то векторное уравнение поверхности $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ эквивалентно заданию трех функций: $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$. Это параметрическое уравнение поверхности. Регулярность класса C^k (аналитичность) поверхности означает, что все три указанные функции принадлежат классу C^k(аналитические), а так же

$$rg\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}=2$$

Если в качестве параметров поверхности выбраны декартовы координаты (x,y) плоскости XoY в R^3, то поверхность задается одной функцией $z=z(x,y)$. Такое задание поверхности называется явным, а поверхность - явно заданной.

К определению поверхности можно подходить и с другой точки зрения, а именно как к геометрическому месту точек (г.м.т.) в R^3, удовлетворяющих некоторому условию. Формально это условие выражается в виде функции от координат (x,y,z), значение которой для точек рассматриваемого геометрического места постоянно: $M(x,y,z)\in$ (г.т.м.) $\Longleftrightarrow f(x,y,z)=0$. Такое задание поверхности называется неявным.

Неявно заданная поверхность называется регулярной класса C^k (аналитической), если $f\in C^k$ (аналитична) и градиент $\nabla f\neq 0$ для всех (x,y,z) из области определения f.

Локально все перечисленные способы задания регулятной поверхности эквивалентны.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться другими обозначениями для параметров: $u\longleftrightarrow u^1, v\longleftrightarrow u^2$, а также правилом суммирования по повторяющимся верхним и нижним индексам[2]

Пусть $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$ векторное уравнение поверхности. Так как $rg\, d\vec{r}=2$ для всех (u^1,u^2), то в каждой точке поверхности векторы

$$\partial_1\vec{r}=\frac{\partial}{\partial u^1}\vec{r} \quad \text{и} \quad \partial_2\vec{r}=\frac{\partial}{\partial u^2}\vec{r}$$

линейно независимы и образуют базис касательной плоскости поверхности в соответствующей точке[3]. Вектор

$$\vec{N}=\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r}$$

ортогонален касательной плоскости и называется вектором нормали.

Уравнение касательной плоскости и нормали поверхности имеет вид:

$$\left(\vec{R}-\vec{r}(u^1,u^2),\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}\right)=0;$$
$$\vec{R}(t)=\vec{r}(u^1,u^2)+t\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r}$$

Если поверхность задана неявно в виде $f(x,y,z)=c$, то поле нормалей поверхности составляет поле градиента функции f, то есть $\vec{N}=\nabla f$.

Вдоль всей поверхности тройка векторных полей $\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r},\vec{N}$ образуют переменный базис (подижный репер) в R^3. Каждый касательный к поверхности вектор $\vec{a}$ представляется в виде

[1] Рассматриваемые в курсе геометрии поверхности локально являются элементарными, что дает право исследовать только элементарные поверхности.

[2] Например, $g_{ik}b^ia^k$ означает $\sum_{i,k=1}^n g_{ik}b^ia^k$. Например n будет определяться из контекста.

[3] С геометрической точки зрения $\partial_1\vec{r}$ и $\partial_2\vec{r}$- касательные векторы к координатным линиям u^1 и u^2 соответственно

$\vec{a} = a^1\partial_1\vec{r} + a^2\partial_2\vec{r}$. Если $\vec{b} = b^1\partial_1\vec{r} + b^2\partial_2\vec{r}$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как векторов, лежащих в R^3, выразится в виде билинейной формы на касательных векторах к поверхности:

$$< \vec{a}, \vec{b} >= a^1b^1 < \partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{r} > + \left(a^1b^2 + a^2b^1\right) < \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r} > +a^2b^2 < \partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r} > .$$

При $\vec{a} = \vec{b}$ эта форма принимае вид квадратичной и называется первой квадратичной формой поверхности.

Функция $g_{ik} =< \vec{r_i}, \vec{r_k} >$ называется коэффициентом первой квадратичной формы, а матрица $G = (g_{ik})$-матрицей первой квадратичной формы поверхности.

Рассмотрим дифференциал радиуса-вектора $d\vec{r} = \partial_1\vec{r}du^1 + \partial_2\vec{r}du^2$ как бесконечно малый вектор, имеющий в подвижном базисе $\{\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}\}$ координаты $\{du^1, du^2\}$. Его длина

$$|d\vec{r}|^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

называется линейным элементом поверхности и обозначается ds^2. Выражение

$$ds^2 = g_{ik}du^idu^k$$

называют также первой квадратичной формой поверхности.

Если u^1 и u^2 является функцией некоторого параметра t, то все точки кривой

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}\left(u^1(t), u^2(t)\right)$$

лежат на рассматриваемой поверхности. Уравнения

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t)$$

называются внутренними уравнениями кривой

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}\left(u^1(t), u^2(t)\right).$$

Векторное поле

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \partial_1\vec{r}\ \frac{du^1}{dt} + \partial_2\vec{r}\ \frac{du^2}{dt}$$

составляет поле касательных кривой и имеет координаты $\left\{\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right\}$ относительно касательного базиса поверхности. Длина отрезка кривой на промежутке $[t_1, t_2]$ выразится формулой

$$l_{[t_1,t_2]} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\rho}{dt}\right|dt = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ik}\frac{du^i}{dt}\,\frac{du^k}{dt}}\,dt$$

Пусть $\gamma_1\left\{\begin{array}{c} u^1 = u^1(t) \\ u^2 = u^2(t)\end{array}\right\}$ и $\gamma_2\left\{\begin{array}{c} u^1 = v^1(\tau) \\ u^2 = v^2(\tau)\end{array}\right\}$ две кривые на поверхности, имеющие общую точку $u_0^1 = u^1(t_0) = v^1(\tau_0), u_0^2 = u^2(t_0) = v^2(\tau_0)$ Угол между этими кривыми в общей точке определяется как угол между их касательными в этой точке. В базисе $\{\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}\}$ касательные векторы рассматриваемых кривых имеют координаты соответственно:$\left\{\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right\}$ и $\left\{\frac{dv^1}{d\tau}, \frac{dv^2}{d\tau}\right\}$. Следовательно,

$$\cos(\gamma_1\hat{}\gamma_2) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}g_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{dv^k}{d\tau},$$

где $\alpha_1 = \sqrt{g_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{g_{ik}\frac{dv^i}{d\tau}\frac{dv^k}{d\tau}}$.

Площадь σ замкнутой области D на поверхности, являющейся образом замкнутой области D' относительно вектор-функции $\vec{r}$, вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{D'} \sqrt{det(g_{ik})} du^1 du^2.$$

Рассмотрим векторное поле единичных нормалей

$$\vec{n} = \frac{\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}}{|\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}|}.$$

Тогда $\{\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{n}\}$ по-прежнему образуют подвижный репер в каждой точке поверхности. Следовательно, производные этих векторов выражают снова через векторы подвижного репера [4]:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\partial_1 \vec{r} = \partial_{11}\vec{r} = \Gamma^1_{11}\partial_1 \vec{r} + \Gamma^2_{11}\partial_2 \vec{r} + b_{11}\vec{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\partial_1 \vec{r} = \frac{\partial}{\partial u^1} r_2 = \partial_{12}\vec{r} = \Gamma^1_{12}\partial_1 \vec{r} + \Gamma^2_{12}\partial_2 \vec{r} + b_{12}\vec{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\partial_2 \vec{r} = \partial_{22}\vec{r} = \Gamma^1_{22}\partial_1 \vec{r} + \Gamma^2_{22}\partial_2 \vec{r} + b_{22}\vec{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\vec{n} = \partial_1 \vec{n} = -a^1_1 \partial_1 \vec{r} - a^2_1 \vec{r}^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\vec{n} = \partial_2 \vec{n} = -a^1_2 \partial_1 \vec{r} - a^2_2 \partial_2 \vec{r},$$

Первые три формулы называются формулами Гаусса, а вторые две - формулами Вейнгартена. В соответствии с соглашением об индексах суммирования, эти формулы выписываются в следующей лаконичной форме:

$$\begin{array}{ll} \partial_{ik}\vec{r} = \Gamma^s_{ik}\partial_s \vec{r} + b_{ik}\vec{n} & \text{(формулы Гаусса)} \\ \partial_i \vec{n} = -a^s_i \partial_s \vec{r} & \text{(формулы Вейнгартена)} \end{array}$$

Коэффициенты называются символами Кристофеля второго рода. Легко видеть, что

$$< \partial_{ik}\vec{r}, \vec{r}_j >= \Gamma^s_{ik} g_{sj}$$

Функции $\Gamma_{ik,j} =< \partial_{ik}\vec{r}, \vec{r}_j >$ называются символами Кристоффеля первого рода. Таким образом $\Gamma_{ik,j} = g_{sj}\Gamma^s_{ik}$ и обратно $\Gamma^j_{ik} = g^{sj}\Gamma_{ik,s}$ где $G^{-1} = (g^{sj})$ -матрица обратная к матрице $G = (g_{ik})$

Символы Кристоффеля могут быть выражены только через коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij})$$

Матрица $A = (a^i_k)$ из разложения Вейнгартена определяет линейное преобразование в касательной плоскости поверхности.

Легко видеть, что $b_{ik} =< \partial_{ik}\vec{r}, \vec{n} >$. Так как $d^2\vec{r} = \partial_{11}\vec{r}(du^1)^2 + +2\partial_{12}\vec{r}du^1du^2 + \partial_{22}\vec{r}(du^2)^2$, то формула $< d^2\vec{r}, \vec{n} >= b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2$, с одной стороны, есть величина проекции вектора $d^2\vec{r}$ на нормаль к поверхности, а с другой - определяют квадратичную форму с матрицей $B = (b_{ik})$ на касательных векторах к поверхности. Эта форма называется второй квадратичной формой поверхности, а функции b_{ik}- коэффициентами второй квадратичной формы. Так как $< d^2\vec{r}, \vec{n} >= - < d\vec{r}, d\vec{n} >$,то из формулы Гаусса-Вейнгартена следует что $-a^i_k = -g^{is}b_{ks}$; в матричной записи это означает следующую связь:

$$A = G^{-1}B$$

[4]Ввиду единичности вектора $\vec{n}$ его производные векторы $\partial_i \vec{n}$ ортогональны, а значит лежат касательно плоскости. Знак a^i_k выбирается из нижеследующих соображений.

Пусть γ -произвольная кривая на поверхности. Тогда ее вектор кривизны[5] $k\vec{\nu}$ раскладывается по векторам подвижного репера:

$$k\vec{\nu} = k_n\vec{n} + k_g\vec{\tau},$$

где τ -единичный вектор, лежащий в касательной плоскости;

k_n -нормальная кривичэр ышэшш,

k_g -ее геодезическая кривизна.

Очевидно, что $k_n = k\cos\theta$,где θ -угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности(теорема Менье).

Можно показать, что k_n не зависит от выбора кривой на поверхности, а является функцией от касательного направления в каждой точке. Если $\vec{\tau} = \tau^1\vec{r_1} + \tau^2\vec{r}_2$ касательное направление, то

$$k_n(\vec{\tau}) = \frac{b_{ik}\tau^i\tau^k}{g_{ik}\tau^i\tau^k}.$$

Значение функционала $K_n(\vec{\tau})$ называется нормальной кривизной поверхности в направлении вектора $\vec{\tau}$. Экстремумы этого функционала называются главными кривизнами поверхности, а соответствующие направления -главными направлениями.

Главные кривизны являются собственными числами оператора Вейнгартена, а соответсвующие собственные векторы совпадают с главными направлениями.

Гауссовой K и средней H кривизной поверхности в данной точке называются произведение K_1K_2 и полусумма $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ главных кривизн поверхности в этой точке.

Таким образом, характеристическое уравнение матрицы A интерпретируется двумя способами:

$$x(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^2 - traceA\lambda + detA,$$
$$x(\lambda) = \lambda^2 - 2H\lambda + K,$$

откуда следует, что

$$K = detA = \frac{detB}{detG},$$
$$H = \frac{1}{2}traceA = \frac{1}{2}trace(G^{-1}B).$$

Гауссова кривизна может быть вычислена без привлечения коэффициентов второй квадратичной формы (Теорема Гаусса):

$$K = \frac{R_{1212}}{detG},$$

где R_{1212} компонента (единственная для двумерных поверхностей) тензора кривизны поверхности, которая выражается формулой

$$R_{1212} = \frac{\partial\Gamma_{22,1}}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma_{12,1}}{\partial u^2} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}.$$

Поверхности, для которых $H \equiv 0$,называются минимальными. Если $k_1k_2 > 0$, -точка на поверхности называется эллиптической, если $k_1k_2 < 0$, -гиперболической, если $k_1k_2 = 0$;, -параболической, если $k_1 = k_2$, -омбилической.

Линия на поверхности называется линией кривизны, если в каждой своей точке она касается главного направления. Дифференциальное уравнение линий кривизны имеет вид

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

[5]k -кривизна кривой γ как кривой в R^3, а $\vec{\nu}$ - ее вектор главной нормали.

Направления $\vec{p} = \{p^1, p^2\}$ и $\vec{q} = \{q^1, q^2\}$ в касательной плоскости поверхности называются сопряженными, если они сопряжены относительно второй квадратичной формы

$$b_{ik} p^i q^k = 0.$$

В окрестности не омбилической точки линии кривизны можно принять в качестве координатных. В полученной ортогональной системе координат матриц G и B одновременно принимают диагональный вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

где k_1 и k_2 главные кривизны. Выражение нормальной кривизны принимает вид:

$$k_n(\vec{\tau}) = \frac{k_1 (\tau^1)^2 + k_2 (\tau^2)^2}{(\tau^1)^2 + (\tau^2)^2} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin \varphi \qquad \text{(Формула Эйлера)}$$

а формулы Вейнгартена преобразуются к виду:

$$\vec{n}_1 = -k_1 \vec{r}_1, \qquad \vec{n}_2 = -k_2 \vec{r}_2 \qquad \text{(формулы Родрига)}$$

Самосопряженные направления называются асимптотическими. Линия на поверхности называется асимптотической, если в каждой своей точке она касается асимптотического направления. Дифференциальное уравнение асимптотических линий, очевидно, имеет вид

$$b_{ik}\, du^i\, du^k = 0$$

Последнее уравнение означает, что касательная кривизна асимптотической линии в каждой точке равна нулю, а следовательно, ее вектор кривизны лежит в касательной плоскости поверхности.

Линия на поверхности называется геодезической, а если в каждой точке ее геодезическая кривизна $k_g = 0$. Это означает, что ее вектор кривизны направлен по нормалии к поверхности, а ее нормальная кривизна с точностью до знака равна кривизне линии.

Геодезические линии являются кратчайшими между двумя достаточно близкими точками поверхности. Геодезические линии, параметризированные натуральным параметром S, являются решениями (нелинейной) системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

2 Способы задания поверхностей

1. Для того чтобы в каждой точке некоторой области изменения параметров u и v вектор $\vec{r}(u, v)$ был ортоганален векторам $\partial_u \vec{r}$ и $\partial_v \vec{r}$, необходимо и достаточно, чтобы $|\vec{r}(u, v)| = const$. Докажите.

2. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ - вектор-функция класса C^1. Для того чтобы вектор $\vec{r}(u, v)$имел постоянное направление,необходимо и достаточно,чтобы в области изменения параметров u и v вектор $\vec{r}(u, v)$ был коллинеарен вектору $\partial_u \vec{r}$ и вектору $\partial_v \vec{r}$. Докажите.

3. Для того чтобы образ гладкой вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, удовлетворяющей условию $\partial_u \vec{r} \nparallel \partial_v \vec{r}$, принадлежал некоторой плоскости,необходимо и достаточно,чтобы векторы $\partial_u \vec{r}$ и $\partial_v \vec{r}$ были параллельны этой плоскости. Докажите.

4. В плоскости xOz задана линия $x = f(u), z = g(u)$,не пересекающая осьOz. Найдите параметризацию поверхности при вращении этой линии вокруг оси Oz.

5. Напишите уровнение катиноида,который получается при вращение цепной линии $x = a\operatorname{ch}(\frac{u}{a}), y = 0, z = u$вокруг оси Oz.

6. Напишите уравнение псевдосферы,которая получается при иращении трактрисы $x = a\sin u, y = 0, z = a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}) + \cos u)$вокруг оси$Oz$

7. Напишите уравнение цилиндрической поверхности,для которой линия $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору $\vec{e}$.

8. Напишите параметрические уравнения цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, а направляющая задана уравнениями $x = u, y = u^2, z = u^3$.

9. Напишите неявное уравнение цилиндрической поверхности с направляющей линией $x = \cos u, y = \sin u, z = 0$ и прямолинейными образующими,параллельными вектору $\vec{a} = \{-1, 3, -2\}$.

10. Дана поверхность

$$x = 3u + v^2 + 1, y = 2u + v^2 - 1, z = -u + 2v :$$

    (a) покажите, что эта поверхность цилиндрическая;
    (b) напишите уравнение какой-нибудь ее направляющей линии;
    (c) найдите прямолинейную образующую, проходящую через точку M(u=2, v=3).

11. Задана точка M(a,b,c) и линия L.

$$x = f(u),\ y = \varphi(u),\ z = \psi(u).$$

    Напишите в параметрическом и неявном виде уравнения конуса с вершиной в M и с направляющей линией L.

12. Составте уравнение конуса, образуемого прямыми,рпоходящими через точку M(a,b,c) и пересекающими параболу

$$y^2 = 2px\ ,\ z = 0.$$

13. Составте уравнение конуса, имеющего вершину в точке M(-1,0,0) и описанного около параболоида $2y^2 + z^2 = 4x$.

14. Напишите параметричесие уравнения фигуры, образованной касательными к данной линии $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$.

15. Окружность радиуса а перемещается так, что ее центр движется по заданной линии $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, а плоскость, в которой она расположена, является в каждый момент нормальной плоскостью этой линии.Составте уравнение фигуры,описываемой окружностью (поверхность такого вида называется трубчатой).

16. Поверхность, допускающая параметризацию вида $\vec{r} = \vec{r}_1(u) + \vec{r}_2(v)$, где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$- гладкие вектор-функции, называется поверхностью переноса. Покажите, что поверхность переноса может быть получена поступательным перемещением некоторой линии.

17. Покажите, что элиптический и гиперболический параболоиды являются поверхностями переноса.

18. Линейчатой называется поверхность, задаваемая параметрическим уравнением

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u),$$

где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ - вектор-функция, задающая некоторую кривую, $\vec{a} = \vec{a}(u)$ - вектор-функция, задающая распределение прямолинейных образующих линейчатой поверхности. Составьте уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости $y - z = 0$ и пересекают параболы $y^2 = 2px$, $z = 0$ и $z^2 = -2px$, $y = 0$.

19. Составте уравнение линейчатой поверхности, образованной прямыми, пересекающими кривую $\vec{\rho} = \{u, u^2, u^3\}$, параллельными плоскости xOy и пересекающими ось Oz.

3 Касательная плоскость, нормаль к поверхности

1. На поверхности $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$ дана точка $M(u = 1, v = \pi/2$:
   (a) напишите уравнения касательных прямых и нормаьных плоскостей к линиям $u = 1$, $v = \pi/2$ в точке M;
   (b) покажите, что касательная в точке M к линии $u = \sin v$ является касательной к линии $u = 1$ в этой же точке.

2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точке $M(u = 2, v = 1)$.

3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M(1, 3, 4)$ поверхности $x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2v$.

4. Составте уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av.$$

Исследуйте поведение нормали при смещении её вдоль координатных линий.

5. Покажите, что касательная плоскость в произвольной точке поверхности $f(x-az, y-bz)$ параллельна фиксированному направлению.

6. Докажите, что касательная плоскость к трубчатой поверхности (см. задачу 15) параллельна фиксированному направлению.

7. Покажите, что касательные плоскости поверхности

$$z = x\varphi(y/x)$$

проходят через начало координат.

8. Пусть поверхность есть часть фигуры, образованной касательными к линии $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Напишите уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности.Исследуйте её поведение при смещении точки касания вдоль прямолинейных образующих поверхности.

9. Покажите, что касательная плоскость, проведённая в любой точке линии $v = c$ на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = f(v) + au$, проходит через фиксированную прямую.

10. Поверхность образована касательными и кривой L. Докажите, что эта поверхность во всех точках одной и той же касательной к кривой L имеет одну и туже каса тельнйю плоскость.

11. Поверхность образована главными нормалями кривой L. Составте уравнение касательной плоскости плоскости и нормали в роизвольной точке поверхности.

12. Составте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, образованой бинормалями кривой L.

13. Докажите, что нормаль поверхности вращения совпадает с главной нормалью меридиана и пересекает ось вращения.

14. Докажите, что если все нормали нормали поверхности пересекают одну и ту же прямую, то то поверхность будет поверхностью вращения.

15. Линейчатая поверхность (см. определение в задаче 18) называеться развёртывающейся , если во всех точках произвольной образующей касательная плоскость к поверхности одна и та же.

    Докажите, что линейчатая поверхность
$$\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$$
    являеться развёртывающейся тогда и только тогда, когда $(\rho', \alpha, a') = 0$.

16. Докажите, что любая развертывающаяся поверхность может быть разбита на следующие части: 1)часть плоскости; 2)часть цилиндра; 3)часть конуса; 4)часть фигуры, образованой касательными к некоторой неплоской кривой.

17. Найдите поверхность, зная, что все её нормали пересекаються в одной точке.

4 Огибающая семейства поверхностей

1. Найдите огибающую семейства поверхностей:
$$x^2 + y^2 + (z + C)^2 - 1 = 0.$$

2. Найдите огибающую семейства поверхностей:
$$x + C^2 y + z - 2C = 0.$$

3. Найдите ребро возврата огибающей семейства поверхностей:
$$x \sin\alpha - y \cos\alpha + z = b\alpha.$$
   где $b = const, \alpha-$параметр.

4. Найдите огибающую семейства сфер постоянного радиуса, центры которых расположены на данной линии $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ (трубчатая поверхность).

5. Найдите огибающую нормальных плоскостей пространственной линии, её характеристики и ребро возврата.

6. Найдите огибающую спрямляющих плоскостей пространственной линии,её характеристики и ребро возврата.

7. Найдите огибающую и ребро возврата семейства плоскостей
$$x\alpha^2 + y\alpha + z = 0$$
   где $\alpha-$параметр семейства.

8. Найдите характеристики, огибающую и ребро возврата семейства плоскостей
$$< \vec{r}, \vec{n} > +D = 0, \vec{n} = \vec{n}(u), D = D(u), |\vec{n}| = 1.$$
   $u-$параметр семейства.

5 I-я и II-я фундаментальные формы. Гауссова кривизна.

1. Найдите I квадратичную форму поверхности вращения 2 порядка.

2. Найдите первую квадратичную форму прямого геликоида

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$$

3. Вычислите первую квадратичную форму следующих поверхностей:

   (a) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}, \quad \vec{e} = const;$

   (b) $\vec{r} = v\vec{\rho}(s);$

   (c) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{e}(s), |\vec{e}(s)| = 1;$

   (d) $\vec{r} = \rho(s) + \vec{\nu}(s)\cos\varphi + \beta(s)\sin\varphi;$

   (e) $\vec{r} = (a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v;$

   (f) $\vec{r} = \{v\cos u, v\sin u, ku\};$

   (g) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\nu}(s);$

   (h) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda\vec{\beta}(s).$

4. Покажите, что при соответствующем выборе криволинейных координат вращения на поверхности вращения её первая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2.$$

5. Найдите уравнения линий, пересекающих меридианы поверхности вращения под постоянным углом α (локсодромы). Найдите уравнение локсодром на сфере.

6. Если семейство линий на поверхности задано дифференциальным уравнением $A(u, v)du + B(u, v)dv = 0$, то уравнение ортогональных траекторий, т.е линий, пересекающих заданные линии под прямым углом, имеет вид

$$(BE - AF)du + (BF - AG)dv = 0.$$

   Докажите. Найдите ортогональные траектории прямолинейных образующих конуса.

7. Составте дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства лиеий $\varphi(u, v) = const$ на поверхности.

   (a) Найдите ортогональные траектории семейства линий $u + v = const$, лежащих на сфере $x = R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u;$

   (b) найдите ортогональные траектории семейства линий $u = Ce^v$, лежащих на косом геликоиде $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v;$

   (c) на круговом конусе $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u$ рассматривается семейство линий $v = u^2 + \alpha$, где α - параметр. Найдите семейство их ортогональных траекторий.

8. (a) Выведите условие ортогональности двух семейств линий на поверхности, определяемых дифференциальным уравнением

$$P(u, v)du^2 + Q(u, v)dudv + R(u, v)dv^2 = 0.$$

   (b) Докажите, что на прямом геликоиде

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$$

   дифференциальное уравнение $du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$ задает ортогональную сеть.

9. (a) Докажите, что линии, которые в каждой своей точке делят пополам углы между координатными линиями, задаются дифференциальным уравненеием

$$\sqrt{E}du \pm \sqrt{G}dv = 0.$$

   (b) Найдите уравнения линий на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$, делящих пополам углы между координатными линиями.

   (c) Найдите уравнения линий на сфере $x = a\cos u\sin v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\cos v$, делящих углы между параллелями и меридианами пополам.

10. Найдите периметр ивнутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm av^2/2,\ v = 1$, расположенного на поверхности, у которой

$$ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$$

11. Найдите угол межлу линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$.

12. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$, ограниченного линиями $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$.

13. Найдите II квадратичные формы поверхностей вращения 2-го порядка.

14. Поверхность s является частью фигуры, состоящей из касательных к пространственной линии. Найдите главные кривизны поверхности s.

15. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$. Докажите, что главные направления прямого геликоида делят пополам углы между направлениями образующей и винтовой линии.

16. Покажите, что в любой точке поверхности $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \lambda u$ одно из главных нормальных сечений есть прямая.

17. На поверхности $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = av$ дана точка P(u=1,v=1) :

   (a) вычислите главные кривизны поверхности в точке P;

   (b) найдите уравнения касательных PT_1, PT_2 к главным нормальным сечениям в указанной точке;

   (c) вычислите кривизну нормального сечения в точке P, проходящего через касательную к линии $v = u^2$.

18. (a) Найдите выражение полной кривизны поверхности, отнесенной к полугеодезическим координатам, т.е к таким, в которых первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2.$$

   (b) Найдите полную кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^2 u dv^2.$$

19. Покажите, что если первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2.$$

то ее Гауссова кривизна вычисляется по формуле $K = \frac{\partial^2_{uv}\omega}{\sin\omega}$.

20. Поверхность S есть часть фигуры, образованной главными нормалями (бинормалями) пространственной линии. Найдите полную кривизну поверхности S.

21. Покажите, что все точки поверхности $x + y = z^3$ параболические.

22. Покажите, что точки округления поверхности

$$x = \frac{u^2}{2} + v, \; y = u + \frac{v^2}{2}, \; z = uv$$

находятся на линиях $u = v$, $u + v + 1 = 0$.

23. Докажите, что точки округления характеризуются равенством

$$H^2 = K.$$

24. Дана кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ с натуральным параметром u, кривизной $k = k(u)$ и кручением $\varkappa = \varkappa(u) \neq 0$. Пусть $\vec{\tau} = \vec{\tau}(u)$ - орт касательной к этой кривой. Для поверхности касательных

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{\tau}(u), v > 0.$$

Найдите: $\quad a)K; \quad b)H,$

25. Вычислите Гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\vec{r} = \{3u + 3uv^2 - u^3, \;\; v^3 - 3v - 3u^2v, \;\; 3(u^2 - v^2)\}.$$

26. Найдите полную и среднюю кривизны поверхности, образованной бинормалями данной кривой.

27. Найдите полную и среднюю кривизны поверхности, образованной главными нормалями данной кривой.

28. Пусть S - некоторая данная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности S в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность S^*, "параллельную"поверхности S. Если уравнение поверхности S есть $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, то уравнение S^*,

$$\vec{\rho} = \vec{r}(u,v) + a\vec{n}(u,v),$$

где $\vec{n}$- единичный вектор нормали к S. Выразите коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S^* через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S.

29. Выразите полную кривизну K^* поверхности S^*,"параллельной"поверхности S, через полную и среднюю кривизны поверхности S.

30. Выразите среднюю кривизну H^* поверхности S^*, "параллельной"поверхности S, через полную и среднюю кривизны поверхности S.

31. Плоская кривая γ задана уравнением $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, где s - натуральный параметр, $k(s)$ – ее кривизна ($0 < k < \frac{1}{a}$), $\vec{\nu}$ – орт главной нормали к γ, $\vec{\beta}$ – орт нормали к плоскости кривой γ. Найдите Гауссову, среднюю кривизну и линии кривизны поверхности, заданной уравнением $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + a\vec{v}(u)\cos\varphi + a\vec{\beta}\sin\varphi$.

6 Специальные семейства линий на поверхности.

1. Найдите условие сопряженности двух семейств линий на поверхности, определяемых дифференциальным уравнением
$$P(u,v)du^2 + Q(u,v)dudv + R(u,v)dv^2 = 0;$$

2. Линии $v^2du^2 - u^2dv^2 = 0$, лежащие на геликоиде $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, образуют сопряженную сеть. Докажите.

3. Однопараметрическое семейство линий на поверхности задано дифференциальным уравнением
$$A(u,v)du + B(u,v)dv = 0.$$
Найдите дифференциальное уравнение семейства линий, сопряженных с данными.

4. Составьте дифференциальное уравнение семейства линий на поверхности, образующих сопряженную сеть с семейством линий
$$\varphi(u,v) = const,$$

5. Найдите линии, сопряженные с семейством линий $u + v = C$ на косом геликоиде $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u + v$.

6. Найдите ассимптотические линии катеноида $x = \cosh u \cos v$, $y = \cosh u \sin v$, $z = u$.

7. Если в некоторой точке поверхности средняя кривизна равна нулю, то асимптотические направления взаимно перпендикулярны.Докажите.

8. Докажите, что линия l поверхности и ее сферическое отображение l' имеют в соответствующих точках перпендикулярные касательные тогда и только тогда, когда l есть асимптотическая линия.

9. Докажите, что для асимптотической линии на поверхности $\varkappa^2 = -K$, где $\varkappa$ – кручение линии, K – Гауссова кривизна поверхности в точках линии.

10. Найдите кручение асимптотических линий на поверхности, образованной бинормалямиданной кривой.

11. Найдите кручение асимптотических линий на поверхности, образованной главными нормалями данной кривой.

12. Докажите, что нормальная кривизна ортогональной траектории асимптотических линий равна средней кривизне поверхности.

13. Найдите линии кривизны следующих поверхностей:
    (a) произвольной цилиндрической;
    (b) произвольной конической;
    (c) произвольной поверхности вращения;
    (d) поверхности $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = v$.

14. Покажите, что координатные линии поверхности
$$x = 3u - u^3 + 3uv^2,\ y = v^3 - 3u^2v - 3v,\ z = 3(u^2 - v^2)$$
являются линиями кривизны.

15. Докажите, что в области гиперболических точек поверхности линии кривизны в каждой точке делят пополам углы между асимптотическими линиями.

16. Покажите, что линиям кривизны поверхности S на эквидистантной ей поверхности также соответствуют линии кривизны.

17. Докажите, что линия кривизны – плоская, если соприкосающаяся плоскость ее образует постоянный угол с касательной плоскостью поверхности.

18. Докажите, что всякая прямая на поверхности является геодезической линией.

19. Докажите, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

20. Докажите, что геодезическая линия является ассимптотической тогда и только тогда, когда она прямая.

21. Докажите, что геодезическая линия является линией кривизны тогда и только тогда, когда она плоская.

22. Известно,что поверхность

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2$$

имеет первичную квадратичную форму $ds^2 = du^2 + b^2(u, v)\, dv^2$. Найдите площадь σ^* сферического образа этой поверхности.

7 Разные задачи

1. Пусть на сфере радиуса R_0 дан треугольник T, площадь которого σ а стороны являються дугами больших окружностей. Найдите сумму внутренних углов треугольника T .

2. Пусть T -треугольник, стороны которого геодезические линии, построенные на поверхности с постоянной гауссовой кривизной $K < -a^2 < 0$, Зная площадь Σ трейгольника T, найдите сумму его внутренних углов.

3. Поверхность S получена в результате некоторого изгибания части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, определяемой неравенствами $x > 0, y > 0, z > 0$, Найдите площадь сферического образа поверхности S.

4. Поверхность S задана вектор-функцией вида $\vec{r} = \vec{r}(U, V)$, принадлежащей классу C^2, Проверте, что величина $d\vec{n}^2 =< d\vec{n}, d\vec{n} >$, где $\vec{n}$-орт нормали к поверхности S, представдяет собой квадратичную форму относительно дифференциалов du, dv (так называемоя третья квадратичная форма поверхности S). Выразите $d\vec{n}^2$ через первую и вторую квадратичные формы поверхности S.

5. Докажите, что на минимальной поверхности сумма квадратов кривизны и кручения геодезической линии равна $-k$.

6. Докажите, что плоскость и катеноид являються единичными минимальными поверхностями вращения.

7. Докажите, что среди линейчатых поверхностей минимальными являються плоскость и прямой геликоид.

8. Докажите, что для средней кривизны поверхности имеет место формула

$$H = \lim_{a\to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\sigma} \quad ,$$

где $d\sigma$ и $d\sigma^*$-соответствующие элементы площади эквидистантных поверхностей S и S^* .

9. Докажите, что гауссова кривизна метрики $ds^2 = f(u,v)(du^2 + dv^2)$ может быть представлена в виде

$$K = -\frac{1}{2f}\Delta \ln f$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ -оператор Лапласа.

10. В касательной плоскости в точке M поверхности проведено n прямых, образующих между собой равные углы π/n.Покажите, что

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}\right) = H \quad ,$$

где $1/r_i$-нормальные кривизны линий на поверхности, касающихся данных прямых.

11. Через вершину М элипсоида вращения проводятся по нему всевозможные линии.Найдите фигуру, состоящую из центров кривизны этих линий в точке М.

12. Докажыте, что линия l поверхности и ее сферическое отображение l' имеют в соответствующих точках перпендикулярные касательные тогда и только тогда, когда l есть асимптотическая линия.

13. Докажите, что на поверхности вращения вдоль любой геодезической линии выполняется соотношение

$$\rho \cos\mu = c \quad ,$$

где ρ-расстояние точки геодезической от оси вращения, μ-угол между геодезической и параллелью,c-постоянное для данной геодезической число (теорема Клеро).

14. Верна ли обратная теорема,т.е. следует ли из выполнения указанного соотношения вдоль некоторой линии на поверхности вращения утверждение о том, что эта линия геодезическая?

15. Пусть S поверхность образована касательными прямыми к данной кривой с кривизной k. Докажите, что если кривая изгибается с сохранением S, то и поверхность S сохраняет метрику.

16. Пусть P – эллиптическая точка на поверхности. Обозначим через V объем, заключенный между касательной поверхности в точке P и параллельной ей секущей, проведенной на расстоянии h от касательной. Докажите, что для Гауссовой кривизны поверхности имеет место предельное равенство

$$K(P) = \lim_{h\to +0} (\pi h^2/V)^2,$$

17. Пусть P – эллиптическая точка на поверхности. Обозначим через Σ площадь части поверхности, заключенной между касательной поверхности в точке P и параллельной ей секущей, проведенной на расстоянии h от касательной. Докажите, что для Гауссовой кривизны поверхности имеет место предельное равенство

$$K(P) = \lim_{h\to +0} (2\pi h/\Sigma)^2.$$

18. Пусть γ-замкнутая геодезическая линия без самопересечений на замкнутой выпуклой поверхности S. Докажите, что сферический образ кривой γ делит гауссову сферу на две равновеликие части.

8 Ответы, указания, решения

3. Указание: рассмотреть функцию $f(u,\vartheta) = \left\langle \vec{r}(u,\vartheta) - \vec{r}_0, \vec{n} \right\rangle$ и показать, что $f(u,\vartheta) = const$.

4. $x = f(u)\cos\vartheta,\ y = f(u)\sin\vartheta,\ z = g(u)$.

5. $x = a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos\vartheta,\ y = a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin\vartheta,\ z = u$.

6. $x = a\sin u\cos\vartheta, y = a\sin u\sin\vartheta, z = a(\ln\tan\frac{u}{2} + \cos u)$

7. $\vec{r} = \vec{\rho}(u) + \vartheta\vec{l}$,

8. $x = u + \vartheta,\ y = u^2 + 2\vartheta,\ z = u^3 + 3\vartheta$.

9. $(x - z/2)^2 + (y + \frac{3}{2}z)^2 = 1$.

10. б) Например, $x = \vartheta^2 + 1, y = \vartheta^2 - 1, z = 2\vartheta$,
    в) $-\frac{x-16}{3} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

11. $x - a = \vartheta(f(u) - a), y - b = \vartheta(\varphi(u) - b), z - c = \vartheta(\psi(u) - c)$

    Исключая u и ϑ, найдем неявное уравнение.

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

12. $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)$,

13. $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$

14. $\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{\rho}\,'(u)$

15. $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + a\left(\frac{\ddot{\vec{\rho}}}{|\ddot{\vec{\rho}}|}\cos\alpha + \frac{\dot{\vec{\rho}}\times\ddot{\vec{\rho}}}{|\dot{\vec{\rho}}\times\ddot{\vec{\rho}}|}\sin\alpha\right)$, где α -угол между главной нормалью линии и радиусом окружности, идущим в произвольную точку поверхности трубки.

18. Параметрическое:

$$\vec{r} = \left\{\frac{u^2}{2p}, u, o\right\} + v\left\{\frac{u^2}{p}, u, u\right\} = \left\{\frac{u^2}{2p}(1 + 2u), (1 + v)u, uv\right\}$$

    Неявное: $y^2 - z^2 = 2px$.

19. $\vec{r} = uv, u^2v, u^3$

20. (a) Касательные прямые:

$$y = 0, z = \lambda \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{\lambda};$$

    (b) Нормальные плоскости:

$$x - 1 = 0, (x - 1) + y + \lambda(z - \lambda) = 0.$$

21. $3x - y - 2z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$

22. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$, $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$

23. $xa \sin v - ya \cos v + zu - auv = 0$

$$\frac{x - u\cos v}{a \sin v} = \frac{y - u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z - av}{u}.$$

27. $(\vec{R} - \vec{r}(s), \dot{\vec{r}}(s), \ddot{\vec{r}}(s)) = 0$. Касательная плоскость неизменна вдоль образующей $s = s_0$

28. Все плоскости проходят через прямую

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, ax \cos c + ay \sin c - z + f(c) = 0.$$

29. Касательная плоскость: $< (\vec{R} - \vec{\rho} - \lambda\vec{\nu}), (\vec{\beta} - \lambda k \vec{\beta} - \lambda \varkappa \vec{\tau}) >= 0$. Нормаль: $\vec{R} = \vec{\rho} + \lambda\vec{\nu} + \xi(\vec{\beta} - \lambda\varkappa\vec{\tau})$.

30. Касательная плоскость: $< (\vec{R} - \vec{\rho} - \lambda\vec{\beta}), (\vec{\nu} + \lambda\varkappa\vec{\tau}) >= 0$. Нормаль: $\vec{R} = \vec{\rho} + \lambda\vec{\beta} + \xi(\vec{\nu} + \lambda\varkappa\vec{\tau}) = 0$.

33. Указание. Пусть $\vec{a}$ направляющий вектор указанной прямой, $\vec{r}$-радиус-вектор поверхности. Покажите,что $< \vec{r}, \vec{r}_u >< \vec{a}, \vec{r}_v > - < \vec{r}, \vec{r}_v >< \vec{a}, \vec{r}_u >= 0$ и принять вектор $\vec{a}$ за направление оси O_z системы координат.

36. Сфера или ее часть.

37. $x^2 + y^2 = 1$ круговой цилиндр.

38. $xy + yz = 1$ гиперболический цилиндр.

39. Винтовая линия $x = b\cos\alpha, y = b\sin\alpha, z = b\alpha$.

40. Указание: уравнение семейства $(\vec{R} - \vec{\rho}(s))^2 = (\vec{a})^2$, Уравнение дискриминанты $\vec{R} = \vec{\rho} + a(\vec{\beta}\cos\alpha + \vec{\nu}\sin\alpha)$

41. Дискриминанта задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \langle \vec{R} - \vec{r}(s), \tau(s) \rangle = 0, \\ \langle \vec{R} - r(s), \nu(s) \rangle k(s) - 1 = 0. \end{cases}$$

Характеристики параллельны бинормалям и проходят через центры кривизны линии. Ребро возврата $\vec{R} = \vec{r} + \frac{1}{k}\vec{\nu} + \frac{1}{k\varkappa}\vec{\beta}$.

42. Дискриминанта задается системой уравнений:

$$\langle \vec{R} - r(s), \nu(s) \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{R} - r(s), \varkappa\vec{\beta}(s) - k\tau(s) \rangle = 0.$$

Характеристики направлены по векторам Дарбу. Ребро возврата

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{k\varkappa}{k\varkappa' - k'\varkappa}\vec{\tau} + \frac{k^2}{k\varkappa' - k'\varkappa}\vec{\beta}.$$

43. Огибающая: $y^2 = 4xz$,ребро возврата- точка (начало координат).

44. Огибающая: $\vec{r} = -D\vec{n} - \frac{D'\vec{n}'}{|\vec{n}'|} + \lambda\vec{n}\times\vec{n}'$,характеристики-прямые $u = const$, ребро возврата: $\vec{r} = \frac{D\vec{n}'*\vec{n}''*D'\vec{n}''*D''\vec{n}*\vec{n}'}{(\vec{n},\vec{n}',\vec{n}'')}$

45. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2$

46. $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$

47. (a) $ds^2 + 2 < \vec{\tau}, \vec{e} > ds\,d\alpha + d\alpha^2$
   (b) $v^2\,ds^2 + 2v < \vec{\tau}, \vec{\rho} > ds\,dv + \vec{\rho}^2\,dv^2$
   (c) $(\vec{\tau} + \lambda\,\vec{e}'_s)^2\,ds^2 + 2 < \vec{e}, \vec{\tau} > ds\,d\lambda + d\lambda^2$
   (d) $\{(1 - r\cos\varphi)^2 + \varkappa^2\}ds^2 + 2\varkappa ds\,d\varphi + d\varphi^2$
   (e) $(a + b\cos v)^2du^2 + b^2dv^2$
   (f) $(v^2 + k^2)du^2 + dv^2$
   (g) $\{(1 - \lambda k)^2 + \varkappa^2\lambda^2\}ds^2 + d\lambda^2$
   (h) $(1 + \lambda^2\varkappa^2)ds^2 + d\lambda^2$

49. Уравнение локсодром: $v\,ctg\alpha = \pm\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}$, где G(u) выбрано, как в зедаче h.
На сфере: $v\,ctg = \pm\ln tg(\pi/4 + \frac{u}{2k})$.

50. Записывая уравнение конуса в виде $\vec{r} = v\cdot\vec{e}(u)$,
$|\vec{e}(u)| = 1$, получаем:
$$tg\alpha\cdot\ln v = \int|e^{-1}(u)|du,$$

51. $(E\varphi_v - F\varphi_u)du + (F\varphi_v - G\varphi_u)dv = 0.$
   (a) $v - \operatorname{tg}u = const$
   (b) $u^2 + u + 1 = C_1e^{-v},\quad C_1 = const$
   (c) $v = \frac{1}{u^2} + \lambda$

52. (a) $ER + FQ + GP = 0$

53. (b) $\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = const.$
   (c) $u \pm \ln tg\frac{v}{2} = const.$

54. $p = \frac{10}{3}a, \cos\alpha = 1, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$

55. $\cos\alpha = 2/3.$

56. $S = \frac{a^2}{2}[\sqrt{2} + \ln(1 = \sqrt{2})].$

58. Если уравнение поверхности записать в виде
$\vec{r} = \vec{p}(s) + t\vec{\tau}(s)$, то $k_1 = 0,\ k_2 = \varkappa/vk$, где k и
$\varkappa$-кривизна и кручение кривой $\vec{\rho}(s)$.

59. $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}, \frac{du}{dv} = \pm\sqrt{u^2 = a^2}.$

61. (a) $k_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$,
   (b) $x - 2 = 0, z - 1 = 0, \frac{x-2}{y} = \frac{z-1}{2}, y = 0,$
   (c) $k_n = \frac{2}{49\sqrt{5}}$

62. (a) $k = -(\sqrt{G})_{uu}/\sqrt{G}$,
    (b) $k = -1$.

64. Кривизна поверхности главных нормалей

$$K = -\frac{\varkappa^2}{[(1 - vk)^2 + v\varkappa^2]^2}.$$

Кривизна поверхностей бинормалей

$$K = -\frac{\varkappa^2}{[1 + v^2\varkappa^2]^2},$$

где k и $\varkappa$ кривизна и кручение исходной кривой.

68. (a) $K = 0$,
    (b) $H = \dfrac{\varkappa}{2kv}$.

69. $K = -\dfrac{4}{9(u^2 + v^2 + 1)^4}, \quad H = 0$

70. $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + u\vec{\beta}(s), \quad K = -\dfrac{\varkappa^2}{(1 + u^2 * \varkappa^2)^2}, \quad H = \dfrac{k + k\varkappa^2 u^2 - u\varkappa'}{(1 + u^2\varkappa^2)^{3/2}}$

71. $K = -\dfrac{\varkappa^2}{[(1 - ku)^2 + u^2\varkappa^2]^2}, \quad H = \dfrac{u^2(k'\varkappa - k\varkappa') = u\varkappa'}{2[(1 - ku^2)^2 + u^2\varkappa^2]^{3/2}}$

72. (a) $E^* = (E - 2aL + a^2(2HL - EK))$,
    (b) $F^* = ((1 - a^2K)F + 2a(aH - 1)M)$,
    (c) $G^* = ((1 - a^2K)G + 2a(aH - 1)N)$,
    (d) $L^* = (aEK + (1 - 2aH)L)$,
    (e) $M^* = (M - a(2MH - FK))$,
    (f) $N^* = (N - a(2NH - GK))$,

где E, F, G, L, M, N - коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S; K, H - гауссова и средняя кривизны поверхности S.

73. $K^* = \dfrac{K}{1 - 2aH + a^2K}$

74. $H^* = \dfrac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K}$

75. 1)$K = -\dfrac{k\cos\varphi}{a(1 - ak\cos\varphi}$ 2) $H = -(1 - ak\cos\varphi)^2$ 3) $u = const, \varphi = const$.

76. (a) $LR - MQ + NF = 0$.

77. $$(LB - MA)du + (MB - NA)dv = 0,$$
$$(L\varphi_v - M\varphi_u)du + (M\varphi_v - N\varphi_u)dv = 0,$$
$$v = \operatorname{arctg} u + C.$$

78. $u \pm v = const$.

81. Указание.На асимптотичиской линии $\vec{\beta} = \pm\vec{n}$. Выбрать на поверхности координатную ось из линий кривизны и воспользоваться формулами Родрига.

82. $\dfrac{\varkappa}{1+u^2\varkappa^2}$.

83. $\dfrac{\varkappa}{(1-ku)^2+u^2\varkappa^2}$.

85. a) Прямолинейные образуюшие и их ортогональные траектории,которые являются плоскими сечениями;

    b) прямолинейные образуюшие и линии пересечения сфер произвольного радиуса с центром в вершине конической поверхности с конической поверхностью;

    c) параллели и мередианы;

    d) координатные линии.

94. $\sigma^* = \int\limits_{v_1}^{v_2} dv \int\limits_{u_1}^{u_2} |B_{uv}(u,v)|\, du$

96. $\pi + \sigma/R_0^2$.

97. $\pi - a^2\sigma$.

98. $\sigma^* = \frac{\pi}{2}$.

99. $d\vec{n}^2 = 2H < \vec{n}, d^2\vec{r} > -Kds^2$.

100. Указание. Пусть $\vec{n}$ -единичный вектор нормали к поверхности. Доказать,что вдоль любой кривой на поверхности

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)^2 = 2H \cdot II - K \cdot I,$$

где I и II – первая и вторая квадратичные формы, H и K -средняя и гауссова кривизны. Далее воспользоваться тем фактом, что вдоль геодезичесой $\vec{n} = \vec{\nu}$ и воспользоваться формулами Френе.

103. Указание. Ввести на поверхности S координатную сеть из линий кривизны и воспользоваться формулами Родрига.

104. Указание. Воспользоваться формулой Гаусса-Бонне.

105. Указание. Записать формулу Эйлера в виде:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{R_1+R_2}{2R_1\,R_2} - \frac{R_1-R_2}{2R_1\,R_2}\cos 2\,(\varphi + \frac{i-1}{n}\pi)$$

где $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ -главные кривизны $(i = 1, \ldots, n)$.

106. Сфера.

108. Указание.Проверить,что ρ cos $\mu = (\vec{e}, \vec{r}, \vec{\tau})$,где $\vec{e}$ - орт оси вращения, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки на геодезической, $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор геодезической.

Список литературы

[1] Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т., Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.- 184 с.

[2] Новиков С.П., Мищенко А.С., и др. Задачи по геометрии. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 164 с.

[3] Феденко А.С., и др. Сборник задач по дифференциальной геометрии.- М.: ГР.ФМЛ, 1979. - 272 с.

[4] Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О., Сборник задач по высшей математике. - М.: Гостехиздат, 1957.