Доля П.Г.
Харьковский Национальный Университет
механико – математический факультет
кафедра геометрии им. А.В. Погорелова

Дискретная математика. Конспект лекций.

Оглавление

1. Алгебра высказываний и логика.

1.1 Высказывания и логические операции

Логика — это наука о рассуждениях, которая позволяет определить истинность или ложность того или иного математического утверждения, исходя из совокупности первичных предположений, называемых аксиомами. Блоками формальной логики являются высказывания. Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Истинность или ложность, приписываемые некоторому высказыванию, называются его значением. Пример высказываний:

- *земля плоская*;
- *Вася — студент*;
- *18 — четное число*.

Вот примеры предложений, не являющихся высказываниями:

- *Кто вы?* (вопрос),
- *Прочтите эту главу до следующего занятия* (приказ или восклицание),
- *Это утверждение ложно* (внутренне противоречивое утверждение).

Будем обозначать высказывания буквами латинского алфавита p, q, r, ... Например, р может обозначать утверждение: *Завтра будет дождь*, а q – утверждение: *Квадрат целого числа есть число положительное*.

В обыденной речи для образования сложного предложения из простых используются связки – особые части речи, соединяющие отдельные предложения. Наиболее часто употребляются связки `и`, `или`, `нет`, `если ... то`, `только если`, `тогда и только тогда`. В отличие от обыденной речи, в логике смысл таких связок должен быть определен однозначно.

Истинность сложного высказывания однозначно определяется истинностью или ложностью составляющих его частей. Высказывание, не содержащее связок, называется простым. Высказывание, содержащее связки, называется сложным.

Чтобы при формулировке сложных высказываний не возникали неоднозначности трактовки необходимо соблюдать некоторые правила.

Правило тождественности: значения слов использованных в повествовательном предложении (высказывании) должны быть уточнены так, чтобы сказанное в нем было безусловно верным или неверным, но не тем и другим одновременно. Значение слов, сказанных в предложении, в продолжение обсуждения не меняется.

Правило исключающего третьего: Все используемые утверждения или правильные или нет – другие оценки невозможны.

Правило противоречия: утверждение и его отрицание не могут быть истинными одновременно.

Рассмотрим пример. Пусть p и q обозначают высказывания

p: *Николай водит автомобиль,*

q*: У Елены светлые волосы.*

Сложное высказывание

Николай водит автомобиль ***и*** *у Елены светлые волосы.*

состоит из двух частей, объединенных связкой И. Это высказывание может быть символически записано в виде

$$p \text{ и } q$$

или

$$p \wedge q$$

где символ $\wedge$ заменяет союз и на языке символических выражений. Выражение $p \wedge q$ называется конъюнкцией высказываний p и q или логическим умножением.

Другое высказывание

Николай водит автомобиль ***или*** *у Елены светлые волосы.*

символически выражается как

$$p \text{ или } q$$

или

$$p \vee q$$

где символ $\vee$ заменяет союз или в переводе на символический язык. Выражение $p \vee q$ называется дизъюнкцией высказываний p и q или логическим сложением.

Опровержение, или отрицание высказывания p обозначается через ~p. Например, если p есть высказывание *Николай водит автомобиль*, то ~p — это утверждение *Николай не водит автомобиль*.

Пусть есть еще одно утверждение

r: *Саше нравится программирование.*

Тогда предложение

Николай не водит автомобиль и у Елены светлые волосы или Саше нравится программирование

символически запишется так $((\sim p)\wedge q)\vee r$. Наоборот, выражение $p\wedge(\sim q)\wedge r$ является символической записью высказывания

Николай водит автомобиль, у Елены волосы не светлые и Саше нравится программирование.

Рассмотрим выражение $p\wedge q$. Если некто говорит: *Николай водит автомобиль и у Елены светлые волосы*, то мы представляем Николая за рулем автомобиля и светловолосую Елену. В любой другой ситуации (например, если Елена имеет темные волосы или Николай не водит автомобиль) мы скажем, что говорящий не прав, т.е. его высказывание ложно.

Всего возможны четыре случая. Высказывание p может быть истинным (T = True = Истина) или ложным (F = False = Ложь). Независимо от значения p высказывание q также может быть истинным (T) или ложным (F). Таблица истинности перечисляет все возможные комбинации значений входящих в него простых высказываний и для каждой из них (комбинаций) сообщает результат сложного высказывания. На следующем рисунке представлены два варианта таблицы истинности для высказывания $p\wedge q$.

№	p	q	$p\wedge q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	F

p \ q	T	F
T	T	F
F	F	F

Если некто скажет: *Николай водит автомобиль или у Елены светлые волосы*, то он будет не прав только тогда, когда Николай не сможет управлять автомобилем, а Елена не будет светловолосой. Для того чтобы все высказывание было истинным, достаточно, чтобы одна из двух составляющих его компонент была истинной. Поэтому $p\vee q$ имеет таблицу истинности

Случай	p	q	$p\vee q$
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

p \ q	T	F
T	T	T
F	T	F

Таблица истинности для отрицания p имеет вид

Случай	p	~p
1	T	F
2	F	T

Истинностное значение ~p всегда противоположно значению p. В таблицах истинности отрицание всегда выполняется первым (имеет приоритет перед операциями $\wedge$ и $\vee$), поэтому высказывание $\sim p\vee q$ интерпретируется как

$(\sim p)\vee q$, так что отрицание применяется только к p. Если мы хотим отрицать все высказывание $p \vee q$, то следует использовать скобки $\sim(p \vee q)$.

Символы $\wedge$ и $\vee$ называют бинарными связками (или бинарными операциями), поскольку они связывают два высказывания. Символ $\sim$ является унарной связкой, так как применяется только к одному высказыванию.

Иногда используют еще одну бинарную связку – исключающее или, которое мы будем обозначать $\underline{\vee}$. Высказывание $p \underline{\vee} q$ истинно, когда истинно p или q, но не оба одновременно. Эта связка имеет таблицу истинности

Случай	p	q	$p \underline{\vee} q$
1	T	T	F
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	F

p \ q	T	F
T	F	T
F	T	F

В повествовательном предложении, используя союз или, мы можем иметь в виду исключающее или. Например, когда мы говорим, *Сергей сдаст экзамен по дискретной математике или не сдаст этот экзамен*, мы, конечно, предполагаем, что Сергей сделает что-то одно. В этом примере каждое из простых высказываний

p: *Сергей сдаст экзамен по дискретной математике*

q: *Сергей не сдаст экзамен по дискретной математике*

рассматриваемых автономно (без рассмотрения другого) может принимать значение ИСТИНА, но результат сложного высказывания **p** или **q** будет ЛОЖЬ. Поэтому в ячейке таблицы истинности, соответствующей значениям **p** = T, **q** = T, мы должны поставить F (ЛОЖЬ).

Аналогично, можно составить сложное высказывание

На улице идет дождь или на улице дождь не идет

которое мы можем записать символически $p \underline{\vee} q$ с использованием исключающего или. Здесь элементарными высказываниями являются предложения

p: *На улице идет дождь*

q: *На улице нет дождя*

Но высказывание

На улице идет дождь или на улице снег не идет

мы должны записать символически $p \vee q$, где

p: *На улице идет дождь*

q: *На улице нет снега*

Поскольку в случае истинности обоих простых высказываний сложное высказывание будет также истинным, то следует использовать обычное или.

Рассмотрим высказывание: *Николай сдаст экзамен по дискретной математике или Николай будет исключен из университета и пойдет работать.*

Для простых высказываний введем обозначения

p: *Николай сдаст экзамен по дискретной математике*

q: *Николай останется студентом*

r: *Николай пойдет работать*

Тогда наше сложное высказывание можно представить в виде

$$p \vee ((\sim q) \wedge r),$$

где скобки использованы, чтобы показать, какие именно высказывания являются компонентами каждой операции.

Таблица истинности дает возможность однозначно указать те ситуации, когда высказывание $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ является истинным; при этом мы должны быть уверены, что учтены все случаи. Поскольку сложное высказывание содержит три простых высказывания p, q и r, то возможны восемь вариантов

Случай	p	q	r	~q	$(\sim q) \wedge r$	$p \vee ((\sim q) \wedge r)$
1	T	T	T	F	F	T
2	T	T	F	F	F	T
3	T	F	T	T	T	T
4	T	F	F	T	F	T
5	F	T	T	F	F	F
6	F	T	F	F	F	F
7	F	F	T	T	T	T
8	F	F	F	T	F	F

Для нахождения значений столбца $(\sim q) \wedge r$ мы используем столбцы для ~q и r, а также таблицу истинности для $\wedge$. Для нахождения значений столбца $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ используем значения столбца p и значения уже заполненного столбца $(\sim q) \wedge r$.

1.2 Условные высказывания.

Допустим, некто утверждает, что если случится одно событие, то случится и другое. Предположим, декан говорит студенту: *Если ты сдашь все экзамены на «отлично», то получишь повышенную стипендию.* Высказывание имеет вид: если p, то q, где p – высказывание: *Ты сдашь все экзамены на «отлично»*, а q – высказывание: *получишь повышенную стипендию*. Такие сложные высказывания обозначают символически $p \Rightarrow q$ (или $p \to q$) и называются импликацией. Спрашивается, при каких условиях декан говорит правду? Если проанализировать все случаи, а их четыре, то единственный случай, когда высказывание декана ложно - это когда он дал обещание и не выполнил его. Таким образом, таблица истинности для высказывания $p \Rightarrow q$ имеет вид

№	p	q	$p \Rightarrow q$
1	T	T	T
2	T	F	F
3	F	T	T
4	F	F	T

Может показаться, что $p \Rightarrow q$ носит характер причинно – следственной связи, но это не является необходимым. Чтобы увидеть отсутствие причины и следствия в импликации, вернемся к примеру, в котором p есть высказывание *Николай водит автомобиль*, а q – утверждение *У Елены светлые волосы.* Тогда утверждение *Если Николай водит автомобиль, то у Елены светлые волосы* запишется как

если p, то q

или символически

$$p \Rightarrow q$$

То, что *Николай водит автомобиль,* никак причинно не связано с тем, что Елена светловолосая. Истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности составляющих его частей и не зависит от наличия или отсутствия между ними какой-либо связи.

Таким образом, импликацией называется формализация сложного союза если … то … , который записывается в виде $p \Rightarrow q$. Знак $\Rightarrow$ называется знаком импликации, или условной связкой.

Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются как $p \Rightarrow q$. Вот несколько примеров таких конструкций:

если p, то q.

p достаточно для q.

p является достаточным условием для q.

q необходимо для p.

q является необходимым условием для p.

p, только если q (или: только если q, то p).

Таблица для $p \Rightarrow q$ показывает, что если $p \Rightarrow q$ истинно и p истинно, тогда q должно быть истинным, т.е. истинность p достаточна для истинности q. Поэтому p достаточно для q имеет тот же смысл, что и $p \Rightarrow q$. Аналогично, если q ложно и q необходимо для p, тогда p должно быть ложно. Поэтому, если ~q истинно, тогда ~p должно быть истинно и $\sim q \Rightarrow \sim p$. Следовательно, q необходимо для p имеет то же значение, что и $\sim q \Rightarrow \sim p$. Но это эквивалентно $p \Rightarrow q$. Действительно выражения $p \Rightarrow q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$, имеют одинаковые таблицы истинности

p	q	$p \Rightarrow q$	~q	~p	$\sim q \Rightarrow \sim p$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
T	T	T	F	F	T

Логические выражения, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях, называются эквивалентными. Т.о. выражения $p \Rightarrow q$ и $\sim q \Rightarrow \sim p$ эквивалентны.

Анализ значения p только если q проводится аналогично. Получаем, что p может быть истинным, только если q истинно. Если q не истинно, то p не может быть истинным. Но это эквивалентно утверждению, что если ~q истинно, то ~p должно быть истинно и $\sim q \Rightarrow \sim p$. Поэтому p только если q имеет то же значение, что и $p \Rightarrow q$.

С импликацией $p \Rightarrow q$ связаны три типа высказываний: конверсия, инверсия и контрапозиция. Они определяются следующим образом:

$p \Rightarrow q$ импликация;

$q \Rightarrow p$ конверсия высказывания $p \Rightarrow q$;

$\sim p \Rightarrow \sim q$ инверсия высказывания $p \Rightarrow q$;

$\sim q \Rightarrow \sim p$ контрапозиция высказывания $p \Rightarrow q$.

Например, пусть дано высказывание – импликация: *Если он играет в футбол, то он популярен*. Для этой импликации имеем

конверсия: *Если он популярен, то он играет в футбол*

инверсия: *Если он не играет в футбол, то он не популярен*

контрапозиция: *Если он не популярен, то он не играет в футбол*

Таблица истинности для выражений $p \Rightarrow q$ и $\sim q \Rightarrow \sim p$, построенная выше, говорит о том, что импликация и ее контрапозиция эквивалентны.

В качестве примера найдем таблицу истинности для выражения $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$. Используя таблицу истинности для $\Rightarrow$, приведенную выше, построим сначала таблицы (столбцы) истинности для $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow r$, учитывая, что импликация ложна только в случае, когда $T \Rightarrow F$. Затем заполняем столбец $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

№	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
1	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	F	F
3	T	F	T	F	T	F
4	T	F	F	F	T	F
5	F	T	T	T	T	T
6	F	T	F	T	F	F
7	F	F	T	T	T	T
8	F	F	F	T	T	T

Высказывание вида $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ обозначается через $p \Leftrightarrow q$ (или $p \leftrightarrow q$) и называется эквиваленцией. Очевидно, таблица истинности для $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ определяет таблицу истинности для $p \Leftrightarrow q$.

№	p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
1	T	T	T	T	T
2	T	F	F	T	F
3	F	T	T	F	F
4	F	F	T	T	T

Непосредственно из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда p и q имеют одинаковые значения. Эквиваленция является формализацией сложного союза `тогда и только тогда`. Если есть два высказывания p и q, то высказывание `p тогда и только тогда когда q` записывается в символьном виде $p \Leftrightarrow q$, а знак $\Leftrightarrow$ называется знаком эквиваленции или равнозначности. Записи $p \Leftrightarrow q$ и $q \Leftrightarrow p$ означают одно и то же.

Конъюнкцию $\wedge$, дизъюнкцию $\vee$, отрицание ~, исключающее или $\underline{\vee}$, импликацию $\Rightarrow$ и эквиваленцию $\Leftrightarrow$ называют логическими союзами, логическими связками, логическими операторами или операциями. Можно сконструировать и другие логические операции, но мы их здесь пока не рассматриваем. Возникает вопрос о том, как интерпретировать сложные выражения, например такие как $\sim p \vee q$, $p \wedge q \vee r$, $p \wedge q \Rightarrow r$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \vee r$, в которых отсутствуют скобки. Во избежание неоднозначности лучше всегда использовать скобки. Однако в логике, как и в алгебре, имеется приоритет выполнения операций. Они выполняются в следующей последовательности: $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поэтому указанные выражения следует интерпретировать следующим образом: $(\sim p) \vee q$, $(p \wedge q) \vee r$, $(p \wedge q) \Rightarrow r$, $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee r)$.

1.3 Основные теоремы алгебры логики.

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Как говорилось ранее, такие высказывания называются логически эквивалентными. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности. Например, пусть p и q обозначают высказывания

p : *Сегодня шел дождь*,

q : *Сегодня шел снег.*

Рассмотрим сложные высказывания

Неверно, что сегодня шел дождь или снег,

или символически

$$\sim(p \vee q)$$

и

Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег,

или символически

$$\sim p \wedge \sim q$$

Построим таблицы истинности для обоих высказываний.

Случай	p	q	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
1	T	T	F	F
2	T	F	F	F
3	F	T	F	F
4	F	F	T	T

Итак, во всех четырех строках истинностные значения для $\sim(p \vee q)$ и для $\sim p \wedge \sim q$ совпадают. Это означает, что два рассматриваемых высказывания логически эквивалентны, т.е.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

ТЕОРЕМА (законы логики). Используя таблицы истинности, можно доказать следующие логические эквивалентности:

а) Свойства коммутативности

$$p \wedge q \equiv q \wedge p;$$
$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

б) Свойства ассоциативности

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r;$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r.$$

в) Свойства дистрибутивности

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

г) Законы идемпотентности

$$p \wedge p \equiv p;$$
$$p \vee p \equiv p.$$

д) Закон двойного отрицания

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

е) Законы де Моргана

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q;$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

ж) Закон контрапозиции

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p,$$

з) Другие полезные свойства

$$p \to q \equiv \sim p \vee q;$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

В предыдущем параграфе мы показали, что импликация и ее контрапозиция (пункт *ж*) эквивалентны. В начале этого параграфа был доказан закон де Моргана (пункт e_1). Другие пункты доказываются аналогично.

Высказывание, истинное во всех случаях, называется логически истинным, или тавтологией. Например, в прямоугольном треугольнике *сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы*. Теоремы в математике являются примерами тавтологий. Высказывание *Он сдаст или не сдаст экзамен* есть пример тавтологии, поскольку либо одно событие, либо другое обязательно должно иметь место. Высказывание *Быть или не быть*, это и есть тавтология. Каждое высказывание вида $p \vee \sim p$ — тавтология.

Высказывание, построенное так, что оно ложно в любом случае, называется логически ложным, или противоречием. Высказывание *Он сдаст зачет и не сдаст зачет* всегда ложно. Следовательно, это противоречие.

Рассмотрим высказывание вида

$$\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q$$

Ему соответствует таблица истинности

№	p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)$	$\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q$
1	T	T	T	T	T
2	T	F	F	F	T
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	F	T

Все значения в столбце $\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q$ равны T. Высказывание истинно во всех четырех возможных случаях, следовательно, оно является тавтологией. Имея логически истинное высказывание-тавтологию, легко построить логически ложное высказывание - противоречие. Для этого достаточно взять отрицание логически истинного высказывания. Поэтому высказывание $\sim\left(\left(p \wedge \left(p \Rightarrow q\right)\right) \Rightarrow q\right)$ логически ложно. Ложным также будет высказывание $\sim\left(p \vee \sim p\right)$.

Пусть символ T обозначает высказывание, которое есть тавтология и поэтому имеет таблицу истинности, состоящую из одних T. Символом F обозначим противоречие, т.е. высказывание, таблица истинности которого содержит F во всех строках. Используя таблицы истинности, легко проверить, что

$$\begin{array}{lllll} p & \wedge & \boldsymbol{T} & \equiv & p\,, \\ p & \wedge & \boldsymbol{F} & \equiv & \boldsymbol{F}\,, \\ p & \vee & \boldsymbol{T} & \equiv & \boldsymbol{T}\,, \\ p & \vee & \boldsymbol{F} & \equiv & p\,, \\ p & \wedge & \sim p & \equiv & \boldsymbol{F}\,, \\ p & \vee & \sim p & \equiv & \boldsymbol{T}\,, \\ p & \rightarrow & p & \equiv & \boldsymbol{T}\,. \end{array}$$

В высказывании можно заменить любую его компоненту на логически эквивалентное ей высказывание. Полученное в результате такой замены высказывание будет логически эквивалентно исходному, поскольку истинностное значение высказывания зависит исключительно от истинностных значений составляющих его компонент (но не от их формы или сложности). Например,

$$\begin{array}{lll} (q \vee r) \vee (p \wedge \sim r) \;\; \equiv & & \\ \equiv & q \vee (r \vee (p \wedge \sim r) \equiv & \text{свойство ассоциативности} \\ \equiv & q \vee ((r \vee p) \wedge (r \vee \sim r)) \equiv & \text{свойство дистрибутивности} \\ \equiv & q \vee ((r \vee p) \wedge \boldsymbol{T}) \equiv & \text{эквивалентность} \\ \equiv & q \vee (r \vee p) \equiv & \text{эквивалентность} \\ \equiv & q \vee (p \vee r) \equiv & \text{свойство коммутативности} \\ \equiv & (q \vee p) \vee r \equiv & \text{свойство ассоциативности} \\ \equiv & (p \vee q) \vee r\,. & \text{свойство коммутативности} \end{array}$$

Здесь мы использовали законы логики для образования новых эквивалентных высказываний.

1.4 Полнота в логике высказываний.

Соберем вместе таблицы истинности для рассмотренных ранее бинарных логических операций и унарной операции отрицания.

И $p \wedge q$

p \ q	T	F
T	T	F
F	F	F

Или $p \vee q$

p \ q	T	F
T	T	T
F	T	F

Исключающее или $p \veebar q$

p \ q	T	F
T	F	T
F	T	F

Импликация $p \Rightarrow q$

p \ q	T	F
T	T	F
F	T	T

Эквиваленция $p \Leftrightarrow q$

p \ q	T	F
T	T	F
F	F	T

Отрицание ~p

p	~p
T	F
F	T

Мы также знаем таблицы истинности для тавтологии (состоит из одних T) и противоречия (состоит из одних F). Существуют ли другие бинарные логические операции. Поскольку в каждой клетке таблицы 2×2 может стоять только два значения T или F, то всего различных таблиц будет $2^4 = 16$. Каждая таблица истинности определяет свою бинарную логическую операцию и для них, конечно, придуманы свои названия и обозначения. Но мы на них останавливаться не будем, поскольку для конструирования любого сложного выражения нам всегда будет достаточно нескольких из выше приведенных логических операций.

Допустим, что задана произвольная таблица истинности. Существует простой способ найти высказывание, которому она соответствует. Например, предположим, что имеется таблица истинности

Случай	p	q	
1	T	T	T
2	T	F	T
3	F	T	F
4	F	F	T

Известно, что $p \wedge q$ истинно в случае 1 и ложно во всех остальных случаях. Аналогично, $p \wedge \sim q$ истинно только в случае 2, $\sim p \wedge q$ истинно только в случае 3, а $\sim p \wedge \sim q$ истинно только в случае 4. Указанное в примере высказывание должно быть истинным в случаях 1, 2 и 4. Возьмем высказывания, истинные только в этих случаях, и соединим их связкой или $\vee$. Тогда мы получим высказывание, истинное только в требуемых случаях (строках). В нашем случае рассматриваемая таблица истинности соответствует высказыванию

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Конечно, полученная форма высказывания не является простейшей. Используя законы логики, почти всегда можно получить более короткую запись.

В случае таблиц истинности с тремя переменными имеем аналогичную ситуацию. Для каждой строки следующей таблицы приведено высказывание, истинное только для этой строки.

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	$p \wedge q \wedge r$
2	T	T	F	$p \wedge q \wedge \sim r$
3	T	F	T	$p \wedge \sim q \wedge r$
4	T	F	F	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
5	F	T	T	$\sim p \wedge q \wedge r$
6	F	T	F	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
7	F	F	T	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
8	F	F	F	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Если требуется построить высказывание, соответствующее конкретной таблице истинности, необходимо выбрать выражения, соответствующие случаям (строкам), где высказывание истинно, и соединить их связкой или $\vee$. Например, пусть дана таблица истинности

p	q	r	
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

Тогда соответствующее ей высказывание может иметь вид

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

Заметим, что в п.1.2 мы строили таблицу истинности для высказывания $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$, которая была такой же, как в нашем примере. Т.о. для логического выражения $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ мы построили эквивалентное высказывание без использования значка (логической связки) импликации $\Rightarrow$.

Рассмотрим вопрос о минимальном количестве логических связок, необходимых для представления любого высказывания, образованного с помощью определенных нами выше логических связок. Известно, что $p \Leftrightarrow q$ можно выразить как $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, т.е. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Так что использовать операцию $\Leftrightarrow$ удобно, но не необходимо. К тому

$p \veebar q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Поэтому нет необходимости использовать $\veebar$ и $\Rightarrow$, если применяется $\sim$ и $\vee$.

Выше мы показали, что трех логических связок $\sim, \wedge, \vee$ достаточно для представления любого логического выражения (с любой таблицей истинности). Но поскольку

$$p \wedge q \equiv \sim (\sim p \vee \sim q)$$

$$p \vee q \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q),$$

то можно обойтись парой связок $\sim, \wedge$ или парой $\sim, \vee$, причем в любом случае необходимы обе связки. Однако существуют две связки, обладающие тем свойством, что любое высказывание может быть выражено с использованием только одной из них. Эти связки: | — штрих Шеффера и $\downarrow$ — стрелка Пирса. Этим связкам соответствуют таблицы истинности

Случай	p	q	$p \mid q$
1	T	T	F
2	T	F	T
3	F	T	T
4	F	F	T

Случай	p	q	$p \downarrow q$
1	T	T	F
2	T	F	F
3	F	T	F
4	F	F	T

Для того чтобы показать, что любую связку можно заменить связкой |, достаточно показать это для пар связок $\sim$ и $\wedge$ или $\sim$ и $\vee$, поскольку возможность выразить любую связку одной из этих пар уже показана.

Эквивалентность $p \mid p \equiv \sim p$ устанавливается при помощи следующей таблицы истинности:

№	p	$p \mid p$
1	T	F
4	F	T

Точно так же таблица

№	p	q	$p \mid p$	$q \mid q$	$(p \mid p) \mid (q \mid q)$
1	T	T	F	F	T
2	T	F	F	T	T
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	T	F

показывает, что $(p \mid p) \mid (q \mid q) \equiv p \vee q$. Аналогично можно показать, что $(p \mid q) \mid (p \mid q) \equiv p \wedge q$.

Проверив, что $\sim$ и $\wedge$ или $\sim$ и $\vee$ можно выразить, используя только операцию |, мы доказали, что любую связку можно выразить, используя лишь штрих Шеффера |.

Проверьте самостоятельно, что

$$p \downarrow p \equiv \sim p$$
$$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \equiv p \vee q$$
$$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \equiv p \wedge q$$

Заметим, что $p \mid q$ эквивалентно $\sim (p \wedge q)$, а $p \downarrow q$ эквивалентно $\sim (p \vee q)$. Поэтому связка | называется не – и, а связка $\downarrow$ называется не – или.

Упражнения.

Упражнения к п. 1.1.

1. Среди приведенных ниже предложений найдите высказывания. Укажите их истинностные значения.

   a) *Который час?*
   b) *Число 1 есть наименьшее положительное целое число.*
   c) *Если $x = 3$, то $x^2 = 6$.*
   d) *Берегись автомобиля!*
   e) *Симферополь – южный город.*
   f) *Все четные числа делятся на 2.*
   g) *Положите деньги в карман.*
   h) *Земля — ближайшая к солнцу планета.*
   i) *Не следует хранить компакт-диски в микроволновой печи.*

2. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p : *Поездка в Париж является дорогостоящей,*

q : *Я совершу поездку в Париж,*

r: *У меня есть деньги.*

Запишите в символической форме такие высказывания:
У меня нет денег и я не совершу поездку в Париж.
У меня нет денег и поездка в Париж является дорогостоящей или я совершу поездку в Париж.
Неверно, что у меня есть деньги и я поеду в Париж.
Поездка в Париж не является дорогостоящей и я поеду в Париж или поездка в Париж является дорогостоящей и я не поеду в Париж.
3. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:
p : *Мой компьютер — быстродействующий*,
q : *Я окончу писать программу вовремя*,
r : *Я сдам зачет*.
Запишите в символической форме такие высказывания:
У меня не быстродействующий компьютер или я закончу писать программу вовремя.
Я не закончу писать программу вовремя и не сдам зачет.
Неверно, что я закончу писать программу вовремя и сдам зачет.
У меня быстродействующий компьютер или я не закончу писать программу вовремя и сдам зачет.
4. Постройте таблицы истинности для каждого высказывания в упражнениях 2 и 3.
5. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:
p : *Эта игра очень трудна*,
q : *Я играю в шахматы*,
r : *Игра в шахматы требует времени*.
Интерпретируйте следующие выражения как обычные высказывания:
a) $q \wedge r$
b) $\sim p \vee \sim q$
c) $(p \vee r) \wedge q$
d) $p \wedge q \wedge r$

6. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:
p : *Доги — большие собаки*,
q : *У меня маленький дом*,
r : *У меня есть дог*.
Представьте следующие символические выражения как обычные высказывания
а) $p \wedge q \wedge \sim r$;
б) $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$;
в) $(p \vee \sim q) \wedge r$;
г) $(p \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$.
7. Постройте таблицы истинности для каждого высказывания в упражнениях 5 и 6.
8. Постройте таблицы истинности для следующих высказываний:

а) $p \wedge (q \vee \sim r)$;
б) $(q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r)$;
в) $\sim(p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r)$;
г) $\sim(\sim p \vee (q \wedge \sim r))$;
д) $(p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)$.
а) $(p \vee q) \wedge (r \vee q)$;
б) $(\sim q \wedge r) \vee \sim(p \wedge r)$;
в) $\sim((p \wedge r) \vee \sim q)$;
г) $\sim(\sim p \wedge (q \vee \sim r))$;
д) $(p \vee \sim r) \wedge \sim(p \vee \sim q)$.

Упражнения к п. 1.2

1. Пусть `p, q` и `r` обозначают следующие высказывания:
`p` : *Он купит компьютер*,
`q` : *Он будет праздновать всю ночь*,
`r` : *Он выиграет в лотерею*.
Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:
а) *Если он выиграет в лотерею, он купит компьютер и будет праздновать всю ночь*.
б) *Если он не купит компьютер, то и праздновать всю ночь не будет*.
в) *Если он выиграет в лотерею, то будет праздновать всю ночь и если он не выиграет в лотерею, то не купит компьютер*.
г) *Если он не выиграет в лотерею или не купит компьютер, то праздновать всю ночь не будет*.
2. Пусть `p, q` и `r` обозначают следующие высказывания:
`p` : *Он читает комиксы.*
`q` : *Он любит научную фантастику*.
`r` : *Он — ученый - информатик*.
Запишите следующие высказывания в виде символических выражений:
а) *Если он читает комиксы и любит научную фантастику, то он — ученый - информатик*.
б) *Если он не читает комиксы и не любит научную фантастику, то он не является ученым - информатиком*.
в) *Если он читает комиксы, то он любит научную фантастику и если он не читает комиксы, то он — ученый - информатик*.
г) *Если он — ученый - информатик, то он читает комиксы или он не любит научную фантастику*.
3. Пусть `p, q` и `r` обозначают следующие высказывания:
`p` **:** *Он удачлив*,
`q` **:** *Он популярен*,
`r` **:** *Он богат.*
Запишите следующие символические выражения как высказывания:

а) $\sim(p \rightarrow q)$;
б) $(p \vee r) \rightarrow q$;
в) $q \leftrightarrow (p \wedge r)$;
г) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q))$.

4. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:
а) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$;
б) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$;
в) $q \rightarrow (p \wedge r) \leftrightarrow ((q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r))$;
г) $((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

5. Постройте таблицы истинности для следующих выражений:
а) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$;
б) $(p \wedge \sim(q \vee \sim r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$;
в) $(p \vee r) \rightarrow q$;
г) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)) \rightarrow (r \rightarrow p)$;
д) $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

6. Укажите, какие из следующих высказываний являются истинными:
а) *Если* $2^2 = 4$, *то* $3^2 = 9$;
б) *Если* $2^2 = 5$, *то* $3^2 = 9$;
в) *Если* $2^2 = 5$, *то* $3^2 = 10$;
г) *Если* $2^2 = 4$, *то* $3^2 = 10$.

7. Запишите в символическом виде высказывания:
а) *Сейчас январь, но сейчас зима тогда и только тогда, когда мы находимся в северном полушарии.*
б) *Сейчас январь и сейчас зима в том и только том случае, если мы находимся в северном полушарии.*
Ответ: а) $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$; б) $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$, где
p: *Сейчас январь*;
q: *Сейчас зима*;
r: *Мы находимся в северном полушарии*

Упражнения к п. 1.3

1. Приведите следующие высказывания к виду $p \Rightarrow q$ или $q \Rightarrow p$:
а) *Он добьется успеха, только если будет усердно работать.*
б) *Он счастлив, только если управляет автомобилем.*
в) *Наличия денег достаточно, чтобы быть счастливым.*
г) *Наличие денег необходимо, чтобы быть счастливым.*
д) *Чтобы победить на выборах, нужно набрать достаточно голосов.*
Ответ:
а) Пусть p: *Он добьется успеха*; q: *Он будет усердно работать*, то высказывание если p, то q (т.е. $p \Rightarrow q$) примет вид: *Если он добивается успеха, то он работает усердно.*
б) Пусть p: *Он управляет автомобилем*; q: *Он счастлив*, то высказывание q только если p (т.е. $q \Rightarrow p$) примет вид: *Если он счастлив, то он управляет автомобилем.*

в) Пусть p: *У него есть деньги*; q: *Он счастлив*, то высказывание p достаточно для q (т.е. $p \Rightarrow q$) примет вид: *Если у него есть деньги, он счастлив.*

г) Пусть p: *У него есть деньги*; q: *Он счастлив*, то высказывание p необходимо для q (т.е. $q \Rightarrow p$) примет вид: *Если он счастлив, то у него есть деньги.*

д) Пусть p: *Он победит на выборах*; q: *Он получит достаточное количество голосов*, то высказывание q необходимо для p, или если p, то q (т.е. $p \Rightarrow q$) может быть записано в виде *Если он победит на выборах, то он получит достаточное количество голосов.*

2. Используя таблицы истинности, докажите следующие эквивалентности:

а) Закон де Моргана

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

б) Свойство ассоциативности связки V

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

в) Свойство дистрибутивности связки *или* относительно *и*

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

г) Эквивалентность импликации и высказывания со связкой или

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q.$$

3. Используя пункт (г) предыдущего упражнения, покажите, что отрицание для $p \Rightarrow q$ эквивалентно $\sim (p \wedge \sim q)$.

4. Докажите, что $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ не используя непосредственно таблицы истинности.

5. Используя логически эквивалентные высказывания и не применяя непосредственно таблицы истинности, покажите, что

а) $p \equiv \sim(p \wedge s) \rightarrow (\sim s \wedge p)$.

б) $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

6. Используя таблицы истинности, докажите, что $p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$.

7. Дано высказывание *Если я голосую, то я хороший гражданин*.

а) Сформулируйте конверсию этого выражения.

б) Сформулируйте инверсию этого выражения.

в) Сформулируйте контрапозицию этого выражения.

Упражнения к п. 1.4

1. Используя таблицы истинности, докажите, что

а) $p \downarrow p$ эквивалентно $\sim p$;

б) $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ эквивалентно $p \wedge q$;

в) $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ эквивалентно $(p \vee q)$.

2. Найдите высказывания, которым отвечают следующие таблицы истинности:

а)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	F
5	F	T	T	F
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T

б)

Случай	p	q	r	
1	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	T
4	T	F	F	F
5	F	T	T	F
6	F	T	F	T
7	F	F	T	F
8	F	F	F	T