1991 г. март — апрель *т. 46, вып. 2 (278)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.7

МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА И ГРАССМАНОВ ОБРАЗ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение

В последние 10—15 лет наблюдается растущий интерес к дифференциальной геометрии многообразий Грассмана. На наш взгляд, это объясняется следующими факторами: во-первых, грассмановы многообразия — это «классические» гладкие многообразия и их топология достаточно хорошо изучена, во-вторых, многообразия Грассмана являются одними из неприводимых (кроме $G(2, 4)$) компактных симметрических пространств, что позволяет эффективно использовать для их изучения соответствующие средства, в-третьих, они используются во внешней геометрии, так как являются объемлющим пространством для грассманова образа поверхности — аналога сферического отображения. В настоящем обзоре мы ставим своей целью проследить основные результаты по геометрии многообразий Грассмана, полученные до 1989 г.

Многообразием Грассмана $G(l, l+p)$ называется множество l-мерных плоскостей $l+p$-мерного евклидова пространства E^{l+p}, проходящих через начало координат $O \in E^{l+p}$. Если брать ориентированные l-мерные плоскости, то получим «ориентированное» многообразие Грассмана $G^+(l, l+p)$.

Аналогично можно определить комплексные и кватернионные многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ и $\mathbb{H}G(l, l+p)$, заменяя E^{l+p} на $\mathbb{C}^{l+p}$ и $\mathbb{H}^{l+p}$ (где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов).

Другое направление обобщения многообразий Грассмана: множество вполне геодезических l-мерных подмногообразий в пространствах постоянной кривизны S^{l+p} и L^{l+p}, сферическое $SG(l, l+p)$ и гиперболическое $LG(l, l+p)$ многообразия Грассмана. Дальнейшие обобщения в этом направлении, вероятно, менее содержательны ввиду бедности общего вида римановых пространств вполне геодезическими подмногообразиями (аксиома плоскостей Картана).

В дальнейшем под многообразиями Грассмана будем понимать вещественное «евклидово» многообразие Грассмана, если не оговорено противное. Все многообразия, метрики, поверхности и т. п. предполагаются регулярными (C^∞, если не оговорено противное).

II. Топология многообразий Грассмана

1. Локальные координаты. На $G(l, l+p)$ естественно вводится структура аналитического многообразия (см., например, Рохлин, Фукс [39]). Его картами являются множества всех l-мерных плоскостей, проектирующихся без вырождения (и с сохранением ориентации для $G^+(l, l+p)$) на данную l-мерную плоскость π_0. Выбирая в E^{l+p} ортонормированный базис так, чтобы плоскость π_0 задавалась уравнениями $x^{l+\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$), получаем, что l-мерные плоскости, лежащие в соответствующей карте, имеют вид

$$\begin{cases} x^{l+1} = \xi_1^1 x^1 + \ldots + \xi_l^1 x^l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{l+\mu} = \xi_1^\mu x^1 + \ldots + \xi_l^\mu x^l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{l+p} = \xi_1^p x^1 + \ldots + \xi_l^p x^l. \end{cases}$$

При этом lp чисел ξ_j^μ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, l$) можно принять за локальные координаты на $G(l, l+p)$ в окрестности рассматриваемой точки ($\xi_j^\mu(\pi_0) = 0$). Многообразие Грассмана, таким образом, lp-мерно.

Легко проверить, что функции перехода являются аналитическими. Не менее употребителен и другой способ введения локальных координат (Лейхтвейс [103]). А именно, зафиксируем в E^{l+p} ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_{l+p}$ такой, что векторы $e_1, \ldots, e_l$ лежат в данной плоскости π_0, векторы $e_{l+1}, \ldots, e_{l+p}$ — ей ортогональны. С близкой плоскостью π свяжем ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_{l+p}$ такой, что

$f_1, \ldots, f_l$ лежат в π. Раскладывая его векторы по базису (e_i, e_α) $(i, j = 1, 2, \ldots, l; \alpha, \beta = l+1, \ldots, l+p)$, получим

$$\begin{cases} f_i = \eta_i^j e_j + \eta_i^\beta e_\beta, \\ f_\alpha = \eta_\alpha^j e_j + \eta_\alpha^\beta e_\beta. \end{cases}$$

Теперь можно специализировать базис (f_i, f_α) так, чтобы $\langle f_i, e_j\rangle = \langle f_j, e_i\rangle$ и $\langle f_\alpha, \varepsilon_\beta\rangle = \langle f_\beta, e_\alpha\rangle$, где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение в E^{l+p} (на алгебраическом языке это соответствует разложению матриц, $\{\eta_j^i\}_{i,j=1}^l$ и $\{\eta_\alpha^\beta\}_{\alpha,\beta=l+1}^{l+p}$ на симметрическую и ортогональную). Кроме того, естественно потребовать, чтобы на плоскости π_0 было $f_i = e_i$, $f_\alpha = e_\alpha$ (при всех i, α) и базис (f_i, f_α) непрерывно зависел от плоскости. Тогда

$$\begin{cases} f_i = (\delta_i^j + \eta_i^j)\, e_j + \eta_i^\beta e_\beta, \\ f_\alpha = \eta_\alpha^j e_j + (\delta_\alpha^\beta + \eta_\alpha^\beta)\, e_\beta, \end{cases}$$

$\eta_i^j = \eta_j^i$, $\eta_\beta^\beta = \eta_\alpha^\alpha$. Теперь, пользуясь ортонормированностью векторов (f_i, f_α), можно локально выразить η_i^j, η_α^j и η_α^β через η_i^β, т. е. набор из lp чисел $\{\eta_i^\beta\}_{i=1,\beta=l+1}^{l\ \ l+p}$ образует локальные координаты в окрестности точки π_0 (при этом $\eta_i^\beta(\pi_0) = 0$). Если N и Z — $(l \times p)$-матрицы, составленные из чисел η_i^β и ξ_i^α соответственно, а базис (e_i, e_α) выбран вдоль осей (x^i, x^α), то связь между двумя введенными системами координат имеет вид $N = ZQ$, где Q — единственная симметрическая $(l \times l)$-матрица такая, что $QQ' = (I_l + Z'Z)^{-1}$ (I_l — единичная $(l \times l)$-матрица), $Q = I_l$ при $Z = 0$ и Q непрерывно зависит от Z.

Согласно [103, 152] аналогичные виды локальных координат вводятся на комплексном и кватернионном многообразиях Грассмана.

2. Клеточное разбиение и основные топологические характеристики. Очевидно, что $G(0, p)$ — точка ($G^+(0, p) = S^0$ — две точки), $G(1, p+1) = \mathbb{R}P^p$, $G^+(1, p+1) = S^p$, $\mathbb{C}G(1, p+1) = \mathbb{C}P^p$, $\mathbb{H}G(1, p+1) = \mathbb{H}P^p$. Для многообразий $G(l, l+p)$ и $G(p, l+p)$ (аналогично для ориентированных, а так же для $\mathbb{C}G$ и $\mathbb{H}G$) строится канонический диффеоморфизм, сопоставляющий l-мерной плоскости ее p-мерное ортогональное дополнение, т. е. $G(l, l+p) = G(p, l+p)$, $G^+(l, l+p) = G^+(p, l+p)$ (как гладкие многообразия).

$G^+(l, l+p)$ дает двулистное накрытие над $G(l, l+p)$ со слоем $\mathbb{Z}_2$ (проекция — лишение плоскостей ориентации).

Многообразия Грассмана компактны и связны (кроме $G^+(0, p) = S^0$) [39].

Многообразия $G^+(l, l+p)$ $(l, p) \neq (1, 1)$ односвязны, $\pi_1(G(l, l+p)) = \mathbb{Z}_2$ $(l, p > 0, (l, p) \neq (1, 1))$, $\pi_1(G(1, 2)) = \pi_1(G^+(1, 2)) = \mathbb{Z}_2$. О старших гомотопических группах см. Фукс [43]. $G^+(l, l+p)$ ориентируемо, $G(l, l+p)$ $(l, p > 0)$ ориентируемо тогда и только тогда, когда $l+p$ четно [39].

На многообразии Грассмана существует стандартное клеточное разбиение на клетки Шуберта (например, Шварц [45], Милнор, Сташеф [33]) следующим образом: зафиксируем в E^{l+p} последовательность подпространств $E^0 \subset E^1 \subset \ldots \subset E^{l+p}$ $(\dim E^j = j)$. Для l-мерной плоскости $0 \in \pi \subset E^{l+p}$ определим числа $m_j(\pi) = \inf_m \{m: \dim(\pi \cap E^m) \geqslant j\}$ (при этом $m_1(\pi) < m_2(\pi) < \ldots < m_l(\pi)$).

Клеткой Шуберта с мультииндексом $(m_1, \ldots, m_l)$ называется $C_{m_1 \ldots m_l} = \{\pi \in G(l, l+p): m_j(\pi) = m_j\}$ $(m_1 < \ldots < m_l)$. При этом $\dim C_{m_1 \ldots m_l} =$

$= \sum_{j=s}^{l} m_j - \frac{l(l+1)}{2}$, существует единственная клетка размерности 0 — это $C_{12\ldots l}$, и единственная клетка размерности lp — это $C_{p+1\ldots p+l}$; всего же $G(l, l+p)$ разбивается на C_{l+p}^l клеток.

С помощью клеточного разбиения вычисляются гомологии и когомологии многообразий Грассмана [45, 43, 33]. Например,

$$H^k(G(l, l+p), \mathbb{Z}_2) \simeq H_k(G(l, l+p), \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{N_k} \mathbb{Z}_2,$$

где N_k есть число клеток Шуберта $\dim = k$. Легко видеть, что $H^k(\mathbb{C}G(l, l+p), G) \simeq H_k(\mathbb{C}, G(l, l+p), G) = \bigoplus_{N_k} G$ [43] (G — любая абелева группа) — все клетки имеют четную размерность.

Гомологии и когомологии вещественных многообразий Грассмана над $\mathbb{Z}$ вычисляются в [43]. Многообразия Грассмана играют центральную роль в построении теории характеристических классов (Милнор, Сташеф [33]). Это объясняется возможностью построения над ними тавтологического расслоения: слоем над точкой $\pi \in G(l, l+p)$ является само π, рассматриваемое как линейное l-мерное пространство. Такое расслоение является универсальным в том смысле, что содержит в качестве подрасслоения любое векторное расслоение над паракомпактной базой.

Некоторые топологические свойства многообразий Грассмана рассмотрены, например, в [48, 100, 106, 87].

3. Плюккеровы координаты. Многообразия Грассмана аналитически вкладываются в $\mathbb{R}P^{C_{l+p}^l - 1}$ (в ориентируемом случае в $S^{C_{l+p}^l - 1}$) с помощью плюккеровых координат [39]. Плюккеровы координаты $p_{i_1\ldots i_l}$ ($1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant l+p$) l-мерной плоскости $\pi \subset E^{l+p}$ определяются как миноры порядка l $l \times (l+p)$-матрицы, строки которой есть координаты векторов базиса плоскости π в E^{l+p}. Они кососимметричны по всем парам индексов и удовлетворяют соотношениям Плюккера

$$p_{i_1\ldots i_l[i_l} p_{j_1\ldots j_l]} = 0$$

($[\cdot]$ обозначают альтернирование). При замене базиса в плоскости π плюккеровы координаты умножаются на определитель матрицы перехода. Таким образом, можно считать, что каждой l-мерной плоскости $\pi \subset E^{l+p}$ соответствует набор плюккеровых координат с $\sum_{i_1<\ldots<i_l} P_{i_1 i_2\ldots i_l}^2 = 1$. Это соответствие взаимно однозначно, если рассматривать плоскости без ориентации (и дает вложение $G(l, l+p) \to \mathbb{R}P^{C_{l+p}^l - 1}$), и двулистно, если рассматривать ориентированные плоскости (получаем вложение $G^+(l, l+p) \to S^{C_{l+p}^l - 1}$ (см., например, [38]).

В случае $l = p = 2$ имеется единственное соотношение Плюккера

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Добавляя к этому уравнению уравнение сферы $\sum_{i<j} p_{ij}^2 = 1$, получим, что $G^+(2, 4)$ распадается в произведение двух сфер $S^2 \times S^2$ (как гладкое многообразие). Действительно, положив $\rho^1 = p_{12} + p_{34}$, $\rho^2 = p_{13} - p_{24}$, $\rho^3 = p_{14} + p_{23}$, $\sigma^1 = p_{12} - p_{34}$, $\sigma^2 = p_{13} + p_{24}$, $\sigma^3 = p_{14} - p_{23}$, получим, что

соотношение Плюккера и условие $\sum p_{ij}^2 = 1$ эквивалентны равенствам $\sum (p^i)^2 = \sum (\sigma^i)^2 = 1$ (например, Бляшке [49]).

Вложение многообразий Грассмана $G(l, l+p)$ в евклидово пространство E^N получается с помощью композиции описанного выше вложения и вложения $\mathbb{R}P^{C_{l+p}^l-1}$ (соответственно $S^{C_{l+p}^l-1}$). При таком вложении $N = (C_{l+p}^l - 1)\, C_{l+p}^l/2$ для $G(l, p+l)$ и $N = C_{l+p}^l$ для $G^+(l, p+l)$. Можно получить и вложение с меньшей коразмерностью [43]. С другой стороны, например, если $l+p$ нечетно, то $G(l, l+p)$ невложимо в $E^{lp+\min(l,p)}$ [48].

Плюккерово вложение дает многообразие Грассмана $G^+(l, l+p)$ как многообразие простых l-векторов единичного объема в пространстве $\Lambda^l\mathbb{R}^{l+p}$ внешних форм степени l в $\mathbb{R}^{l+p}$. Многочисленные приложения этой конструкции встречаются при рассмотрении грассманова образа минимальных поверхностей (более общо — поверхностей с параллельным вектором средней кривизны — см. V.4; геометрические свойства — см. III.3).

Интересное применение нашло многообразие Грассмана $G^+(l, l+p) \subset \Lambda^l\mathbb{R}^{l+p}$ в теории калибровок и глобально-минимальных подмногообразий. Эта тематика берет начало с работы Харви — Лоусона [80]. *Калибровкой с постоянными коэффициентами* называется линейный функционал в $\Lambda^l\mathbb{R}^{l+p}$ с $\max(\varphi(\xi)) = 1$ по всем ориентированным l-векторам ξ объема 1. *Гранью* (face) калибровки φ называется подмножество $G(\varphi) = \{\xi \in G^+(l, l+p): \varphi(\xi) = 1\}$. Грань может быть получена как множество точек первого касания гиперплоскости в $\Lambda^l\mathbb{R}^{l+p}$, движущейся из бесконечности, с $G^+(l, l+p) \subset \Lambda^l\mathbb{R}^{l+p}$. Классификация граней проведена только в случаях $l = 1$ $(p = 1)$, $l = 2$ $(p = 2)$, $l = p = 3$, $l = 3$ $p = 4$ $(l = 4$ $p = 3)$, $l = p = 4$ (Харви, Морган [81, 67]).

Поверхности (более общо — распределения), грассманов образ (V.1) которых лежит в одной грани, глобально минимальны в своем гомологическом классе.

Для большинства калибровок гранью является одна точка (например, в случае $l = 1$ других граней нет: $S^l = G^+(l, l+1) \subset \Lambda^l\mathbb{R}^{l+1} = E^{l+1}$). Нетривиальный пример грани доставляет вполне геодезическое подмногообразие $\mathbb{C}P^m \subset G(2, l+2)$, $l \geqslant 2m$, (по этому поводу см. IV.2) — это следует из неравенства Виртингера [40]. Соответствующие глобально минимальные подмногообразия — комплексно-аналитические поверхности в $E^{2m+2} \subset E^{l+2}$. В случае $l = 2$ $(p = 2)$ других граней нет.

Подробное описание этих вопросов и продолжения в их решении содержится в обзоре [109].

III. Риманова геометрия многообразий Грассмана: геометрический подход

1. Углы между плоскостями и метрика. Многообразия Грассмана, как один из классов симметрических пространств, изучались Э. Картаном еще в 20—30 гг. Тем не менее систематическое описание их геометрии начинается в 60-х г. с основополагающих работ Лейхтвейса [103] и Вонга [152, 153] (хотя аналогичный подход был намечен и в более ранних работах [138, 104, 19]). Геометрия многообразий Грассмана изучается именно в рассмотрении взаимного расположения плоскостей в пространстве.

Пусть π и τ — две близкие (проектирующиеся друг на друга без вырождения) l-мерные плоскости в E^{l+p}.

Определение. *Углами* $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_l \leqslant \pi/2$ между π и τ

называются стационарные значения угла между парой векторов $u \in \pi$ и $v \in \tau$.

Если обозначать через P_π и P_τ операторы ортогонального проектирования и рассмотреть ортонормированные собственные векторы $u_1, \ldots, u_l \in \pi$ ($v_1, \ldots, v_l \in \tau$) неотрицательно определенного симметрического оператора $P_\pi P_\tau$: $\pi \to \pi$ ($P_\tau P_\pi$: $\tau \to \tau$), то углы $\{\beta_i\}_{i=1}^l$ как раз являются углами между векторами u_i и v_i (после возможной перенумерации и замены некоторых векторов на противоположный).

Точнее, существуют ортонормированные базисы $\{u_i\}_{i=1}^l \subset \pi$ и $\{v_i\}_{i=1}^l \subset \subset \tau$ такие, что

$$\langle u_i, v_j\rangle = \cos \beta_i \delta_{ij}, \quad \beta_i \in [0, \pi/2]$$

(это свойство можно принять за определение углов β_i) [22]. Заметим, что l углов $\{\beta_i\}$ полностью определяют взаимное расположение плоскостей π и τ: пара l-плоскостей π_1, τ_1 может быть переведена в пару l-плоскостей π_2, τ_2 движением пространства E^{l+p} тогда и только тогда, когда равны все соответствующие углы между плоскостями этих пар [152].

Определение. *Расстояние* между плоскостями π и τ равно

$$\rho^2(\pi, \tau) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i^2.$$

Во введенных в I.1 локальных координатах $Z = (\xi_i^\mu)_{i=1}^l{}_{\mu=1}^p$ линейный элемент этой метрики равен

$$ds^2 = \mathrm{Tr}\,((I_p + ZZ')^{-1}\, dZ\, (I_l + Z'Z)^{-1}\, dZ'),$$

где I_n — единичная ($n \times n$)-матрица, Tr — след, $'$ — транспонирование. Таким образом, на многообразии Грассмана $G(l, l+p)$ построена инвариантная риманова метрика [152]. Для метрического тензора имеем: $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = ((I_p + ZZ')^{-1})_\mu^\nu\, ((I + Z'Z)^{-1})_j^i$. В частности, в точке $Z = 0$

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j, \quad \text{т. е.} \quad ds^2|_0 = \sum_{i,\mu} (d\xi_i^\mu)^2.$$

Точно так же вводится метрика на $\mathbb{C}G(l, l+p)$: углы берутся в смысле эрмитова скалярного произведения в $\mathbb{C}^{l+p}$; соответственно, транспонирование в определении ds^2 и в определении нормы оператора надо заменить на сопряжение. Многообразие Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ с такой метрикой является кэлеровым [102]. Многообразие $G^+(l, l+p)$ является накрывающим для $G(l, l+p)$, поэтому риманова структура на нем поднимается с $G(l, l+p)$ (хотя можно определить ее независимо по аналогичному правилу). Наконец, с помощью углов строится метрика на кватернионном многообразии Грассмана [152].

В локальных координатах η_i^α (см. II.1) метрика на многообразии Грассмана задается в виде [103]

$$ds^2 = \sum_{i,\alpha} \langle df_i, f_\alpha\rangle^2,$$

где $df_i = d\eta_i^j e_j + d\eta_i^\beta e_\beta$, откуда компоненты метрического тензора вблизи нуля:

$$g_{\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j}} = \delta^{\alpha\beta}\delta_{ij} + \eta_i^\alpha \eta_j^\beta + O(\eta^4).$$

Такой же вид имеет метрика и для $\mathbb{C}G(l, l+p)$ в соответствующих локальных координатах. Заметим, что координаты η_i^α являются геодезическими нормальными координатами с центром в точке 0.

Отметим, что установленные в II.1 диффеоморфизмы являются изометриями, т. е. как римановы пространства: $G(1, p+1) = \mathbb{R}R^p$, $G^+(1, p+1) = S^p$, $G^+(2, 4) = S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $G(l, l+p) = G(p, l+p)$ (то же для G^+, $\mathbb{C}G$, $\mathbb{H}G$) (см. III.4), $\mathbb{C}G(1, p+1) = \mathbb{C}P^p$, $\mathbb{H}G(1, p+1) = \mathbb{H}P^p$ (в последних трех равенствах речь идет уже о голоморфной (кватернионной) изометрии).

В [103] доказано, что введенная риманова инвариантная структура на G, G^+, $\mathbb{C}G$, $\mathbb{H}G$ — единственна, кроме $G^+(2, 4)$ (и $G(2, 4)$). А именно, для $G^+(2, 4)$ существует двупараметрическое семейство инвариантных римановых метрик:

$$ds^2 = \lambda(\langle f_3, df_1\rangle^2 + \langle f_3, df_2\rangle^2) + (\langle f_4, df_1\rangle^2 + \langle f_4, df_2\rangle^2) +$$
$$+ 2\mu(\langle f_3, df_1\rangle\langle f_4, df_2\rangle - \langle f_3, df_2\rangle\langle f_4, df_1\rangle), \ \lambda > |\mu|.$$

При $\lambda = 1$, $\mu = 0$ *получаем метрику, введенную выше.*

2. Тензор кривизны, секционная кривизна, замкнутые геодезические, множество раздела. Рассмотрим вид тензора кривизны многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ в локальных координатах $Z = (\xi_i^\mu)$ в окрестности нуля. Раскладывая компоненты метрического тензора в ряд по степеням ξ_i^μ в окрестности нуля, получим

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\rho}{k}} = \delta_k^i\delta_\nu^\rho\xi_i^\mu + \delta_k^j\delta_\mu^\rho\xi_i^\nu + O(\|Z\|^3),$$

в частности, в точке $Z = 0$ все символы Кристоффеля обращаются в нуль. Далее,

$$R_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}\binom{\rho}{k}\binom{\lambda}{r}}\Big|_{Z=0} = \delta_i^j\delta_k^r(\delta_\rho^\mu\delta_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\mu\delta_\rho^\nu) + \delta_\lambda^\mu\delta_\lambda^\rho(\delta_i^k\delta_j^r - \delta_i^r\delta_j^k).$$

В [153] приводится также вид тензора кривизны в произвольной точке многообразия Грассмана. Нетрудно видеть, что

$$(\nabla_{\binom{\sigma}{h}}R)_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}\binom{\rho}{k}\binom{\lambda}{r}}\Big|_{Z=0} = 0,$$

т. е. тензор кривизны ковариантно постоянен в точке 0, а значит, в силу инвариантного введения метрики $\nabla R \equiv 0$, т. е. многообразие Грассмана с такой метрикой есть локально симметрическое пространство.

Если $X = (x_i^\mu)$ и $Y = (y_i^\mu)$ — два касательных неколлинеарных вектора к $G(l, l+p)$ в точке $Z = 0$, записанные в виде $(l\times p)$-матриц, то для секционной кривизны будем иметь [103, 153]:

$$\bar{k}(X, Y) = \frac{1/2\,\mathrm{Tr}\,\Lambda_1\Lambda_1' + 1/2\,\mathrm{Tr}\,\Lambda_2\Lambda_2'}{\mathrm{Tr}\,XX'\,\mathrm{Tr}\,YY' - (\mathrm{Tr}\,XY')^2},$$

где $\Lambda_1 = XY' - YX'$, $\Lambda_2 = X'Y - Y'X$ — кососимметрические матрицы. Из этой формулы сразу следует, что кривизна многообразия Грассмана неотрицательна. Средствами линейной алгебры можно показать, что она не превосходит 2 [153, 156, 16]. Вычисляя тензор Риччи, получаем, что многообразие Грассмана эйнштейново [103]:

$$\mathrm{Ric} = (l+p-2)\,g,$$

соответственно скалярная кривизна постоянна и равна $(l+p-2)\,lp$.

Аналогичным образом строится тензор кривизны на кватернионном и комплексном многообразии Грассмана. Секционная кривизна выражается такой же формулой с заменой транспонирования комплексным сопряжением. Она изменяется в пределах $[0, 4]$ (при $l, p > 1$). Вонг [152, 153] получил также формулу для голоморфной кривизны $\mathbb{C}G(l, l+p)$. В точке 0 в направлении dZ она равна

$$\Omega = \frac{2\operatorname{Tr}(dZ\, dZ^*\, dZ\, dZ^*)}{[\operatorname{Tr}(dZ\, dZ^*)]^2}.$$

Исследованы площадки минимальной и максимальной секционной кривизны. В частности, для $G^+(l, l+p)$ $(G(l, l+p))$ максимум секционной кривизны 2 достигается только для двумерной плоскости, касательной к одной из сфер в $G^+(2, 4) = S^2 \times S^2$, вполне геодезически вложенном в $G^+(l, l+p)$ (IV.2). Голоморфная кривизна многообразия $\mathbb{C}G(l, l+p)$ изменяется в пределах $[2/r, 2]$, $r = \min(l, p)$.

В локальных координатах $Z = (\xi_i^\mu)$ на многообразии Грассмана $G(l, l+p)$ уравнения геодезических имеют вид [152]

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z'(I + ZZ')^{-1}\dot{Z} = 0$$

(точка обозначает дифференцирование по аффинному параметру). Кривая будет геодезической тогда и только тогда, когда она является однопараметрическим семейством l-плоскостей в E^{l+p} таких, что углы между любыми двумя близкими плоскостями пропорциональны фиксированному набору чисел $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}(\tau_i \geqslant 0)$. Любые две точки на $G(l, l+p)$ можно соединить отрезком геодезической длины не больше, чем $\min(\sqrt{l}, \sqrt{p})\,\pi/2$. Рассматриваются замкнутые геодезические. В частности, показано, что длина любой замкнутой геодезической есть $\sqrt{n}\pi$. Кратчайшие из них — длины π — конгруэнтны между собой. В частности, радиус инъективности многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ равен $\pi/2$.

В [154] Вонгом изучено множество раздела для многообразия Грассмана, т. е. множество первых сопряженных точек на геодезических, выходящих из одной точки в различных направлениях. Если $\pi_0 \in G(l, l+p)$ — фиксированная точка, то ее множество раздела есть $V_2 \cup \tilde{V}_1$ при $l < p$; $V_2 \cup \tilde{V}_2$ при $l = p$; $V_2 \cup \tilde{V}_{l-p+1}$ при $l > p$, где

$$V_i = \{\pi \in G(l, l+p)\colon \dim(\pi \cap \pi_0^\perp) \geqslant i\},$$
$$\tilde{V}_i = \{\pi \in G(l, l+p)\colon \dim(\pi \cap \pi_0) \geqslant i\}.$$

В частности, для $G(2, 4)$ имеем $\pi_0 \cup \pi_0^\perp$. Аналогичные результаты получены для $\mathbb{C}G$ и $\mathbb{H}G$.

Изучение геометрии многообразий Грассмана на языке плоскостей содержится также в [151, 101]. В [106] на $\mathbb{C}G$ вводится некоторое тензорное поле, связанное с кэлеровой структурой — оказывается, что наличие на кэлеровом многообразии такого поля характеризует его как комплексное многообразие Грассмана (или евклидово пространство).

В [105, 129] строится риманова геометрия бесконечномерных многообразий Грассмана (плоскостей, проходящих через начало координат в комплексном и вещественном гильбертовом пространстве).

3. Еще раз о плюккеровом вложении. Плюккерово вложение (II.3) обладает рядом интересных геометрических свойств. А именно, имеет место

Утверждение 1. *Вложение многообразия Грассмана в евклидово пространство с помощью плюккеровых координат является:*

1) *изометрическим и*

2) *эквивариантным (т. е. группа изометрий многообразия Грассмана является подгруппой движений объемлющего евклидова пространства).*

Полученная поверхность будет:

3) *минимальна в сфере,*

4) *иметь постоянную длину второй квадратичной формы* [63] *и ее грассманово отображение будет:*

5) *гомотетичным и*

6) *гармоническим* (см. V).

Рассмотрим для определенности вложение $G^+(l, l+p) \to S^N \subset E^{N+1}$, где $N = C^l_{l+p} - 1$. Группа Ли изометрий многообразия $G^+(l, l+p)$ как симметрического пространства (см. IV) есть $SO(l+p)$.

Для l-плоскости $\pi \in G^+(l, l+p)$, натянутой на векторы $(x_1, \ldots, x_l)$, построим $(l \times l+p)$-матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1l+p} \\ \ldots\ldots \\ x_{l1} \ldots x_{ll+p} \end{pmatrix},$$

компоненты которой — вектор-строки $(x_1, \ldots, x_l)$. Положим

$$p_{i_1 \ldots i_l} = \det \begin{vmatrix} x_{1i_1} \ldots x_{1i_l} \\ \ldots\ldots \\ x_{li_1} \ldots x_{li_l} \end{vmatrix}, \quad P_{i_1 \ldots i_l} = \frac{p_{i_1 \ldots i_l}}{\sqrt{\sum\limits_{j_1 < \ldots < j_l} (p_{j_1 \ldots j_l})^2}}$$

$(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant l+p)$. Функции $\{P_{i_1 \ldots i_l}: 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant l+p\}$ и задают плюккерово вложение.

Пусть $U \in SO(l+p)$ — элемент группы изометрии. Под действием U l-плоскость π переходит в некоторую l-плоскость π'. Имеем: $X \to XU'$, $p_{i_1 \ldots i_l} \to u^{j_1}_{i_1} u^{j_2}_{i_2} \ldots u^{j_l}_{i_l} p_{j_1 \ldots j_l}$ (где u^j_i — элементы матрицы U). Для двух векторов p и q евклидова пространства E^{N+1} имеем

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i_1 < \ldots < i_l} p_{i_1 \ldots i_l} q_{i_1 \ldots i_l} = \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l} P_{i_1 \ldots i_l} q_{i_1 \ldots i_l} \to$$

$$\to \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l} u^{k_1}_{i_1} \ldots u^{k_l}_{i_l} u^{j_1}_{i_1} \ldots u^{j_l}_{i_l} p_{k_1 \ldots k_l} q_{j_1 \ldots j_l} =$$

$$= \frac{1}{l!} \delta^{k_1 j_1} \ldots \delta^{k_l j_l} p_{k_1 \ldots k_l} q_{j_1 \ldots j_l} = \langle p, q \rangle.$$

Поэтому

$$P_{i_1 \ldots i_l} \to u^{j_1}_{i_1} \ldots u^{j_l}_{i_l} P_{j_1 \ldots j_l}$$

очевидно, собственно ортогональное преобразование в E^N, т. е. $SO(l+p) \subset \subset SO(N)$ — плюккерово вложение эквивариантно (2), отсюда следует 4)). Значит, достаточно исследовать все его свойства в одной точке. Возьмем точку π_0 с $\xi^\mu_i = 0$. Для близкой к π_0 плоскости π будем иметь, что она натянута на вектор-строки матрицы

$$(I_l \mid Z).$$

Отсюда $p_{1 \ldots l} = 1$; $p_{1 \ldots \hat{k} \ldots l\, l+m} = (-1)^{l+k} \xi^m_k$ (шляпка обозначает, что индекс k выкинут); $p_{1 \ldots \hat{k} \ldots \hat{r} \ldots l\, l+m\, l+s} = (-1)^{k+r+1} \cdot (\xi^m_k \xi^s_r - \xi^m_r \xi^s_k)$ $(k < r,\ m < s)$; все остальные $p_{i_1\ldots i_l}$ есть $o(\xi^2)$. Тогда

$$1\Big/\sqrt{\sum_{i_1<\ldots<i_l} p^2_{i_1\ldots i_l}} = \left[\sqrt{1+\sum_{m,\,k}(\xi_k^m)^2+o(\xi^2)}\right]^{-1} = 1-\frac{1}{2}\sum_{m,\,k}(\xi_k^m)^2+o(\xi^2),$$

откуда

$$P_{1\ldots l} = 1-\frac{1}{2}\sum_{m,\,k}(\xi_k^m)^2+o(\xi^2),$$

$$P_{1\ldots\hat{k}\ldots ll+m} = (-1)^{l+k}\,\xi_k^m+o(\xi^2),$$

$$P_{1\ldots\hat{k}\ldots\hat{r}\ldots ll+ml+s} = (-1)^{k+r+1}(\xi_k^m\xi_r^s-\xi_r^m\xi_k^s)+o(\xi^2),$$

$$P_{i_1\ldots i_l} = o(\xi^2) \quad \text{для всех остальных.}$$

Вычисляя теперь первую и вторую квадратичную форму в нуле и пользуясь эквивариантностью, легко доказываем 1), 3) и 5) (см. V.1). Свойство 6) следует из 3) (см. V.4).

4. $G^+(2, n)$ как кэлерово многообразие. Многообразия Грассмана $G^+(2, n)$ допускают кэлерову структуру, строящуюся следующим образом (см. Д. Хоффман, Р. Оссерман [82], а также С. С. Черн [65]).

В 2-плоскости из E^{p+2} рассмотрим ориентированный базис (u, v) векторов таких, что $u \perp v$ и $\|u\| = \|v\|$, и положим $w = u + iv \in \mathbb{C}^{p+2}$. Два комплексных вектора w и w' задают одну и ту же плоскость тогда и только тогда, когда $w' = \lambda w$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Поэтому корректно определено отображение $G^+(2, p+2) \to \mathbb{C}P^{p+1}$. Легко видеть, что $w^2 = (\|u\|^2 - \|v\|^2) + 2i\langle u, v\rangle = 0$ (квадрат комплексного вектора понимается как сумма квадратов координат). Поэтому получаем отображение $G^+(2, p+2) \to Q_p$, где Q_p — «комплексная сфера» в $\mathbb{C}P^{p+1}$: в однородных координатах $Q_p = \left\{(z_1, \ldots, z_{p+2}) \in \mathbb{C}P^{p+1} : \sum_j z_j^2 = 0\right\}$. Построенное отображение является глобальной изометрией между $G^+(2, p+2)$ и Q_p, если на Q_p задана метрика, индуцированная из метрики Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P^{p+1}$ (в однородных координатах:

$$ds^2 = 2\sum_{j<k}|z_j\,dz_k - z_k\,dz_j|^2\Big/\Big(\sum_j |z_j|^2\Big)^2\Big)$$

Диффеоморфизм $G^+(2, 4) \to S^2 \times S^2$, построенный в II.3, оказывается изометрией. А именно, сфера $Q_2 \subset \mathbb{C}P^3$ может быть задана в однородных координатах как

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\xi - \dfrac{1}{\xi}\right), \\ z_2 = \dfrac{1}{2i}\left(\xi + \dfrac{1}{\xi}\right), \\ z_3 = \dfrac{i}{2}\left(\eta - \dfrac{1}{\eta}\right), \\ z_4 = \dfrac{1}{2}\left(\eta + \dfrac{1}{\eta}\right), \end{cases} \qquad (\xi, \eta) \in \bar{\mathbb{C}}^2.$$

Тогда индуцированная метрика на $G^+(2, 4)$ есть $ds^2 = \dfrac{2|d\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2} + \dfrac{2|d\eta|^2}{(1+|\eta|^2)^2}$, т. е. $G^+(2, 4)$ изометрично произведению двух сфер $S^2 \times S^2$ радиусов $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, многообразия Грассмана $G^+(2, n)$ являются эрмитовыми симметрическими пространствами (и только они из вещественных многообразий Грассмана — [44, 24]; более того, только они допускают кэлерову структуру).

Кэлерова структура на $G^+(2, n)$ использовалась в [56, 52, 53] Ченом и Лу для изучения некоторых подмногообразий в $G^+(2, n)$. В частности, в [52] классифицированы двумерные вполне геодезические подмногообразия в $G^+(2, n)$, а в [56] доказано, что в $G^+(2, n)$ $(n \geqslant 5)$ нет внешних сфер коразмерности 2 (значительно более общие результаты и терминологию см. в IV.2). В [53] показано, что кэлерово подмногообразие в $Q_n = G^+(2, n+2)$ с плоской нормальной связностью есть $Q_2 = G^+(2,4) = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 = S^2 \times S^2$.

В работах [54, 86, 82] рассмотрена геометрия самого Q_n — внутренняя и как подмногообразия в $\mathbb{C}P^n$. А именно, согласно [54] кэлерово подмногообразие M в $\mathbb{C}P^n$ скалярной кривизны m^2 имеет скалярную нормальную кривизну $\geqslant m$, причем случай равенства имеет место лишь для комплексной сферы $Q_m \subset \mathbb{C}P^{m+1} \subset \mathbb{C}P^n$. В [86] установлено, что Q_n полностью характеризуется спектром своего комплексного лапласиана на (1,1)-формах (при $n = 1$ и $n \geqslant 6$).

В [82] изучается взаимное расположение $Q_n \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ и касательных или пересекающихся Q_n плоскостей.

В работах [127, 128] рассмотрены поля Якоби, геодезические сферы и их вторые квадратичные формы в $G^+(2, n)$, а также тензорные поля специального вида, хорошо согласованные с кэлеровой и симметрической структурой.

Как факт, наличие кэлеровой структуры на многообразии Грассмана $G^+(2, n)$ дает мощные средства исследования грассманова образа двумерных поверхностей (особенно минимальных) (см. V.3, 4).

IV. Многообразия Грассмана как симметрические пространства

1. Структура симметрического пространства. Многообразие Грассмана является компактным глобально-симметрическим пространством [44, 24].

Рассмотрим многообразие $G(l, l+p)$. На нем транзитивно действует группа $O(l+p)$. Группой изотропии точки $\pi \in G(l, l+p)$ является $O(l) \times O(p)$, где $O(l)$ действует в l-мерной плоскости π, $O(p)$ — в ее ортогональном дополнении. Таким образом, $G(l, l+p)$ — однородное пространство $O(l+p)/O(l) \times O(p)$.

Введем в E^{l+p} систему координат и выберем плоскость π_0: $x^{l+1} = \ldots$ $\ldots = x^{l+p} = 0$. Тогда группа изотропии есть группа матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right),$$

$U \in O(l)$, $V \in O(p)$. Определим теперь инволютивный автоморфизм σ: $O(l+p) \to O(l+p)$ так:

$$\sigma(A) = SAS^{-1}, \qquad \text{где } S = \left(\begin{array}{c|c} -I_l & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right).$$

Он превращает $G(l, l+p)$ в симметрическое пространство. Каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ есть $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(l+p)$ — пространство кососимметрических $(l+p)$-матриц,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(l) + \mathfrak{o}(p) = \left\{\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right), U \in \mathfrak{o}(l), V \in \mathfrak{o}(p)\right\},$$

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -X' \\ \hline X & 0 \end{array} \right), X - (l \times p)\text{-матрица} \right\}$$

($'$ — транспонирование) — касательное lp-мерное пространство к $G(l, l+p)$.

Скалярное произведение $\langle A, B \rangle = {}^1/_2 \operatorname{Tr}(AB')$ $(A, B \in \mathfrak{m})$ $O(p) \times O(l)$ — инвариантно и индуцирует на $G(l, l+p)$ инвариантную метрику (оно пропорционально сужению на $\mathfrak{m}$ метрики Киллинга в $\mathfrak{o}(l+p)$). Оператор кривизны имеет вид $R(A, B) = -[A, B]$, и секционная кривизна $G(l, l+p)$ в точке π_0 на площадке $A \wedge B \subset \mathfrak{m}$ есть

$$\frac{\langle [A, B], [A, B] \rangle}{\langle A, A \rangle \langle B, B \rangle - (\langle A, B \rangle)^2}.$$

Если

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -X' \\ \hline X & 0 \end{array} \right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -Y' \\ \hline Y & 0 \end{array} \right),$$

это

$$\bar{k}(A, B) = \frac{1/2 \operatorname{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_1') + 1/2 \operatorname{Tr}(\Lambda_2 \Lambda_2')}{\operatorname{Tr}(XX') \operatorname{Tr}(YY') - (\operatorname{Tr}(XY'))^2},$$

где $\Lambda_1 = XY' - YX'$, $\Lambda_2 = X'Y - Y'X$ — как и в III.2.

Ранг $G(l, l+p)$ — размерность максимального плоского вполне геодезического подмногообразия — равен $\min(l, p)$. Соответствующее подмногообразие является плоским тором $\operatorname{Exp} \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m}$ можно взять так:

$$\mathfrak{s} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -X' \\ \hline X & 0 \end{array} \right), \quad X = \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & x_p & \end{array} \right), \quad x_j \in \mathbb{R} \right\}$$

($p \leqslant l$, аналогично при $p > l$).

Аналогичным образом получаем

$$G^+(l, l+p) = SO(l+p)/SO(l) \times SO(p),$$
$$\mathbb{C}G(l, l+p) = SU(l+p)/SU(l) \times SU(p),$$
$$\mathbb{H}G(l, l+p) = Sp(l+p)/Sp(l) \times Sp(p)$$

(SO, SU, Sp — ортогональные унитарные и симплектические группы матриц).

Все перечисленные многообразия Грассмана (кроме $G^+(2, 4) = S^2 \times S^2$) неприводимы и эйнштейновы.

Отметим, что многообразие Грассмана является симметрическим R-пространством в смысле Нагано [118]. На этом основано его вложение в сферу и евклидово пространство (см. IV.3).

В [20] Вольфом классифицированы «пространственные формы» в многообразии Грассмана — фактор-пространства по дискретной группе движений (ранее — [150]). Симметрическая структура на грассмановых многообразиях рассмотрена также в [78], где строятся вещественные модели $\mathbb{C}G$ и $\mathbb{H}G$. Известный результат Е. Калаби о конгруэнтности изометричных голоморфных кривых в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ обобщен Гриффитсом [79] для комплексных многообразий Грассмана.

2. Вполне геодезические и вполне омбилические подмногообразия. Согласно критерию Картана [44], вполне геодезические подмногообразия в симметрических пространствах являются экспонентами тройных систем Ли в касательном пространстве; подпространство $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m}$ называется *тройной системой Ли*, если $[[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}], \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Поэтому вопрос об отыскании вполне геодезических подмногообразий в симметрическом пространстве, в частности в многообразии Грассмана, в принципе сводится к линейно-алгебраической задаче.

В [55] Чен и Нагано с помощью (M_+, M_-)-метода полностью классифицировали полные вполне геодезические подмногообразия в $G^+(2, p+2) = SO(p+2)/SO(p) \times SO(2)$:

Теорема 1. *Всякое вполне геодезическое подмногообразие (полное и максимальное по включению) в* $G^+(2, p+2)$ *есть либо*

1. $G^+(2, p+1)$, *стандартно вложенное в* $G^+(2, p+2)$, *либо*
2. *произведение сфер* $S^q \times S^r$, $q+r=p$, $q, r \geqslant 0$, *либо*
3. $\mathbb{C}P^{n+1}$, *где* $n=[p/2]$.

Отметим в связи с этим, что $G^+(2, 5)$ содержит вполне геодезическую двумерную сферу, вложенную как грассманов образ поверхности Веронезе $V^2 \subset S^4 \subset E^5$ (см. VI.3), неконгруэнтную сферам из п. 2 теоремы 1 и не лежащую в $G^+(2, 4)$. Ранее двумерные вполне геодезические подмногообразия в $G^+(2, n)$ классифицированы в [52]. Частный случай $S^p \times S^q \subset G^+(2, n)$ рассмотрен в [117].

Легко устанавливается, что вложение $E^{l+p-1} \subset E^{l+p}$ дает вполне геодезическое вложение $G(l, l+p-1) \subset G(l, l+p)$. Аналогично, $G(l-1, l+p-1)$ вполне геодезично вкладывается в $G(l, l+p)$ как множество всех l-мерных плоскостей в E^{l+p}, проходящих через фиксированную прямую. Таким образом, для $l' \leqslant l$, $p' \leqslant p$ имеем вполне геодезические вложения $G(l', l'+p') \subset G(l, l+p)$. То же верно для G^+, а также для комплексных и кватернионных многообразий Грассмана [152].

В частности, если $\lambda = \max(l, p)$, то в $G(l, l+p)$ получаем с помощью описанной конструкции вполне геодезическое проективное пространство $\mathbb{R}P^\lambda = G(1, \lambda)$ (в $G^+(l, l+p)$ — сферу S^λ). Как показано в [55], λ есть максимальная размерность вполне геодезической сферы в многообразии Грассмана. При $l \neq p$ всякая вполне геодезическая сфера S^λ (проективное пространство $\mathbb{R}P^\lambda$) получается применением описанной выше конструкции. При $l = p$ в многообразии Грассмана есть вполне геодезические сферы максимальной размерности, неконгруэнтные вышепостроенным: например, $S^2 \subset G^+(2, 4)$, реализованная как $\mathbb{C}P^1$, или $S^4 \subset G^+(4, 8)$, как $\mathbb{H}P^1$, или $S^8 \subset G^+(8, 16)$, как CayP^1.

Вольф [148, 149] полностью классифицировал вполне геодезические подмногообразия в многообразии Грассмана, состоящие из попарно изоклинных плоскостей (две плоскости называются *изоклинными*, если все углы между ними равны). Тогда любые две плоскости имеют нулевое пересечение. Устанавливается

Теорема 2. *Вполне геодезическое подмногообразие в многообразии Грассмана* $G(l, l+p)$ $(p \geqslant l)$, *состоящее из плоскостей, имеющих попарно нулевое пересечение, изометрично КРОСПу (кроме проективной плоскости Кэли).*

Все такие подмногообразия классифицированы с точностью до движений многообразия Грассмана; такой же результат справедлив и для комплексных и кватернионных многообразий Грассмана.

Отметим, что все компактные симметрические пространства допускают вполне геодезическое вложение в грассманово многообразие достаточно большой размерности (по поводу нижних границ этой размерности см. [55]). Рассматривая, например, $E^{2(l+p)}$ как $\mathbb{C}^{l+p}$, получим естественное вполне геодезическое вложение $\mathbb{C}G(l, l+p) \subset G^+(2l, 2l+2p)$ (обобщает п. 3 теоремы 1). В [55] также описаны максимальные вполне геодезические подмногообразия в $\mathbb{C}G(m, n)$ и $\mathbb{H}G(m, n)$.

Содержательные нетривиальные примеры вполне геодезических подмногообразий в многообразии Грассмана дают грассмановы образы поверхностей с параллельной второй квадратичной формой (VI.3, IV.3).

Вопрос о вполне омбилических подмногообразиях в симметрических пространствах изучался Ченом [58]. Подмногообразие $M \subset N$ называется *вполне омбилическим*, если его вторая квадратичная форма пропорциональна первой, т. е. $h = gH$, где H — вектор средней кривизны. Если при этом $\nabla^{\perp} H = 0$, т. е. вектор средней кривизны параллелен в нормальной связности и $H \neq 0$, то подмногообразие называется *внешней сферой*.

Теорема 3 (Чен [57]). *Внешняя сфера в симметрическом пространстве является внешней гиперсферой во вполне геодезическом подмногообразии постоянной кривизны и сама имеет постоянную кривизну* (доказательство этой теоремы содержало неточности, устраненные в готовящейся к печати работе Ю. А. Николаевского).

В частности, для многообразия Грассмана размерность внешней сферы $\leqslant \max(l, p) - 1$. Для вполне омбилических подмногообразий в симметрическом пространстве получена точная оценка на коразмерность: в частности, для неприводимого симметрического пространства $\operatorname{codim} M \geqslant rg\ N$. Тем не менее известны примеры точности этой оценки лишь на вполне геодезических подмногообразиях. Вопрос о нетривиальных вполне омбилических подмногообразиях не решен. Известно, например, что в $S^n \times E^1$ есть вполне омбилическая гиперповерхность с непостоянной средней кривизной (см. ниже). Вкладывая это пространство вполне геодезически в $G(l, l+p)$ (это возможно при $n \leqslant \lambda - 1$), когда l или p больше 2 и при $n = 2$ в $G(2, 4)$), получим вполне омбилическое подмногообразие, не являющееся внешней сферой.

Вопрос о классификации вполне омбилических подмногообразий в конкретных симметрических пространствах решен был лишь для пространств постоянной кривизны и КРОСПов. В [37] Ю. А. Николаевский получил классификацию вполне омбилических подмногообразий в многообразии Грассмана $G^+(2, n)$ (и в $G(2, n)$ — классификация локальна).

Существенно вполне омбилическим назовем вполне омбилическое подмногообразие, не являющееся внешней сферой или вполне геодезическим. *Стандартной сферой* назовем вполне геодезическую сферу $G^+(1, m) \subset G^+(2, n)$ — такая конструкция строилась выше. В частности, сферы S^p и S^q из п. 2 теоремы 1 стандартны. *Сферой-диагональю* назовем вполне геодезическую сферу-диагональ риманова квадрата: $S^m \subset S^m \times S^m \subset S^p \times S^q \subset G^+(2, n)$ (все включения вполне геодезичны). Имеет место

Теорема 4. *Пусть* $F^l \subset G^+(2, n)$ $(l \geqslant 3)$ *вполне омбилично; тогда*

1. F^l *вполне геодезично* (теорема 1), *либо*

2. F^l — *внешняя сфера — является малой сферой на*: а) *сфере-диагонали* $S^{l+1} \subset G^+(2, n)$ *или* б) *стандартной сфере* $S^{l+1} \subset G^+(2, n)$, *либо*

3. F^l *существенно вполне омбилично и тогда*: а) F^l — *вполне омбилическая гиперповерхность непостоянной средней кривизны в* $S^l \times S^1 \subset G(2, n)$ *или* б) F^l — *вполне омбилическое подмногообразие постоянной средней и секционной кривизны в* $S_1^{l+1} \times S_2^{l+1} \subset G(2, n)$.

Все включения в 2а), 2б), 3а), 3б) вполне геодезические. Полностью описаны подмногообразия типа 3а) и 3б). В случае 3а), переходя к универсальной накрывающей, получим омбилическую гиперповерхность непостоянной средней кривизны в цилиндре $S^l \times E^1$ — она является «поверхностью вращения», т. е. расслаивается на малые сферы $S^{l-1}(R) \subset S^l$, имеющие центр на одной образующей, и задается уравнением $\cos R = Ae^t + Be^{-t}$ $(AB < 1/4,\ A^2 + B^2 \neq 0)$. В случае 3б) получаем «косую диагональ» в специальным образом построенном произведении двух малых сфер $S_1^l(R) \subset S_1^{l+1}$ и $S_2^l(r) \subset \subset S_2^{l+1}$ разных радиусов: $R \neq r$.

Идея доказательства теоремы 4 состоит в изучении касательного пространства к F^l и выделении подрасслоения, инвариантного относительно дифференцирования в нормальной связности.

3. Стандартные вложения многообразий Грассмана в евклидово пространство. В III.3 было построено изометрическое вложение многообразия Грассмана в евклидово пространство с помощью плюккеровых координат и рассмотрены его свойства. Коразмерность такого вложения равна C_{l+p}^l+1-lp. Существует значительно более экономное вложение грассмановых многообразий в евклидово пространство, использующее симметрическую структуру на них.

Опишем сначала общую конструкцию (Нагано [118], Такеучи, Кобаяси [137], Кобаяси [99]). Пусть L — связная вещественная некомпактная полупростая группа Ли, $\mathfrak{l}$ — ее алгебра Ли, $K \subset L$ — максимальная компактная подгруппа, $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ — разложение Картана. Пусть $E \in \mathfrak{p}$ таков, что ad_E полупрост и имеет собственные значения ± 1, 0. Наконец, если $H \subset K$ подгруппа такая, что $H = \{h \in K\colon \mathrm{ad}_h E = E\}$, то отображение $k \in K \to \mathrm{ad}_K E \in \mathfrak{p}$ индуцирует изометрическое эквивариантное вложение симметрического пространства $K/H \to \mathfrak{p}$ в евклидово пространство.

Симметрические пространства, получающиеся таким образом, называются *R-пространствами*, описанное вложение — стандартным вложением. К симметрическим R-пространствам относятся все классические компактные симметрические пространства, проективная плоскость Кэли и три особых пространства.

Утверждение 2. *Описанные выше вложения являются*:

1) *изометрическими* [118],

2) *эквивариантными* [118].

Полученная поверхность:

3) *лежит в гиперсфере и минимальна в ней* [137],

4) *внешне симметрична* (*симметрия относительно нормального пространства в любой точке отображает ее на себя*) [75],

5) *имеет параллельную вторую квадратичную форму* (см. VI.3) [73, 74],

6) *является «жесткой»* (tight) (*т. е. с наименьшей полной абсолютной кривизной*) [137, 95]; *ее грассманово отображение* (см. V):

7) *гомотетично* [140],

8) *вполне геодезично* (*т. е. грассманов образ — вполне геодезичен и геодезические переходят в геодезические*) [140],

9) *гармонично* [132].

Согласно Ферусу [73] имеет место

Теорема 5. *Для регулярной поверхности в евклидовом пространстве следующие требования эквивалентны*:

а) *вторая квадратичная форма параллельна*;

б) *поверхность внешне симметрична*;

в) *поверхность является произведением стандартно вложенных симметрических R-пространств или цилиндром над ним.*

Возвратимся теперь к многообразию Грассмана $G(l, l+p)$. Пусть $L = SL(l+p)$ — некомпактная группа Ли, $K = O(l+p)$ — ее компактная подгруппа, $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли $(l+p) \times (l+p)$-матриц со следом нуль и кососимметричных, соответственно $\mathfrak{p}$ — пространство симметричных $(l+p) \times (l+p)$ матриц с нулевым следом.

Положим

$$E = \left(\begin{array}{c|c} aI_l & 0 \\ \hline 0 & bI_p \end{array}\right) \in \mathfrak{p}, \qquad a = -\frac{p}{p+l}, \qquad b = \frac{l}{p+l}.$$

Очевидно, E обладает требуемыми свойствами. Тогда отображение $A \in O(l+p) \to AEA' \in \mathfrak{p}$ индуцирует стандартное вложение $G(l, l+p) \to \mathfrak{p}$. Коразмерность этого вложения равна $\frac{(l+p)(l+p+1)}{2} - 1 - lp$.

Взяв в качестве (L, K) пары $(SL(p+l, \mathbb{C}), U(p+l))$, $(SU^*(2p+2l), Sp(p+l))$, получим вложение комплексных и кватернионных многообразий Грассмана в пространства эрмитовых $(l+p)\times(l+p)$-матриц с нулевым следом над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ соответственно (E — то же самое, $A \to AEA^*$).

В (Агаока, Канеда [46]) рассмотрен вопрос о невложимости симметрических пространств в евклидово пространство. Доказано, что многообразие Грассмана $G(l, l+p)$ $(l \geqslant p \geqslant 1)$ изометрически (локально, даже «в точке») невложимо с коразмерностью $[pl/2] - 1$, если p четно, или $2p \geqslant l \geqslant p$, $(p-1)\,l/2 + p$, если $l > 2p$, p нечетно.

4. Обобщения многообразий Грассмана. Многообразия Грассмана обобщаются в двух направлениях: как множество вполне геодезических подмногообразий в римановых или псевдоримановых пространствах и как грассмановы расслоения.

В [119] Обатой построены многообразия Грассмана над сферой и пространством Лобачевского. Скажем, для сферы S^{l+p} будем брать всевозможные вполне геодезические большие сферы размерности l. Получим многообразие $SG(l, l+p)$. Оно, очевидно, изометрично $G(l+1, l+p+1)$ (соответствие устанавливается между большой сферой S^l и $(l+1)$-мерной плоскостью, проходящей через начало координат в $E^{l+p+1} \supset S^{l+p}$ и содержащей S^l).

Аналогично, множество всех вполне геодезических $L^l \subset L^{l+p}$ дает многообразие Грассмана $LG(l, l+p) = O(1, l+p)/O(1, l) \times O(p)$ (здесь $O(1, n)$ — псевдоортогональная группа).

Эти случаи могут быть построены одинаково с помощью следующей конструкции: пусть V — это S^{l+p}, E^{l+p} или L^{l+p}; $G(l+p)$ — группа его изометрий: $O(l+p+1)$, $E(l+p)$ или $O(1, l+p)$. Тогда многообразие Грассмана $VG(l, l+p)$ l-мерных вполне геодезических подмногообразий в V представимо как симметрическое пространство $G(l+p)/G(l) \times O(p)$ (в евклидовом случае метрика Киллинга получается вырожденной, поэтому приходится отождествлять параллельные l-плоскости).

Аналогичная конструкция приводит в [116] к построению комплексных многообразий Грассмана над комплексными пространственными формами $V = \mathbb{C}P^{l+p}$, $\mathbb{C}^{l+p}$, $L^{l+p}(\mathbb{C})$. Множество вполне геодезических кэлеровых подмногообразий комплексной размерности l допускает структуру эрмитова симметрического пространства $G(l+p)/G(l) \times U(p)$ (где $G(n) = U(n+1)$, $E(n)$, $U(1, n)$ — группа изометрий V соответственно). Как и в вещественном случае, для $V = \mathbb{C}^{l+p}$ требуется дополнительно отождествить параллельные l-плоскости $\mathbb{C}^l$ в $\mathbb{C}^{l+p}$.

Дальнейшие обобщения многообразий Грассмана на множества вполне геодезических подмногообразий риманова пространства даст достаточно бедные структуры, т. к. по аксиоме плоскостей Картана только пространства постоянной кривизны допускают в каждой размерности вполне геодезическое подмногообразие, проходящее через произвольную точку и имеющее в ней данное касательное пространство.

В псевдоевклидовом случае также строится многообразие Грассмана

$G(l, l+p)^{k,r}$ как множество l-мерных подпространств индекса k в псевдоевклидовом $E^{l+p,r}$ (см. [29]). На нем можно определить инвариантную псевдориманову структуру, совпадающую при $k=r=0$ с обычной. Полученное многообразие Грассмана является эйнштейновым (с тем же коэффициентом пропорциональности). В [30, 31] изучаются некоторые свойства его подмногообразий при $l=2$. В [77] построено многообразие Грассмана над полуевклидовым пространством (метрический тензор имеет положительные, отрицательные и нулевые собственные значения), дано описание его как множества плоскостей и как однородного пространства. В [88, 89] рассматриваются флаговые многообразия $G(l, p, q) = O(l+p+q)/O(l) \times O(p) \times \times O(q)$ (аналогично для псевдоевклидова случая) пар ортогональных l- и p-мерных подпространств в E^{l+p+q} (либо в псевдоевклидовом — тогда эти подпространства имеют фиксированный индекс). Строится инвариантная риманова (псевдориманова) метрика. Оказывается, что такая конструкция позволяет получить содержательные теоремы для грассманова образа (V.4). Еще один класс многообразий Грассмана в обобщенном смысле изучается в [108].

Весьма перспективным направлением обобщений кажутся грассмановы расслоения, строящиеся так: для риманова пространства M^{l+p} к каждой его точке Q прикрепляется многообразие Грассмана $G(l, l+p)$ l-мерных плоскостей, проходящих через точку Q в $T_Q M^{l+p}$ (С. Е. Козлов [25, 26, 27]). На этом расслоении вводится метрика, аналогичная метрике Сасаки касательного расслоения. А именно, квадрат расстояния между двумя близкими точками (Q_1, π_1) и (Q_2, π_2) ($\pi_1 \subset T_{Q_1}M$, $\pi_2 \subset T_{Q_2}M$) равен квадрату длины кратчайшей геодезической $\gamma = Q_1Q_2$ плюс квадрат расстояния в $G(l, l+p)$ (прикрепленном в точке Q_2 — на нем строится метрика, исходя из скалярного произведения в $T_{Q_2}M$ — т. е. углы между плоскостями берутся в индуцированной метрике) между плоскостью π_2 и параллельно перенесенной вдоль γ плоскостью π_1.

Рассмотрение расслоений содержится также в [72, 90].

V. Грассманов образ. Внутренняя геометрия

1. Индуцированная метрика. Гомотетичность. Грассманов образ (Gauss map) поверхности в евклидовом пространстве является естественным обобщением гауссова сферического отображения поверхностей $F^2 \subset E^3$.

Определение. Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная l-мерная поверхность в евклидовом пространстве. В каждой точке поверхности F^l построим касательную l-мерную плоскость и перенесем все эти плоскости параллельно в начале координат $0 \in E^{l+p}$. Получим некоторое подмножество в $G(l, l+p)$, называемое *грассмановым образом* поверхности F^l, отображение Γ: $F^l \to G(l, l+p)$ — грассманово отображение. Если поверхность ориентируема, то рассматривают также грассманово отображение Γ: $F^l \to G^+(l, l+p)$.

Пусть F^l — поверхность класса C^2, $Q \in F^l$. *Внешним нуль-индексом* ν поверхности F^l в точке Q в смысле Черна — Кейпера называется размерность максимального нулевого подпространства в T_QF^l для второй квадратичной формы F^l в точке Q. Нетрудно видеть, что требование $\nu = 0$ влечет невырожденность грассманова образа в точке $\Gamma(Q)$.

Если на всей поверхности $\nu = 0$, то $\Gamma(F^l)$ будет регулярным l-мерным подмногообразием в $G(l, l+p)$, и $rg\Gamma = l$ — максимальным.

Индуцированное отображение Γ_* касательных пространств задается так: если H^μ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$) — матрицы вторых квадратичных форм поверхности F^l в точке Q относительно ортонормированного базиса нормалей и в T_QF^l также выбран ортонормированный базис, то для $x \in T_QF^l$

$$\Gamma_* x = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -X' \\ \hline X & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{m} = T_{\Gamma(Q)}G(l, l+p),$$

$$X = \begin{pmatrix} H^1 x \\ H^2 x \\ \vdots \\ H^p x \end{pmatrix} \text{— } (l \times p)\text{-матрица}$$

(система координат в E^{l+p} выбрана так, что локальные координаты ξ_i^α плоскости $T_QF^l = \Gamma(Q)$ равны 0).

Утверждение 3 (Муто [110]). *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная поверхность с невырожденным грассмановым образом. Тогда индуцированная метрика на $\Gamma(F^l)$ имеет вид*

$$G_{ij} = \sum_{\mu=1}^{p} H_{ik}^{\mu} g^{kr} H_{rj}^{\mu},$$

где g^{kr} — обратная матрица к матрице метрического тензора.

Действительно, метрика на многообразии Грассмана задается как $ds^2 = \sum_{i,\alpha} \langle df_i, f_\alpha\rangle^2$ (III.1). Вдоль поверхности f_i — ортонормированный касательный базис, f_α — нормальный. Если $r = r(u^1, \ldots, u^l)$ — радиус-вектор поверхности, то $f_i = a_i^j \partial r/\partial u^j$, откуда $\langle df_i, f_\alpha\rangle = a_i^j H_{jk}^\alpha du^k$. Учитывая ортонормированность базиса f_i, получаем требуемое.

Поверхности с гомотетичным грассмановым отображением изучались в [113] И. Муто:

Теорема 6. 1. *Минимальная поверхность в гиперсфере имеет гомотетичное грассманово отображение тогда и только тогда, когда индуцированная метрика эйнштейнова.*

2. *Пусть грассманов образ гомотетичен. Тогда для трех условий:*

а) *грассманов образ вполне геодезичен,*

б) *грассманово отображение гармонично* (V.4),

в) *поверхность гаусс-критическая* (V.2) *будет* а) $\Rightarrow$ б), б) $\Leftrightarrow$ в). *Если индуцированная метрика эйнштейнова и поверхность минимальна в гиперсфере, то выполнено* в).

3. *Минимальная поверхность в гиперсфере с плоской индуцированной метрикой (она имеет гомотетичное грассманово отображение) имеет вполне геодезический грассманов образ тогда и только тогда, когда кривизна многообразия Грассмана вдоль грассманова образа тождественно равна нулю.*

Можно показать, что для поверхности $F^2 \subset E^4$ грассманово отображение является гомотетией тогда и только тогда, когда либо $F^2 = S^2 \subset E^3 \subset E^4$, либо поверхность F^2 — произведение двух плоских кривых ненулевой кривизны. В классе поверхностей с плоской нормальной связностью имеют гомотетичный грассманов образ лишь произведения гиперсфер и кривых (не обязательно плоских) равной постоянной кривизны.

Вилмс [140] доказал, что грассманово отображение поверхности с параллельной второй квадратичной формой (VI.3) геодезическое, т. е. грассманов образ вполне геодезичен и сохраняется аффинный параметр вдоль геодезических. Отсюда следует, в частности, что грассманово отображение является гомотетией (в неприводимом случае).

В [70, 71, 139] изучался грассманов образ поверхности $F^2 \subset E^4$ с плоской индуцированной метрикой и плоской нормальной связностью. В [139] показано, что грассманов образ несет плоскую метрику, в [70, 71] установлено, что он является произведением двух кривых на сферах $S^2 \times S^2 = G^+(2, 4)$ (ср. с замечанием перед теоремой 10, V.2).

В [119] М. Обата изучал грассманов образ поверхностей $F^l \subset S^{l+p}$ и $F^l \subset L^{l+p}$ (см. IV.4).

Теорема 7. *Пусть $F^l \subset V^{l+p}$ — поверхность в пространстве постоянной кривизны ε $(=\pm 1, 0)$, g — индуцированная метрика, Ric — форма Риччи, G — метрика на грассмановом образе, H^N — вторая квадратичная форма в направлении вектора средней кривизны. Тогда*

$$\mathrm{Ric} - H^N + G = \varepsilon\,(l-1)\,g.$$

Отсюда легко получить связь между конформностью грассманова образа ($G = c_1 g$), эйнштейновостью ($\mathrm{Ric} = c_2 g$) и псевдоомбиличностью ($H^N = c_3 g$), в частности, некоторые утверждения из теоремы 6. Теорема 7 обобщает формулу Эннепера классической дифференциальной геометрии.

Из теоремы 7 следует результат [115] о гомотетичности грассманова образа минимального вложения сферы в сферу (по де Кармо, Валлаху).

В [116] рассмотрен грассманов образ кэлеровой поверхности в кэлеровом пространстве постоянной голоморфной кривизны (см. IV.4) как множество всех касательных вполне геодезических кэлеровых подпространств. Доказана формула

$$\mathrm{Ric} - \xi\,(l+1)\,\Phi + G = 0;$$

здесь l — комплексная размерность поверхности, $\xi = 0, \pm 1$ — кривизна объемлющего пространства, Φ и G — фундаментальные 2-формы на поверхности и грассмановом образе соответственно, Ric — форма Риччи. Получены некоторые следствия. Близкие вопросы исследовались и в [91].

В [27] рассмотрены внутренние свойства грассманова образа двумерной поверхности F^2 в четырехмерном римановом пространстве M^4. Речь идет о грассмановом образе в расслоении $G^+(2, 4)$ над M^4, т. е. о расслоении с базой F^2 и слоем $T_Q F^2 \in \overset{+}{G_Q}(2, 4)$ $(Q \in F^2)$. В частности, рассмотрен случай конечного числа точек конформности. Геометрия грассманова образа в расслоении изучается также в [155] в произвольной размерности.

Строение грассманова образа поверхности $F^2 \subset E^4$ с использованием кэлеровой структуры на $G^+(2, 4) = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ рассматривалось в [134] (см. также V.3). Грассманов образ поверхностей коразмерности 2 в E^n и S^n и его связь с внешней геометрией изучались в [12].

Ю. А. Аминов изучал вопрос о грассмановом образе погружения пространства Лобачевского $L^l \subset E^{2l-1}$ ([2, 3, 8, 6, 10]). Общие результаты приведены в V.2, VI.1. Здесь остановимся на случае $L^3 \subset E^5$ [8, 10]. Имеем: $\Gamma(L^3) \subset G^+(3, 5) \subset S^9 \subset E^{10}$ (плюккерово вложение, см. III.3). В [10] получены дифференциальные уравнения радиус-вектора $\Gamma(L^3) \subset E^{10}$ и доказано, что они локально разрешимы. Изучены функционально вырожденные погружения $L^3 \to E^5$ и показано, что $\Gamma(L^3)$ не лежит ни в каком $E^7 \subset E^{10}$. В [8] получена система локального погружения $L^3 \subset E^5$ с гиперплоским грассмановым образом (т. е. $\Gamma(F^3) \subset E^9 \subset E^{10}$), доказано, что она вполне интегрируема, и приведены первые интегралы. Доказана теорема о невозможности изометрического класса C^3 погружения полного пространства Лобачевского L^3 в E^5 с семейством вполне геодезических поверхностей кривизны (это условие на погружение есть частный случай условия гиперплоскости грассманова образа).

2. Объем грассманова образа. Индуцированная метрика на грассмановом образе порождает элемент объема:

$$\omega(Q) = \sqrt{\det G}\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^l = \sqrt{\frac{\det G}{\det g}}\, dV,$$

где (u^i) — локальные координаты на F^l (и на $\Gamma(F^l)$), dV — элемент объема метрики g_{ij} на F^l.

В [121] Оссерман высказал предположение, что объем грассманова образа не превосходит полной кривизны поверхности (она равна $\int_F \tau(Q)\, dV$, где V — элемент объема на F, а $\tau(Q) = \frac{1}{C_{l+p-1}} \int_{S^{p-1}} |\det H^\xi|\, d\sigma_{p-1}$ — абсолютная кривизна Черна — Лашофа, здесь C_{l+p-1} — объем единичной сферы S^{l+p-1}, $d\sigma_{p-1}$ — элемент объема на сфере S^{p-1}, H^ξ —вторая квадратичная форма относительно нормали ξ). В [76] Ферусом получено доказательство этого неравенства, а именно, имеет место

Т е о р е м а 8. *Если* $\sigma(Q) = \frac{2}{C_l}\sqrt{\det G}$ *— элемент объема грассманова образа, то*

$$\sigma(Q) \geqslant \tau(Q),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда:

1) *точечная коразмерность поверхности F^l в точке Q (размерность первого нормального пространства) равна* 1, *либо*

2) *поверхность двумерна и вектор средней кривизны в точке равен нулю, либо*

3) $\det G = 0$, *т. е. внешний нуль-индекс ν в точке Q отличен от нуля.*

Частные случаи этого утверждения содержатся в [147, 28]. Естественно поставить вопрос, какие дополнительные требования надо наложить на поверхность, чтобы из равенства $\sigma = \int_F \sigma(Q)\, dV = \int_F \tau(Q)\, dV = \tau$ следовало, что F^l — в целом гиперповерхность. В общем случае (и при $l \geqslant 3$) это не так. А именно, пусть $E_0^l \subset E_0^{l+1} \subset E^{l+p}$ фиксированы, F^l компактна, $F^l \subset E_0^{l+1}$, и пересекается с E^l по непустой области U. Тогда, выбирая в U компактные множества с непустой внутренностью и деформируя их в различных $E^{l+1} \supset E_0^l$, получим требуемый пример. Вопрос при $l = 2$ решен С. Е. Козловым в [28], при $l \geqslant 3$ — А. А. Борисенко в [14]:

Т е о р е м а 9. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — полная C^3-регулярная поверхность, причем выполнено:*

1) $\tau = \sigma$,

2) *поверхность не содержит прямых,*

3) а) *при $l = 2$ не минимальна* [28], б) *при $l \geqslant 3$ внешний нуль-индекс* $\nu < l$ [14].

Тогда F^l — гиперповерхность в $E^{l+1} \subset E^{l+p}$.

Работы И. Муто [110, 111] посвящены так называемым *гаусс-критическим-поверхностям*, т. е. поверхностям, доставляющим экстремум функционалу объема грассманова образа при изгибаниях. Вычислены первая и вторая вариации объема грассманова образа. Доказано, например, что если $F^l \subset E^{l+1} \subset E^{l+p}$ — замкнутая гиперповерхность с положительно определенной второй квадратичной формой, то она гаусс-критическая, при этом индекс F^l как критической точки функционала объема равен нулю (и F^l

доставляет локальный максимум). Особый интерес представляет изучение площади грассманова образа поверхности $F^2 \subset E^4$. Ю. А. Аминов [4] показал, что отношение элементов площади на грассмановом образе и на поверхности равно $\sqrt{K^2 + 4(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)} \geqslant |K|$; равенство достигается только для минимальной поверхности (см. также V.3) или для поверхности $F^2 \subset E^3 \subset E^4$ — это теорема Гаусса: здесь K — гауссова кривизна, α, β, a, b — координаты центра и полуоси эллипса нормальной кривизны. Для поверхностей с плоской нормальной связностью ($\Leftrightarrow$ с нулевым гауссовым кручением: $ab = 0$) получена формула для гауссовой кривизны грассманова образа.

В [11] получено обобщение теоремы Гаусса для поверхностей $F^2 \subset E^4$ в такой форме: если dA_i — элементы площади проекции $\Gamma(F^2)$ на сферы-сомножители $G^+(2, 4) = S^2 \times S^2$, то $dA_i = |K \pm 2ab|\, dS$, где K — гауссова кривизна поверхности, $2ab$ — модуль гауссова кручения (a и b — полуоси эллипса нормальной кривизны, dS — элемент площади на поверхности, $\pm$ соответствует $i = 1, 2$).

Теорема Гаусса — Бонне для поверхностей $F^2 \subset E^4$ обобщалась Бляшке [49], Черном и Спеньером [66]:

Т е о р е м а 10. *Пусть $F^2 \subset E^4$ — замкнутая ориентируемая поверхность, $\Gamma(F^2)$ — ее грассманов образ в $G^+(2, 4) = S_1^2 \times S_2^2$. Пусть A_1 и A_2 — площади проекции грассманова образа на сферы-сомножители. Тогда*:

1) $A_1 + A_2 = 4\pi\chi$ [49],

2) $A_1 = A_2$ [66],

где χ — эйлерова характеристика поверхности.

Аналогичный результат получен в [85] Р. Оссерманом и Д. Хоффманом и в [142] Дж. Вейнером.

В [26] С. Е. Козловым изучались площади грассманова образа в расслоении для поверхности $F^2 \subset M^4$. Получены формулы элемента площади через вторую квадратичную форму (через внешнюю кривизну и гауссово кручение) поверхности. Обобщены результаты теоремы 10. Например, доказано, что:

$$A_1 + A_2 \leqslant 4\pi\chi, \text{ если } K_\sigma \geqslant 0,$$
$$A_1 + A_2 \geqslant 4\pi\chi, \text{ если } K_\sigma \leqslant 0,$$

где K_σ — секционная кривизна M^4, A_i — проекции грассманова образа на сферы (в каждом слое), χ — эйлерова характеристика ориентируемой поверхности F^2. Найдена связь площади с внешними и внутренними топологическими инвариантами поверхности $F^2 \subset M^4$.

В [3] Ю. А. Аминов рассматривал вопрос об обобщении теоремы Гильберта о невложимости в целом пространства Лобачевского L^l в евклидово пространство E^{2l-1}. Известно, что такое вложение должно иметь плоскую нормальную связность, т. е. в каждой точке есть l главных направлений. Оказывается, они голономны, т. е. на поверхности $L^l \subset E^{2l-1}$ лежит сеть линий кривизны. Если $\{u^i\}_{i=1}^l$ — параметризация поверхности $L^l \subset E^{2l-1}$ вдоль линий кривизны, то метрические тензоры на L^l и $\Gamma(L^l)$ имеют вид $g_{ij} = \sin^2\sigma_i\delta_{ij}$ и $G_{ij} = \cos^2\sigma_i\delta_{ij}$ соответственно $\left(\sum_{i=1}^{l} \sin^2\sigma_i = 1\right)$. Установлено, что при $l > 2$ k-мерный объем грассманова образа любого подмногообразия $M^k \subset L^l$ больше k-мерного объема самого подмногообразия (при $k \geqslant 2$; для $k = 1$ это не выполняется, вообще говоря). Для некоторых специальных подмногообразий дана оценка снизу отношения соответствующих объемов.

Грассманов образ (и его объем) полных поверхностей $F^2 \subset E^4$ неположительной кривизны с ограниченной длиной второй квадратичной формы изучался в [144].

3. Грассманов образ минимальных поверхностей. Хорошо известно, что сферический гауссов образ минимальной поверхности $F^2 \subset E^3$ является мощным инструментом исследования ее геометрии. Аналогичную роль для минимальных поверхностей $F^2 \subset E^{2+p}$ играет грассманов образ.

Знаменитая теорема С. Н. Бернштейна утверждает, что полная двумерная минимальная поверхность $F^2 \subset E^3$, однозначно проектируемая на плоскость, является плоскостью. Р. Оссерман обобщил эту теорему: полная односвязная минимальная поверхность $F^2 \subset E^3$, гауссов сферический образ которой не содержит окрестности какой-либо точки на S^2 (т. е. не плотен в S^2), является плоскостью. (Ф. Ксавье значительно усилил эту теорему, доказав, что гауссов образ может «выпустить» не более 6 точек на сфере).

Эти утверждения переносятся и на случай большей коразмерности:

Теорема 11 (С.-С. Черн [65]). *Пусть $F^2 \subset E^{2+p}$ — полная односвязная минимальная поверхность, не лежащая ни в каком меньшем евклидовом подпространстве. Тогда ее грассманов образ $\Gamma(F^2) \subset Q_p \subset \mathbb{C}P^{p+1}$ плотен в том смысле, что множество гиперплоскостей в $\mathbb{C}P^{p+1}$, пересекающих $\Gamma(F^2)$, плотно во множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{C}P^{p+1}$. При $p = 2$, $\Gamma(F^2) \subset \subset G^+(2, 4) = S_1^2 \times S_2^2$. Если π_i: $G^+(2, 4) \to S_i^2$ $(i = 1, 2)$ — проекция, то хотя бы одно из множеств $\pi_i \circ \Gamma(F^2)$ плотно в сфере S_i^2 $(i = 1, 2)$.*

Из классической дифференциальной геометрии известно, что гауссово сферическое отображение поверхности $F^2 \subset E^3$ конформно тогда и только тогда, когда поверхность минимальна или является областью на сфере. Как следует из теоремы 7, грассманов образ поверхности $F^2 \subset E^{2+p}$ будет конформен тогда и только тогда, когда поверхность псевдоомбилична.

В связи с этим представляет интерес исследования комплексно-аналитических свойств грассманова отображения. Пусть $F^2 \subset E^{2+p}$ — регулярная поверхность, u^1, u^2 — изотермические координаты, $z = u^1 + iu^2$ — комплексная координата на ней, принимающая значения на какой-либо римановой поверхности D, $\Gamma(F^2) \subset Q_p \subset \mathbb{C}P^{p+1}$ — грассманов образ. Если $r = r(u^1, u^2)$ — радиус-вектор $(r\colon D \to E^{2+p})$, то грассманово отображение $\Gamma \circ r\colon D \to \mathbb{C}P^{p+1}$, очевидно, задается так: $z \to \left[\frac{\overline{dr}}{dz}\right] = \left[\frac{\partial r}{\partial u^1} + i\frac{\partial r}{\partial u^2}\right]$, где $[\cdot]$ — класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^{p+1}$, черта — комплексное сопряжение. Таким образом, имеет смысл говорить о голоморфности грассманова отображения. Хоффман и Оссерман установили следующую теорему.

Теорема 12 [82]. *Пусть $F^2 \subset E^{2+p}$ — регулярная ориентируемая поверхность с невырожденным грассмановым образом. Грассманово отображение голоморфно тогда и только тогда, когда F^2 — область на сфере в $E^3 \subset E^{2+p}$. Грассманово отображение антиголоморфно тогда и только тогда, когда F^2 минимальна.*

В сторону достаточности второе утверждение доказал ранее Черн [65] (при $p = 2$ — раньше в [130]).

В работе [82] установлена также «теорема Гаусса»: для минимальной поверхности $F^2 \subset E^{2+p}$ ее гауссова кривизна равна $k = -\frac{d\hat{s}^2}{ds^2}$, где $d\hat{s}$, ds — элементы длины дуги на $\Gamma(F^2)$ и F^2 соответственно (см. также Ю. А. Аминов [4] — цитировалась в V.3).

В работах [82, 32, 107] изучаются двумерные минимальные поверхности с грассмановым образом постоянной гауссовой кривизны. В силу теоремы 12, для минимальной поверхности $F^2 \subset E^{2+p}$ $\Gamma(F^2)$ есть голоморфная кривая в Q_p; получаем, что надо найти все голоморфные кривые в Q_p постоянной кривизны. С другой стороны, в силу теоремы Калаби любые две изометричные голоморфные кривые в $\mathbb{C}P^{p+1}$ конгруэнтны (т. е. унитарно эквивалентны), а согласно Лоусону голоморфные кривые в $\mathbb{C}P^{p+1}$ постоянной кривизны могут иметь лишь кривизну $\hat{k} = 2/m$, где $1 \leqslant m \leqslant p+1$, и они конгруэнтны кривым $\gamma_m = (1, \sqrt{m}z, \ldots, \sqrt{C_m^j}z^j, \ldots, z^m, 0, \ldots, 0)$ в $\mathbb{C}P^{p+1}$. Итак, задача сводится к возможности «помещения» кривых γ_m в квадрику Q_p движениями пространства $\mathbb{C}P^{p+1}$. При этом кривизна $\hat{k}$ грассманова образа может принимать значения $\left\{\frac{2}{m}\right\}_{m \geqslant 1}$. В настоящее время эта задача почти полностью решена. А именно, имеет место

Теорема 13. *Пусть $F^2 \subset E^{2+p}$ — минимальная поверхность с грассмановым образом постоянной кривизны $\hat{k}$. Тогда:*

1) *при $p = 2$ $\hat{k} = 2$ и $F^2 \subset E^4$ — комплексная кривая в $E^4 = \mathbb{C}^2$, либо $\hat{k} = 1$ и $F^2 \subset E^3 \subset E^4$ минимальна* [82];

2) *при $p = 3$ $\hat{k} = 1$ или $\hat{k} = 2$ и $F^2 \subset E^4 \subset E^5$ (см. предыдущий случай), либо $\hat{k} = 1/2$* [32];

3) *при $p = 2n - 1$ (n — целое) существует поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ с $\hat{k} = \frac{2}{2n}$* [107];

4) *при $p = 2n$ $(n \geqslant 4)$ существует поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ с $\hat{k} = \frac{2}{2n+1}$* [107];

5) *при $p = 4, 6, 8$ существует поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ с $\hat{k} = \frac{2}{p-1}$* [107].

При этом если $\hat{k} = 1$, то всегда $F^2 \subset E^6 \subset E^{p+2}$ и F^2 изометрична минимальной поверхности в E^3 (способ построения дан в [82]); *если $\hat{k} = 2$, то $F^2 \subset E^4 \subset E^{p+2}$ — голоморфная кривая. В других случаях также найден вид поверхности, соответствующий значениям $\hat{k}$. Таким образом, остается невыясненным вопрос о существовании в E^6 и E^7 поверхностей с $\hat{k} = 2/5$ и в E^8 и E^9 поверхностей с $\hat{k} = 2/7$.*

Хорошие свойства грассманова образа минимальных поверхностей позволяют исследовать сами эти поверхности. Оссерман и Хоффман установили следующий результат [122].

Теорема 14. *Пусть $F^2 \subset E^n$ или S^n — ориентируемая поверхность.*

1) *Если грассманово отображение конформно и гармонично, то F^2 минимальна;*

2) *если F^2 минимальна, односвязна в E^n или S^n и площадь ее грассманова образа меньше 2π при $n = 3$ или меньше $4\pi/3$ при $n > 3$, то она устойчиво минимальна.*

Грассманово отображение в сферу понимается в смысле Обаты (см. V.1), гармоничность обсуждается в V.3. Результаты об устойчивости минимальных поверхностей, полученные с помощью их грассманова образа, содержатся в [47, 102] и др.

Для минимальных поверхностей в римановом пространстве $F^2 \subset M^4$ известно такое обобщение теоремы 12.

Теорема 15 (Козлов [25]). *Грассманово отображение минимальной поверхности конформно. Если M^4 постоянной кривизны, то верно и обратное.*

Вопросы грассманова образа минимальных поверхностей примыкают к изучению грассманова образа поверхностей постоянной средней кривизны и с параллельным вектором средней кривизны, к которым мы переходим.

4. Гармоничность грассманова отображения. Результаты, которые будут здесь приведены, в определенном смысле обобщают результаты о грассмановом образе двумерных минимальных поверхностей на многомерный случай.

Определение (Иллс — Сэмпсон [68]). Пусть (M_1, g), (M_2, g') — римановы многообразия. $f\colon M_1 \to M_2$ — отображение. *Интегралом энергии* называется

$$E(f) = \frac{1}{2} \int\limits_{M_1} \operatorname{Tr} g'(f_*, f_*)\, d\sigma,$$

где f_* — дифференциал f, Tr — след по отношению к метрике g, $d\sigma$ — элемент объема метрики g. Подынтегральная функция $e(f)$ называется *плотностью энергии*.

В локальных координатах $\{x^i\}_{i=1}^n$ на M_1 с $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$, $\{y^\alpha\}_{\alpha=1}^m$ на M_2 с $ds'^2 = g'_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$ для отображения $f\colon y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ будет:

$$E(f) = \frac{1}{2} \int\limits_{M_1} g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} g'_{\alpha\beta} \sqrt{\det g}\, dx^1 \ldots dx^n.$$

Определение. Отображение римановых пространств называется *гармоническим*, если оно является критической точкой интеграла энергии.

Если v — векторное поле вдоль f (т. е. $v\colon M_1 \to TM_2$, причем $\pi_0 v = f$), то $\frac{\partial}{\partial v} E(f) = -\int\limits_{M_1} g'(\tau(f), v) d\sigma$. Векторное поле $\tau(f)$ называется *полем напряжений* (tension field) отображения f. Гармоничность f равносильна тому, что $\tau(f) \equiv 0$. В локальных координатах: $[\tau(f)]^\gamma = \Delta f^\gamma + g^{ij} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \times \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}$, где Δ — лапласиан на M_1, $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля метрики $g'_{\alpha\beta}$.

Имеет место следующий сильный результат Э. Ру и Я. Вилмса:

Теорема 16 [132]. *Пусть (M^l, g) — риманово многообразие, $i\colon M^l \to F^l \subset E^{l+p}$ — изометрическое погружение в евклидово пространство, $f = \Gamma \circ i$ — его грассманово отображение, $f\colon M \to G(l, l+p)$. Тогда $\tau(f) = \nabla^\perp H$ — производная вектора средней кривизны в нормальной связности.*

Доказательство. Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная поверхность, $Q \in F^l$. Выберем систему координат в E^{l+p}, поместив Q в начало координат и взяв координатной плоскостью $x^1, \ldots, x^l$ касательное пространство $T_Q F^l$. Поверхность в окрестности точки Q задается явно: $x^{l+\mu} = \varphi^\mu(x^1, \ldots, x^l)$, $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\varphi^\mu\big|_0 = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}\Big|_0 = 0$. Отображение $f\colon F^l \to G(l, l+p)$ задается в виде $f^{\binom{\mu}{i}}(x^1, \ldots, x^l) = \xi^\mu_i = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}$. Поскольку $\Gamma^k_{ij}|_Q = 0$, $\Gamma^{1\binom{\rho}{k}}_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}\big|_{\Gamma(Q)} = 0$ (см. III.2), то

$$[\tau(f)]^{\binom{\mu}{k}}\big|_Q = g^{ij} \frac{\partial^2 f^{\binom{\mu}{k}}}{\partial x^i \partial x^j}\Bigg|_Q = \delta^{ij} \frac{\partial^3 \varphi^\mu}{\partial x^k \partial x^i \partial x^j}\Bigg|_Q = \sum_i \frac{\partial^3 \varphi^\mu}{\partial x^k (\partial x^i)^2}\Bigg|_Q.$$

Вычисляя $\nabla^{\perp} H\, |_Q$, получаем:

$$[\nabla^{\perp}_k H\, |_Q]^{\mu} = \sum_i \partial^3 \varphi^{\mu}/\partial x^k\, (\partial x^i)^2.$$

Следствие. *Грассманово отображение поверхности гармонично тогда и только тогда, когда ее вектор средней кривизны параллелен в нормальной связности (в частности, если поверхность минимальна или минимальна в гиперсфере).*

(Мы будем говорить кратко «грассманово отображение гармонично», имея в виду ситуацию теоремы 16.)

Эта теорема (в основном следствие) повлекла за собой целый ряд публикаций, исследующих гармоничность грассманова отображения в различных ситуациях.

Двумерные поверхности с параллельным вектором средней кривизны были классифицированы Б.-Й. Ченом [51] и С. Т. Яу [157]. С учетом сказанного выше, имеет место

Теорема 17. *Грассманово отображение поверхности $F^2 \subset E^{2+p}$ гармонично тогда и только тогда, когда:*

1) F^2 *минимальна в* E^{2+p}, *либо*
2) F^2 *минимальна в* $S^{1+p} \subset E^{2+p}$, *либо*
3) $F^2 \subset E^3 \subset E^{2+p}$ *и имеет постоянную среднюю кривизну, либо*
4) $F^2 \subset S^3 \subset E^4 \subset E^{2+p}$ *и имеет постоянную среднюю кривизну*

(ср. с теоремой 12 — гармоничность обобщает голоморфность и антиголоморфность).

Еще один результат о двумерных поверхностях установил Кенмоцу [96]: грассманово отображение ориентируемой поверхности $F^2 \subset E^4$ постоянной ненулевой средней кривизны гармонично тогда и только тогда, когда гармонична хотя бы одна из его проекций на сферы-сомножители в $G^+(2, 4)$.

Следствие теоремы 16 было обобщено на случай грассманова отображения подмногообразий постоянной кривизны [135, 93, 64]).

Теорема 18. *Грассманово отображение подмногообразия пространства постоянной кривизны $\neq 0$ гармонично тогда и только тогда, когда подмногообразие минимально.*

Теорема 18 является следствием более общей теоремы, установленной в [89] Ишихара. Напомним конструкцию из IV.4. Пусть $E = E_*^{n+p+q}$ — псевдоевклидово пространство, $O^*(n+p+q)$ — его псевдоортогональная группа ($*$ — заменяет указатель индекса). Множество пар (U, V) взаимно-ортогональных подпространств в E размерностей $\dim U = n$, $\dim V = p$, на которых индуцируются невырожденные псевдометрики фиксированных индексов,— однородное флаговое пространство

$$G(n, p, q) = O^*(n+p+q)/O^*(n) \times O^*(p) \times O^*(q)$$

с инвариантной псевдоримановой метрикой. Определим проекции

$$\pi_1\colon O^*(n+p+q) \to O^*(n+p+q)/O^*(n) \times O^*(p+q),$$
$$\pi_2\colon O^*(n+p+q) \to O^*(n+p+q)/O^*(n+p) \times O^*(q),$$
$$\pi_3\colon O^*(n+p+q) \to O^*(n+p+q)/O^*(n+q) \times O^*(p).$$

Пусть теперь $M^n \subset N^{n+p} \subset E$ — псевдоримановы подмногообразия. Определим грассманово отображение $\Gamma\colon M^n \to G(n, p, q)$ так: точке Q на M^n ставится в соответствие пара $(T_Q, M^n, N_Q M^n \cap T_Q N^{n+p}) \in G(n, p, q)$. Введем также грассмановы отображения $\Gamma_1 = \pi_1 \circ \Gamma$ — обычное грассманово отображение псевдориманового $M^n \subset E$; $\Gamma_2 = \pi_2 \circ \Gamma$ — ограничение на M^n грассманова отображения для $N^{n+p} \subset E$; если N^{n+p} — постоянной кривизны, то введем $\Gamma_3 = \pi_3 \circ \Gamma$ — грассманово отображение $M^n \subset N^{n+p}$ (в частности, если $N = L^{n+p} \subset E_1^{n+p+1}$, то Γ_3 — отображение в смысле [119]) (см. IV.4, V.1). В [89] доказано, что если из четырех отображений Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 три гармонические, то и оставшееся — гармоническое (на псевдоримановы многообразия определение гармоничности переносится дословно). Установлена также следующая

Теорема 19. *Пусть $N^{n+p} \subset E$ вполне омбилично.*

1. *$M^n \subset N^{n+p}$ имеет параллельный вектор средней кривизны тогда и только тогда, когда Γ_1 и Γ гармоничны.*

2. *Если $M^n \subset N^{n+p}$ минимально, то Γ_2 и Γ_3 гармоничны.*

3. *Если Γ_3 гармонично, то $M^n \subset N^{n+p}$ минимально.*

Обобщение теоремы 16 на случай грассманова образа погружений в тор i: $M^l \to F^l \subset T^{l+p}$ (гомотетичных, конформных или проективных) содержится в [92]. В работе [125] установлено, что для компактной поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ с параллельным вектором средней кривизны $\int\limits_{F^l} (Q - 2S)S dV \leqslant 0$ (где $S = \| h \|^2$ — квадрат длины второй квадратичной формы, Q — нижняя грань кривизн Риччи в точке), причем равенство равносильно вполне геодезичности грассманова образа. Для некомпактной поверхности с $\nabla^{\perp} H = 0$ получено, что если $Q \geqslant 2S$ и энергия $E(\Gamma)$ конечна, то F^l является областью на плоскости.

Возможность перенесения теоремы 16 на грассмановы расслоения рассматривалась в [72].

В свете теоремы С. Н. Бернштейна, а также теорем Оссермана и Черна (теорема 11 из V. 3) исследовался вопрос об области, в которой может лежать грассманов образ поверхности, когда грассманово отображение гармонично.

Теорема 20 (Оссерман, Хоффман, Чоэн [83]).

1. *Пусть $F^2 \subset E^3$ — полная ориентируемая поверхность постоянной средней кривизны. Если ее гауссов сферический образ лежит в открытой полусфере, то поверхность — плоскость, если в замкнутой, то — плоскость или прямой круговой цилиндр.*

2. *Пусть $F^2 \subset E^4$ — полная ориентируемая неминимальная поверхность с $\nabla^{\perp} H = 0$. Пусть Γ_i — проекции грассманова отображения на сферы-сомножители $S^2 \times S^2 = G^+(2, 4)$. Тогда ни одно из $\Gamma_i(F^2)$ не лежит в открытой полусфере, а если оба лежат в замкнутых полусферах, то F^2 — либо прямой круговой цилиндр в $E^3 \subset E^4$, либо плоский тор $S^1 \times S^1 \subset E^2 \times E^2$* (ср. с теоремой 11 и с результатом Кенмоцу, цитированным выше).

Перенесение этих результатов на многомерный случай осуществлено Вэнгом [141]. Пусть $F^l \subset S^{l+p}$ или E^{l+p}, $\Gamma(F^l) \subset SG(l, l+p)$ или $G(l, l+p)$. Эти многообразия Грассмана вкладываются в евклидово пространство E^N с помощью плюккеровых координат (см. II.3, III.3). Пусть $a \in E^N$ — фиксированный единичный вектор. Определим функцию u на F^l так: $u(Q) = \langle i(\Gamma(Q)), a \rangle$, где i — плюккерово вложение. Неравенство $u \geqslant 0$ $(u > 0)$ можно интерпретировать как принадлежность грассманова образа замкнутой (открытой) полусфере. Имеет место

Теорема 21 [141].

1. *Пусть $F^l \subset S^{l+p}$ или E^{l+p} — компактная ориентируемая поверхность с плоской нормальной связностью и параллельным ненулевым вектором средней кривизны. Тогда ее грассманов образ не может лежать в открытой полусфере.*

2. *При тех же условиях, кроме плоской нормальной связности, грассманов образ не может лежать в «сферической шапочке»* $u \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. *Если* $F^l \subset S^{l+p}$ *— компактная ориентируемая минимальная поверхность с плоской нормальной связностью и ее грассманов образ лежит в полусфере, то* F^l *— вполне геодезическая сфера* S^l.

4. *При тех же условиях, кроме плоской нормальной связности, если грассманов образ лежит в «сферической шапочке»* $u > \sqrt{\frac{2}{3}}$, F^l *— вполне геодезическая сфера.*

Пункт 3 теоремы был установлен также В. Ченом [63]. Требования плоской нормальной связности естественны в силу следующего результата.

Теорема 22 [63]. *Пусть* F^l *— регулярная поверхность:*

а) *в* S^{l+p},

б) *в* E^{l+p};

i *— плюккерово вложение соответствующего многообразия Грассмана в гиперсферу* $S^{N-1} \subset E^N$. *Отображение* $i \circ \Gamma$: $F^l \to S^{N-1}$ *гармонично тогда и только тогда, когда* F^l *имеет плоскую нормальную связность и:*

а) *минимальна,*

б) *вектор средней кривизны параллелен.*

В [141] получены также результаты о «размере» грассманова образа двумерных поверхностей с $\nabla^\perp H = 0$: полная ориентируемая поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ (S^{2+p}) с $\nabla^\perp H = 0$, грассманов образ которой лежит в «шапочке»

$$u \geqslant \sqrt{32(p-1)/41p - 32} + \varepsilon,$$

вполне геодезична.

Заметим, что теорема 21 почти полностью покрывается результатом Чена, Пиккини ([62], лемма 3.1), из которого следует, что грассманов образ компактной ориентируемой поверхности не может лежать в открытой полусфере, а если он лежит в замкнутой полусфере, то является подмногообразием экватора.

Обобщение теоремы 15 о гармоничности грассманова отображения на случай горизонтальных изометрий (римановых субмерсий) получено в [136].

В работе [126] Я. Пан и И. Шен исследовали вопросы устойчивости гармонических отображений многообразий с краем. Гармоническое отображение многообразия с краем устойчиво, если вторая вариация интеграла энергии неотрицательно определена на всех вариациях, обращающихся в нуль на крае. Доказана

Теорема 23. *Пусть* F^l *— компактная поверхность с краем в:*

а) E^{l+p},

б) S^{l+p}, *грассманово отображение которой гармонично. Тогда существует константа* $c(l)$ $(\bar{c}(l))$ *такая, что при:*

а) $\| h \|_l \leqslant c(l)/\sqrt[4]{lp-1}$,

б) $\| h \|_l \leqslant \bar{c}(l)/\sqrt[4]{p(l+1)}$, *грассманово отображение устойчиво гармонично (здесь* $\| h \|_l$ *— норма в пространстве* L_l *функций на* F^l *длины второй квадратичной формы).*

Вопросы гармоничности грассманова отображения рассматривались также в [61]. В работе Б.-Й. Чена и П. Пиккини [62] изучались поверхности, грассманово отображение которых имеют конечный тип. Пусть M — компактное риманово многообразие, $V_k \subset C^\infty(M)$ — собственное подпространство, соответствующее k-му собственному значению оператора Лапласа на M.

Отображение φ: $M \to E^m$ можно представить в виде $\varphi \neq \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ ($\varphi_0 = \mathrm{const}$ — «центр тяжести», $\varphi_k \in V_k$). Говорят, что φ *имеет конечный тип* (m-тип), если конечное число $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ (m штук) отлично от нуля. Если φ изометрично, то M — подмногообразие конечного типа. Ставится вопрос о конечности типа отображения $\nu = i \circ \Gamma$: $F^l \to E^N$, где $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная компактная поверхность, i — плюккерово вложение. Вычисляется $\Delta\nu$. Доказана

Теорема 24. *Отображение* ν: $F^l \to E^N$ (F^l *— компактная, ориентируемая поверхность) имеет тип* 1 *тогда и только тогда, когда* F^l *имеет*:

1) *постоянную скалярную кривизну,*
2) *плоскую нормальную связность и*
3) *параллельный вектор средней кривизны.*

В частности:

а) *если* F^l *— гиперповерхность, то* $F^l = S^l \subset E^{l+1}$;

б) *если* $F^l \subset S^{l+1} \subset E^{l+2}$, *то* F^l *либо поверхность* 2-*типа, центр тяжести которой совпадает с центром сферы* S^{l+1}, *либо малая гиперсфера, либо минимальна в* S^{l+1} *и имеет постоянную скалярную кривизну*;

в) *если* $l = 2$, *то либо* $F^2 = S^2 \subset E^3 \subset E^{2+p}$, *либо* $F^2 = S^1(r_1) \times S^1(r_2) \subset E^2 \times E^2 = E^4 \subset E^{2+p}$.

Близкие результаты ранее были получены в [50]. Классифицированы также [62] минимальные поверхности $F^2 \subset S^{p+1} \subset E^{p+2}$, для которых отображение ν имеет тип 2: это либо стандартно вложенные (в смысле Калаби) минимальные сферы $S^2 \subset S^{p+1}$, либо специальные плоские торы $T^2 \subset S^5 \subset E^6$.

В заключение отметим, что интересный аналог теоремы Ру — Вилмса для гармоничности многомерного сферического отображения был дан в [131]. Учитывая еще результаты V.2 (теорема 8), можно проследить связь двух обобщений классического сферического гауссова отображения поверхностей $F^2 \subset E^3$. Заметим, что некоторые результаты последних двух параграфов в равной степени относятся к внешней геометрии грассманова образа, к рассмотрению которой мы и переходим.

VI. Внешняя геометрия грассманова образа

В этом разделе мы рассмотрим результаты о поверхностях со вполне геодезическим и вполне омбилическим грассмановым образом, об определении поверхности по ее грассманову образу и о кривизне многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к грассманову образу поверхности.

1. Кривизна многообразия Грассмана вдоль грассманова образа поверхности. Одним из объектов изучения, связанным с грассмановым образом поверхности, является кривизна $\bar{k}$ самого многообразия Грассмана вдоль двумерных площадок, касательных к грассманову образу (согласно [153], всегда $0 \leqslant \bar{k} \leqslant 2$, см. III.2).

Касательные векторы к $\Gamma(F^l)$ выражаются через вторую квадратичную форму поверхности F^l (V.1), поэтому кривизны, о которых идет речь, дают информацию о внешней геометрии поверхности F^l. Формула, непосредственно выражающая секционную кривизну $\bar{k}$ через коэффициенты H_{ij}^{μ}, приведена Ю. А. Аминовым в [3]. В той же работе установлена

Теорема 25. *Пусть* $F^l \subset E^{l+p}$ *— регулярная поверхность с плоской нормальной связностью. Тогда кривизна многообразия Грассмана* $G(l, l+p)$ *вдоль любой двумерной площадки, касательной к грассманову образу, лежит* *в пределах* $\bar{k} \in [0, 1]$. *Для локального погружения пространства Лобачевского* $L^l \subset E^{2l-1}$ *соответствующая кривизна* $\bar{k} \in (0, 1)$.

В [4] получена формула для кривизны $\bar{k}$ многообразия Грассмана $G(2, 4)$ вдоль площадки, касательной к грассманову образу поверхности $F^2 \subset E^4$:

$$\bar{k} = \frac{k^2 + 4a^2b^2}{k^2 + 4(\alpha^2 b^2 + a^2\beta^2)},$$

где k — гауссова кривизна поверхности, a, b и α, β — полуоси и координаты центра эллипса нормальной кривизны соответственно.

Для поверхности $F^2 \subset E^4$ кривизна $\bar{k}$ позволяет классифицировать точки, выделяются три невырожденных класса: $\bar{k} > 1$, $\bar{k} < 1$, $\bar{k} = 1$ (Ю. А. Аминов [4]). Они соответствуют естественным аффинным классам точек поверхности $F^2 \subset E^4$, определяемым типом соприкасающейся поверхности второго порядка (как показал А. А. Борисенко). Аналогично можно выделить аффинные типы точек на поверхности $F^3 \subset E^5$ и сопоставить им некоторые инварианты секционных кривизн $G(3, 5)$ вдоль площадок, касательных к $\Gamma(F^3)$. В качестве таких инвариантов взяты 3 главные кривизны ограничения тензора Риччи многообразия Грассмана $G(3, 5)$ на касательное пространство к грассманову образу $\Gamma(F^3) \subset G(3, 5)$ в исследуемой точке (А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский [15]), но полученная классификация слабее (типов аффинных — 11, «грассмановых» — 8). При этом в точке $\min \bar{k} \leqslant 1$, причем если он равен 1, то $\bar{k} \equiv 1$ и точечная коразмерность поверхности (размерность первого нормального пространства) равна 1. Вопрос конечной классификации точек многомерной поверхности решен А. А. Борисенко [18].

Поскольку кривизна многообразия Грассмана $\bar{k} \in [0, 2]$, встает вопрос о поверхностях, грассманов образ которых касается только площадок, вдоль которых $\bar{k} = 0$, или только площадок, вдоль которых $\bar{k} = 2$. Он был решен И. Муто [110] и А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевским [16] соответственно:

Теорема 26. *Пусть* $F^l \subset E^{l+p}$ — *регулярная поверхность, невырожденный грассманов образ которой касается лишь тех площадок, вдоль которых кривизна* $\bar{k}$ *многообразия Грассмана*:

а) *минимальна* ($\bar{k} = 0$),

б) *максимальна* ($\bar{k} = 2$).

Это возможно тогда и только тогда, когда:

а) *поверхность имеет плоскую нормальную связность и индуцированная метрика плоская* [110],

б) *поверхность двумерна, минимальна и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке есть окружность с центром на поверхности; если* $x^k = x^k(u^1, u^2)$ $(k = 1, \ldots, 2 + p)$ — *радиус-вектор поверхности в конформных координатах* $z = u^1 + iu^2$, $f^k = \frac{\partial x^k}{\partial z}$, *то функции* f^k *голоморфны*, $\sum_{k=1}^{2+p} (f^k)^2 = 0$ *и* $\sum_{k=1}^{2+p} \left(\frac{df^k}{dz}\right)^2 = 0$. *В частности, при* $p = 2$ *поверхность — комплексная кривая в* $\mathbb{C}^2 = E^4$ (см. [16]).

Из последней теоремы, а также из замечания о поверхностях $F^3 \subset E^5$ (см. выше) видно, что класс поверхностей, грассманов образ которых касается только площадок с «большой» кривизной, весьма узок. А. А. Борисенко выдвинул предположение о том, что: 1) при $l \geqslant 3$ в касательном пространстве к грассманову образу поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ всегда найдется двумерная площадка, вдоль которой кривизна $\bar{k}$ грассманова многообразия

$G(l, l+p)$ не превышает 1; 2) если в точке $Q \in F^l$ для всех площадок из $T_{\Gamma(Q)}\Gamma(F^l)$ будет $\bar{k} \geqslant 1$, то $\bar{k} \equiv 1$ (в этой точке) и точечная коразмерность поверхности равна 1 (если это выполнено во всех точках поверхности, то из уравнений Кодацци легко следует, что $F^l \subset E^{l+1} \subset E^{l+p}$ — гиперповерхность). Ю. А. Николаевский [34] доказал, что это предположение почти всегда выполнено:

Теорема 27. *Предположения* 1) *и* 2) *выполнены, если размерность l и коразмерность p поверхности принимают следующие значения*:

1. $l = 3$, $p = 2, 3$; $l = 4$, $p = 2$,
2. $l \geqslant p \geqslant 5$, *кроме* $l = p = 8$,
3. $l \geqslant 52$.

Таким образом, осталось нерассмотренным конечное число случаев. Мы предполагаем, что оценка в п. 3 может быть снижена как минимум до 9. В то же время к предположению 2) удается построить контрпример при $l = 4$, $p = 3$.

2. Восстановление поверхности по грассманову образу. Это направление исследования грассманова образа поверхностей включает в себя следующие вопросы: пусть $\Gamma^k \subset G(l, l+p)$ ($k \leqslant l$, случай строгого неравенства не исключается) — регулярное подмногообразие размерности k. Существует ли поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ такая, что $\Gamma(F^l) = \Gamma^k$? Сколько таких поверхностей? Для заданной поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ существуют ли поверхности с тем же грассмановым образом? Существуют ли деформации поверхности F^l, сохраняющие грассманов образ?

Сразу же отметим, что поверхность, полученная из данной гомотетией и параллельным переносом в объемлющем евклидовом пространстве, будет иметь тот же грассманов образ. Такие деформации назовем *тривиальными*. Имеет смысл поэтому, рассматривая последние два из перечисленных выше вопросов, говорить о нетривиальных деформациях.

Наиболее интенсивно изучались поставленные вопросы для случая двумерных поверхностей, а среди них — для поверхностей в E^4.

Теорема 28 (Ю. А. Аминов [5]). *Пусть $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ — регулярное подмногообразие. Пусть кривизна $\bar{k}$ многообразие Грассмана $G(2, 4)$ вдоль площадки, касательной к Γ^2 в точке $Q \in \Gamma^2$, не равна 1. Тогда существует окрестность точки Q, являющаяся грассмановым образом поверхности $F^2 \subset \subset E^4$.*

Условие $\bar{k} \neq 1$ существенно — строится соответствующий пример. Ранее соответствующие дифференциальные уравнения были получены в [4]. Их тип (эллиптический, гиперболический или параболический) определяется значением $\bar{k}$ ($\bar{k} > 1$, $\bar{k} < 1$, $\bar{k} = 1$). Аналогичные исследования проводились в [104].

В работе [85] Хоффманом и Оссерманом развита совершенно иная точка зрения на вопросы восстановления поверхности $F^2 \subset E^4$ по грассманову образу. А именно: пусть S_0 — риманова поверхность, z — комплексная координата на ней, $G\colon S_0 \to G^+(2, 4) = S_1^2 \times S_2^2 = \mathbb{C}P_1^1 \times \mathbb{C}P_2^1 = Q_2 \subset \subset \mathbb{C}P^3$ (см. III.4). Если w_i — комплексная координата на $\mathbb{C}P_i^1$, то отображение G записывается с помощью двух функций $w_1 = f_1(z)$, $w_2 = f_2(z)$ — проекций G на сферы-сомножители. Рассмотрим функции

$$F_i = \frac{(f_i)_{\bar{z}}}{(1+|f_i|)^2},$$

$$S_i = (f_i)_{z\bar{z}}/(f_i)_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{f}_i(f_i)_z}{1+|f_i|^2},$$

$$T_i = (S_i)_{\bar{z}},$$

где $i = 1, 2$, индексы z и $\bar{z}$ обозначают взятие частной производной. Будем говорить, что отображение G является *грассмановым отображением*, если существует конформное погружение x: $S_0 \to F^2 \subset E^4$ такое, что $G = \Gamma \circ x$ (принципиально, что фиксируется конформная структура). Авторы устанавливают геометрическую интерпретацию функций F_i, S_i и T_i. Доказана следующая

Теорема 29 ([85]). *Пусть S_0 — односвязная риманова поверхность и G: $S_0 \to G^+ (2, 4) = Q_2$.*

1. *Если $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$, то G — грассманово отображение минимальной поверхности в E^4.*

2. *Если F_1 и F_2 нигде не обращаются в нуль, то G — грассманово отображение тогда и только тогда, когда $|F_1| \equiv |F_2|$ и $\mathrm{Im}\,(T_1 + T_2) \equiv 0$. При этом поверхность $F^2 = x (S_0)$ определена однозначно с точностью до тривиальных деформаций.*

По поводу п. 1 этой теоремы см. теорему 12 (V.3).

Аналогичные результаты получены в [145]. Дальнейшие рассмотрения такой точки зрения на восстановление поверхности по грассманову образу содержатся в работе Кенмоцу [96] (и обобщают его теорему о представлении поверхности $F^2 \subset E^3$ с заданной средней кривизной):

Теорема 30. *Пусть S_0 — односвязная риманова поверхность, G: $S_0 \to G^+ (2, 4)$ и выполнено условие $|F_1| \equiv |F_2| \neq 0$ на S_0. Пусть α: $S_0 \to (0, +\infty)$ — гладкая функция. Отображение G является грассмановым отображением для поверхности с длиной вектора средней кривизны $\alpha^2 = |H|^2$ тогда и только тогда, когда*

$$S_1 + S_2 = \frac{\partial}{\partial z} (\ln \alpha).$$

В работе [134] в связи с теоремой 29 показано, что по всякой функции f_1: $S_0 \to \mathbb{C}P^1_1$ (S_0 не конформная сфера) такой, что $\partial f_1/\partial \bar{z} \neq 0$ и $S_1 = 0$, можно построить однопараметрическое семейство функций f_2: $S_0 \to \mathbb{C}P^1_2$ таких, что $S_2 = 0$ и $|F_1| \equiv |F_2|$, т. е. пара функций (f_1, f_2) определяет грассманово отображение.

Для поверхностей $F^2 \subset E^4$ с вырожденным грассмановым образом известен следующий результат:

Теорема 31 (Ю. А. Аминов, Т. С. Тарасова [7]). *Кривая $\Gamma^1 \subset G^+ (2, 4)$ является вырожденным грассмановым образом некоторой поверхности $F^2 \subset E^4$ тогда и только тогда, когда Γ^1 — асимптотическая линия на гиперповерхности $G^+ (2, 4) \subset S^5 \subset E^6$ (плюккерово вложение). При этом поверхность является либо конусом, либо цилиндром, либо образована касательными к некоторой кривой $\gamma \subset E^4$.*

В этой теореме, как и в теореме 28, поверхность восстанавливается по своему грассманову образу неоднозначно.

В [41] В. Т. Фоменко и И. М. Кричевер исследовали деформации поверхностей $F^2 \subset E^4$, сохраняющие грассманов образ. Введен класс R-поверхностей, характеризующихся тем, что каждая точка поверхности лежит внутри своего эллипса нормальной кривизны «не очень близко» к нему. Доказана

Теорема 32. *Всякая R-поверхность допускает нетривиальные деформации с сохранением грассманова образа; они находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством аналитических функций на поверхности.*

Доказан ряд результатов о точках защемления и деформациях, сохраняющих грассманов образ. Точка $Q \in F^2$ называется *точкой защемления* поверхности для данной деформации, если она смещается только в каса тельной плоскости. В [41] и [42] (В. Т. Фоменко и И. А. Бикчантаев) доказана

Теорема 33. *R-поверхность $F^2 \subset E^4$, защемленная на множестве, имеющем предельную точку на F^2, не допускает нетривиальных деформаций с сохранением грассманова образа. Некомпактная R-поверхность допускает бесконечно много таких линейно независимых деформаций, если она защемлена на не более чем счетном множестве, не имеющем предельных точек на поверхности.*

Вопросы грассманова образа поверхностей при деформациях исследовались также в работе [13]. Результаты, близкие к теоремам 28—31, получены в работе [142] Дж. Вейнера.

Заметим, что для поверхностей $F^2 \subset E^4$ (и только для них) грассманов образ $\Gamma(F^2) \subset G(2, 4)$ имеет ту же размерность и коразмерность. Это во многом определяет специфику теорем о восстановлении в упомянутом случае.

Для поверхностей $F^2 \subset E^n$ $(n > 4)$ вопрос о единственности поверхности с данным грассмановым образом решен Ю. А. Аминовым в [9]. Будем говорить, что поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ имеет грассманов образ общего вида, если он не касается ни одного вполне геодезического $G(2, 4) \subset G(2, 2+p)$. (это равносильно тому, что точечная коразмерность поверхности больше чем 2).

Теорема 34. *Поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$ определяется своим грассмановым образом общего вида однозначно с точностью до тривиальных деформаций.*

Получены условия того, что по данному подмногообразию $\Gamma^2 \subset G(2, 2+p)$ можно восстановить поверхность. Хоффман и Оссерман [84] исследовали вопрос о существовании и единственности конформного погружения $\chi : S_0 \to E^{2+p}$ римановой поверхности такого, что $\Gamma \circ x = G$ — заданное отображение из S_0 в $G^+(2, 2+p) = Q_p \subset \mathbb{C}P^{p+1}$. Условия существования сформулированы в терминах комплексных дифференциальных соотношений (в духе теоремы 29). Доказана

Теорема 35. *Поверхность $F^2 \subset E^{2+p}$, вектор средней кривизны которой не равен нулю в какой-то точке, определяется своим грассмановым образом с точностью до тривиальных деформаций.*

(Эта теорема сильнее, чем предыдущая.)

В [124] исследовался вопрос о неединственности восстановления поверхности по грассманову образу в специальном классе изотермических поверхностей $F^2 \subset E^{2+p}$ (т. е. несущих сопряженную сеть, линии которой являются линиями уровня двух гармонических функций на поверхности). Дж. Вейнер [143] получил результаты, аналогичные теоремам 28—31, 34, 35, с помощью совершенно иного подхода.

Вопросы единственности восстановления по грассманову образу и нетривиальных деформаций для поверхностей коразмерности 2 рассматривались в [12, 21]. В работе [12], в частности, доказано, что поверхность $F^l \subset S^{l+2}$ полностью определяется своим грассмановым образом (в E^{l+2}, вообще говоря нет). А. Н. Зубков и В. Т. Фоменко [21] изучали нетривиальные деформации для комплексных гиперповерхностей $F^{2n} \subset E^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющие их грассманов образ. Доказан аналог теоремы 30, а именно: всякая такая поверхность допускает нетривиальную деформацию, соответствующую некоторой голоморфной функции на ней. Получен результат, аналогичный теореме 33 для точек защемления.

Единственность восстановления поверхности по ее грассманову образу в общем случае $F^l \subset E^{l+p}$ рассматривалась Муто [114, 112] и А. А. Борисенко [17]. В [114] рассматривались уравнения деформаций (конечных и бесконечно малых), сохраняющих грассманов образ, а также деформации вполне вещественных поверхностей в $\mathbb{C}^n = E^{2n}$. Доказана

Теорема 36 [112]. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — компактная окносвязная поверхность. Она допускает нетривиальные деформации, сохраняющие грассманов образ тогда и только тогда, когда существует тензорное поле b_i^j такое, что:*

1) $b_i^j \neq c\delta_i^j$ *ни для какой постоянной c,*

2) $\nabla_k b_i^j = \nabla_i b_k^j$ *(где ∇ — связность на F^l),*

3) $b_i^j H_{kj}^\sigma = b_k^j H_{ij}^\sigma$ *(где H_{ji}^σ — элементы матриц второй квадратичной формы поверхности).*

Исследование задач единственности восстановления поверхности на языке внешних форм велось в [146].

В работе [17] А. А. Борисенко показал, что если две поверхности $F_1^l \subset E^{l+p}$ и $F_2^l \subset E^{l+p}$ имеют один и тот же грассманов образ, то они деформируемы друг в друга с сохранением грассманова образа. Действительно, поместим поверхности F_i^l в параллельных гиперплоскостях $E_i^{l+p} \subset \subset E^{l+p+1}$ $(i = 1, 2)$ и проведем прямые через точки поверхностей F_1^l и F_2^l, соответствующих по грассманову образу. Получим поверхность $F^{l+1} \subset \subset E^{l+p+1}$, которая несет семейство прямых, причем вдоль этих прямых касательные плоскости к поверхности F^{l+1} стационарны. Требуемая деформация получается сечением поверхности F^{l+1} гиперплоскостями E^{l+p}, параллельными плоскостям E_i^{l+p}.

Поверхность F^{l+1}, о которой идет речь, имеет в каждой точке внешний нуль-индекс (в смысле Черна — Кейпера), равный 1, т. е. является 1-сильно параболической поверхностью. При этом если поверхность F^{l+1} является конической или цилиндрической, то построенная по ней деформация из F_1^l в F_2^l тривиальна. Поэтому вопрос о единственности восстановления поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ по грассманову образу эквивалентен вопросу о существовании нетривиальной 1-сильно параболической поверхности $F^{l+1} \subset \subset E^{l+p+1}$ с базой F^l (т. е. для некоторой трансверсальной к прямым гиперплоскости $E^{l+p} \subset E^{l+p+1}$ должно быть $F^l = F^{l+1} \cap E^{l+p}$). Имеет место

Теорема 37 [17]. *Пусть в касательном пространстве к регулярной поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ в каждой точке отсутствуют сопряженные подпространства (т. е. такие U и V, что $U \cap V = \{0\}$, $U \dotplus V = T_Q F^l$, $\dim U$, $\dim V > 0$ и $h(u, v) = 0$ для любых $u \in U$ и $v \in V$) и выполнено одно из условий:*

1) *кривизна поверхности положительна,*

2) *кривизна поверхности отрицательна и l нечетно,*

3) *кривизна поверхности отрицательна и точечная коразмерность (размерность первого нормального подпространства) больше, чем $l(l+2)/4$,*

4) *отсутствуют асимптотические направления и l нечетно.*

Тогда поверхность однозначно восстанавливается по своему грассманову образу.

Приведены примеры точности условий теоремы, показывающие, что эти достаточные условия близки к необходимым.

3. Вторая квадратичная форма грассманова образа. Поверхности со вполне геодезическим и вполне омбилическим грассмановым образом. Для исследования означенных поверхностей исследуется вторая квадратичная форма подмногообразия $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$. Воспользуемся для этого локальными координатами $\{\eta_i^\beta\}$ на многообразии Грассмана (I.1). Пусть $x^k = x^k(y^1, \ldots, y^l)$ $(k = 1, \ldots, l+p)$ — радиус-вектор поверхности F^l в окрестности точки $Q: y^1 = \ldots = y^l = 0$. Выберем ортонормированный базис $\{e_i, e_\alpha\}$ в точке Q так, что $\{e_i\} \subset T_Q F^l$, $\{e_\alpha\} \subset N_Q F^l$. Для близких к Q точек поверхности F^l выбираем ортонормированные базисы $\{f_i\}$ в касательном и $\{f_\alpha\}$ в нормальном пространствах к поверхности таким образом, как это описано в I.1 (см. [103]). Получим уравнения грассманова образа: $\eta_i^\beta = \eta_i^\beta(y^1, \ldots, y^l)$ в окрестности точки $\Gamma(Q)$. Пусть Γ_{ij}^{Gk} — символы Кристоффеля индуцированной связности на $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$, $\Gamma^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}\binom{\gamma}{k}}$ — символы Кристоффеля на $G(l, l+p)$.

Утверждение 4 (И. Муто [113]). *Коэффициенты второй квадратичной формы подмногообразия $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$ в выбранной системе координат относительно нормали η_i^α равны*

$$\tilde{H}_{jk}^{\binom{\alpha}{i}} = \partial^2\eta_i^\alpha/\partial y^j \partial y^k - \Gamma_{jk}^{Gr}\partial\eta_i^\alpha/\partial y^r + \Gamma^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{r}\binom{\gamma}{s}}\partial\eta_r^\beta/\partial y^j \cdot \partial\eta_s^\gamma/\partial y^k.$$

Если $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ — векторные поля на поверхности и функции $\{\beta_j^i\}$ определяются так: $f_i = \beta_i^j Y_j$, то имеем

Утверждение 5 (Б. Й. Чен, С. Ямагучи [59]). *Вторая квадратичная форма подмногообразия $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$ в точке $\Gamma(Q)$ (т. е. при $y^1 = \ldots = y^l = 0$) равна*

$$\tilde{h}(Y_j, Y_i) = \sum_{k,\alpha} \beta_k^r\,|_0 \langle ((\overline{\nabla}_{Y_i}h)(Y_j, Y_r) + h(\nabla_{Y_i}Y_j, Y_r) - h(\nabla^G_{Y_i}Y_j, Y_r)), e_\alpha\rangle\,|_0 \partial/\partial\eta_k^\alpha,$$

где h — вторая квадратичная форма поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, ∇ — индуцированная связность на F^l, ∇^G — индуцированная связность на $\Gamma(F^l)$, $\overline{\nabla}h$ — производная второй квадратичной формы, определяемая так:

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z).$$

Следствие [59]. *Грассманов образ поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ вполне геодезичен в $G(l, l+p)$ тогда и только тогда, когда для любых трех касательных к F^l векторных полей X, Y и Z*

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = h(\nabla_X^G Y - \nabla_X Y, Z).$$

Будем говорить, что вторая квадратичная форма *параллельна*, если $\overline{\nabla}h = 0$.

В работе [59] классифицированы поверхности $F^2 \subset E^{2+p}$ со вполне геодезическим грассмановым образом: это либо гиперповерхность $F^2 \subset E^3 \subset E^{2+p}$, либо кривая $F^2 \subset E^4 = \mathbb{C}^2$, либо плоский тор в $E^2 \times E^2 = E^4$, либо поверхность Веронезе $F^2 \subset S^4 \subset E^5$.

Я. Вилмс [140] установил следующую теорему.

Теорема 38. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — поверхность с параллельной второй квадратичной формой. Тогда ее грассманов образ вполне геодезичен и грассманово отображение переводит геодезические в геодезические.*

Поверхности с параллельной второй квадратичной формой полностью классифицированы Д. Ферусом [75, 73] (подробности см. в IV.3).

При некоторых дополнительных условиях поверхности со вполне геодезическим грассмановым образом рассматривались в [113, 60, 123] (см., например, теорему 6 из V.1).

Полная классификация поверхностей со вполне геодезическим грассмановым образом была проведена Ю. А. Николаевским [36, 35]:

Теорема 39. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — поверхность с невырожденным вполне геодезическим грассмановым образом. Тогда она является произведением поверхностей, каждая из которых либо*

1) *вещественная гиперповерхность, либо*

2) *комплексная гиперповерхность, либо*

3) *поверхность с параллельной второй квадратичной формой.*

В 2) имеется в виду кэлерово подмногообразие комплексной коразмерности 1 в $\mathbb{C}^n = E^{2n}$. В случае вырожденного грассманова образа получим цилиндр с образующими соответствующей размерности над поверхностью из теоремы. Идея доказательства теоремы 39 состоит в рассмотрении касательного пространства к $\Gamma(F^l)$ в какой-то точке — оно должно быть тройной системой Ли и строится по второй квадратичной форме поверхности. С другой стороны, сильное ограничение на вид второй квадратичной формы накладывается условием из следствия (см. выше). Это позволяет «перечислить» все тройные системы Ли описанного вида, построить с помощью экспоненциального отображения грассманов образ, а по нему восстановить поверхность.

Поверхности со вполне омбилическим грассмановым образом рассматривались в работах [123, 98] (Пак и Ким), [94] (Ито), [97] (Пак, Ки), а также Николаевским Ю. А. в [37]. Имеет место следующая

Теорема 40. *Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — поверхность со вполне омбилическим грассмановым образом. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

а) $l > 2$, *грассманово отображение конформно и гармонично* [98],

б) *поверхность изотропна, грассманово отображение конформно* [98, 94],

в) *поверхность компактна, индуцированная метрика эйнштейнова и грассманово отображение гармонично,*

г) *тензор Риччи на F^l параллелен и грассманово отображение гармонично* [97].

Тогда $F^l \subset E^{l+p}$ — поверхность с параллельной второй квадратичной формой. Заметим, что изотропная поверхность с параллельной второй квадратичной формой (п. б)) *является сферой или поверхностью Веронезе* (*l-мерной*) [133].

В [123] доказано также, что если грассманов образ вполне омбиличен в многообразии Грассмана и грассманово отображение гармонично, то грассманов образ вполне геодезичен.

Имеет место следующая

Теорема 41 [37]. *Пусть $F^l \subset E^{l+2}$ ($l \geqslant 3$) — поверхность со вполне омбилическим грассмановым образом. Тогда грассманов образ вполне геодезичен* (*и по теореме* 39 *F^l — либо гиперповерхность, либо произведение гиперповерхностей, либо комплексная гиперповерхность*).

В этой же работе доказано существование поверхностей $F^2 \subset E^4$ с не вполне геодезическим вполне омбилическим грассмановым образом (отметим, что все предыдущие случаи давали вполне геодезический грассманов образ): эта поверхность имеет своим грассмановым образом двумерную вполне омбилическую гиперповерхность непостоянной средней кривизны в $S^2 \times S^1 \subset S^2 \times S^2 = G^+(2, 4)$ (II.2) и восстанавливается по нему (VI.2).

VII. Примечания

В настоящий обзор не вошли некоторые вопросы, касающиеся геометрии грассманова образа и многообразий Грассмана. В частности, ряд работ посвящен гармоническим вложениям в многообразие Грассмана — их обзор и ссылки можно найти в (Дж. Иллс, Л. Лемэр [69]). Классифицированы, например, все гармонические вложения двумерной сферы в $G(l, l+p)$.

Сформулируем также несколько задач, могущих продвинуть, на наш взгляд, развитие геометрии грассманова образа.

1. Вполне геодезические подмногообразия. Вероятно, полная классификация будет необозрима, но естественно ставить вопрос, например, о вполне геодезических сферах в размерности $\geqslant rg$.

2. Грассманов образ комплексных подмногообразий. Какие «вещественные» результаты будут сюда переноситься? (См. ниже 3.), вопросы гармоничности, гомотетичности грассманова образа.

3. Восстановление поверхности по грассманову образу; поверхности со *вполне геодезическим грассмановым образом для комплексных многообразий* Грассмана и для многообразий Грассмана над пространствами постоянной кривизны.

4. Вполне омбилический грассманов образ. Верно ли, что если грассманов образ поверхности размерности > 2 вполне омбиличен, то он вполне геодезичен?

5. Вполне омбилические подмногообразия в грассмановом многообразии. Верно ли, что наибольшая размерность таких нетривиальных подмногообразий равна $\max(l, p) - 1$? Классификация вполне омбилических подмногообразий в $G(l, l+p)$, вероятно, даст возможность такой классификации в любом локально симметрическом пространстве неотрицательной кривизны.

6. Теоремы 13 и 27 довести до естественного уровня общности. В связи с последней теоремой: верно ли, что в любом трехмерном подпространстве, касательном к многообразию Грассмана, есть двумерная площадка с секционной кривизной $\bar{k} \leqslant 1$?

7. Возможно ли использование техники, связанной с геометрией грассманова образа, для доказательства многомерной теоремы Гильберта о непогружаемости в целом пространства Лобачевского L^l в E^{2l-1}?

8. Классификация граней многообразия Грассмана $G^+(l, l+p)$ (см. III.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor.— 1982.— V. 38, № 2.— P. 273—282.

[2] Аминов Ю. А. О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // ДАН СССР.— 1977.— Т. 236, № 3.— С. 521—524.

[3] Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство // Мат. сб.— 1980.— Т. 111, № 3.— С. 402—433.

[4] Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб.— 1980.— Вып. 23.— С. 3—16.

[5] Аминов Ю. А. Определение поверхности в 4-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Мат. сб.— 1982.— Т. 117, № 2.— С. 147—160.

[6] Аминов Ю. А. Многомерный аналог уравнения «синус Гордона» и движение твердого тела // ДАН СССР.— 1982.— Т. 264, № 5.— С. 1113—1116.

[7] Аминов Ю. А., Тарасова Т. С. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу // Укр. геом. сб.— 1983.— Вып. 26.— С. 6—13.

[8] Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство и движения твердого тела // Мат. сб.— 1983.— Т. 122, № 1.— С. 12—30.

[9] Аминов Ю. А. Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Мат. заметки.—1984.— Т. 36, № 2.— С. 223—228.

[10] Аминов Ю. А. Свойства грассманова образа локального погружения трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство // Укр. геом. сб.—1984.— Вып. 27.— С. 3—11.

[11] Аминов Ю. А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением // Укр. геом. сб.—1988.— Вып. 31.— С. 3—14.

[12] Баранова В. А. О гауссовом отображении поверхностей коразмерности два // Материалы VI конференции УДН. Ч. 1. М.: УДН, 1983.— С. 124—127.

[13] Бикчантаев И. А. О деформациях двумерных поверхностей в E^4 с заданным изменением грассманова образа // Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. матем. им. И. Н. Векуа.—1988.— Т. 3, № 1.— С. 40—43.

[14] Борисенко А. А. О поверхностях, у которых абсолютная кривизна Черна — Лашофа равна площади грассманова образа // Мат. заметки.— 1989.— Т. 46, № 3.— С. 9—11.

[15] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу // Укр. геом. сб.—1989.— Вып. 32.— С. 11—27.

[16] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа // Мат. заметки.—1990.— Т. 48, № 3.

[17] Борисенко А. А. Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу // Мат. заметки.—1991 (в печати).

[18] Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей // Сиб. мат. журнал.—1990.— Т. 31, № 3.— С. 17—29.

[19] Вагнер В. Дифференциальная геометрия семейства R_k и R_n и семейства вполне геодезических S_{k-1} в S_{n-1} положительной кривизны // Мат. сб.—1942.— Т. 10 (42), № 3.— С. 165—212.

[20] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны.— М.: Наука, 1982.

[21] Зубков А. Н., Фоменко В. Т. О преобразованиях R-поверхностей евклидова пространства с сохранением их грассманова образа // Мат. заметки.— 1989.— Т. 45, № 1.— С. 20—27.

[22] Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций.— М.: Наука, 1975.

[23] Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом // ЛГПИ, Л. 1983. 25 с. Рук. деп. в ВИНИТИ 5.12.83. № 6568—83 ДЕП.

[24] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2.— М.: Наука, 1981.

[25] Козлов С. Е. О сферических отображениях поверхностей в римановых многообразиях // Исследования по теории поверхностей в римановых многообразиях.— Л., 1984.— С. 85—97.

[26] Козлов С. Е. Формы площади сферических изображений и аналоги теорем Гаусса и Гаусса — Бонне для двумерных поверхностей в четырехмерных римановых многообразиях // Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астр.— Л., 1985.— 18 с.

[27] Козлов С. Е. Точки конформности сферических отображений погруженных двумерных поверхностей // Геометр. вопр. теории функций и множеств.— Калинин, 1985.— С. 106—119.

[28] Козлов С. Е. Трехмерное уплощение поверхности при совпадении двух ее интегральных характеристик // Укр. геом. сб.— 1989.— Вып. 32.— С. 65—70.

[29] Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства // Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1974.— Вып. 342.— С. 76—82.

[30] Маазикас И. Грассманово отображение конгруэнции 2-плоскостей в евклидовых пространствах // Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1975.— Вып. 355.— С. 57—75.

[31] Маазикас И. Конгруэнции 2-плоскостей с вполне геодезическими грассмановыми образами // Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1975.— Вып. 355.— С. 76—85.

[32] Масальцев Л. А. Минимальные поверхности в $\mathbb{R}^5$, гауссов образ которых имеет постоянную кривизну // Мат. заметки.— 1984.— Т. 35, № 6.— С. 927—932.

[33] Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.

[34] Николаевский Ю. А. О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше 1 // Укр. геом. сб.— 1990.— Вып. 33.— С. 77—91.

[35] Николаевский Ю. А. Классификация многомерных поверхностей в евклидовом пространстве со вполне геодезическим грассмановым образом // Мат. сб.— 1991 (в печати).

[36] Николаевский Ю. А. О поверхностях со вполне геодезическим грассмановым образом // ДАН СССР.— 1991.— Т. 314, № 2.— С. 297—300.

[37] Николаевский Ю. А. Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. I // Укр. геом. сб.— 1991.— Вып. 34.

[38] Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. Лекции по геометрии. Семестр 2.— М.: Наука, 1979.

[39] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы.— М.: Наука, 1977.

[40] Федерер Г. Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.

[41] Фоменко В. Т., Кричевер И. М. О преобразованиях двумерных поверхностей в E^4, сохраняющих их грассмановый образ // Таганрог. ГПИ.— 1987.— 10 с.— Рук. ДЕП в ВИНИТИ 16.12.87, № 8786— В87.

[42] Фоменко В. Т., Бикчантаев И. А. Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G-деформаций двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб.— 1988.— Т. 136, № 4.— С. 561—573.

[43] Фукс Д. Б. Классические многообразия // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 12. Топология — 1.— М.: ВИНИТИ, 1986.— С. 253—314.

[44] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М.: Мир, 1964.

[45] Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология.— М.: Мир, 1970.

[46] Agaoka Y., Kaneda E. On local isometric immersions of riemannian symmetric spaces // Tohoku Math. J.— 1984.— V. 36.— P. 107—140.

[47] Barbosa J. L., do Carmo M. Stability of minimal surfaces and eigenvalues of Laplacian // Math. Z.

[48] Bartic V., Korbac Y. Stiefel — Whithney classes and parallelizability of Grassman manifolds // Rend. Circ. Mat. Palermo.— 1984.— V. 33, N. 6.— P. 19—29.

[49] Blashke W. Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4 // Ann. Math. Pura Appl.— 1949.— V. 4, N. 28.— P. 205—209.

[50] Bleecker D. D., Weiner J. L. Extrinsic bounds on λ_1 of Δ on a compact manifold // Comment. Math. Helv.— 1976.— V. 51.— P. 601—609.

[51] Chen B.-Y. Surfaces with parallel mean curvature vector // Bull. AMS.— 1972.— V. 78.— P. 709—710.

[52] Chen B.-Y., Lue H. S. Differential geometry of $SO(n+2)/SO(n) \times SO(2)$ // Geom. dedic. — 1975.— V. 4. N. 2—4.— P. 253—261.

[53] Chen B.-Y., Lue H. S. On normal connection of Kaehler submanifolds // J. Math. Soc. Japan. —1975.— V. 27, N. 4 — P. 550—556.

[54] Chen B.-Y., Lue H. S. On complex submanifolds of complex projective space with constant scalar curvature // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.—1975.— V. 58, N. 2.— P. 172—173.

[55] Chen B.-Y., Nagano T. Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. I. // Duke Math. J.—1977.— V. 44, N. 4.— P. 745—755. II. // Duke Math. J.—1978.— V. 45, N. 2.— P. 405—425.

[56] Chen B.-Y., Lue H. S. Differential geometry of $SO(n+2)/SO(n) \times SO(2)$. II / Geom. dedic.—1978.— V. 7, N. 1.— P. 1—8.

[57] Chen B.-Y., Extrinsic spheres in Riemannian manifold // Houston J. Math.— 1979.— V. 5, N. 3.— P. 319—324.

[58] Chen B.-Y. Geometry of submanifolds and its applications.— Tokyo: Sci. Univ. Tokyo, 1981.

[59] Chen B.-Y., Yamaguchi S. Classification of surfaces with totally geodesic Gauss image // Indiana Univ. Math. J.—1983.— V. 32, N. 1.— P. 143—154.

[60] Chen B.-Y., Yamaguchi S. Submanifolds with totally geodesic Gauss image // Geom. dedic.—1984.— V. 15, N. 3.— P. 313—322.

[61] Chen B.-Y., Nagano T. Harmonic metrics, harmonic tensors and Gauss maps // J. Math. Soc. Japan.—1984.— V. 36, N. 2.— P. 295—313.

[62] Chen B.-Y., Piccini P. Submanifolds with finity type Gauss map // Bull. Austral. Math. Soc. —1987.— V. 35, N. 2.— P. 161—186.

[63] Chen K. The geometry of Grassman manifolds as submanifolds // Adv. Math.— 1987.— V. 16, N. 3.— P. 334—335.

[64] Chen X. Harmonic mapping and Gauss mapping // Proc. of the 1981 Shanghai Symp. on Dif. Geom. and Dif. Equat.—1981.— P. 51—53.

[65] Chern S. S. Minimal surfaces in a Euclfdean space of N dimensions // Dif. and Comb. Topology. Morse Jubilee Volume. Princeton.—1965.— P. 187—198.

[66] Chern S. S., Spanier E. A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space // Comment. Math. Helv.—1951.— V. 25, N. 3.— P. 205—210.

[67] Dadok J., Harvey R., Morgan F. Calibrations in $\mathbb{R}^8$ // Trans. AMS.— 1988.— V. 307, N. 1.— P. 1—40.

[68] Eells J. J., Sampson H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds // Amer. J. Math.—1964.— V. 86, N. 1.— P. 109—160.

[69] Eells J. J., Lemaire L. Another report of harmonic maps. Survay // Bull. London Math. Soc.—1988.— V. 20, N. 86.— P. 385—584.

[70] Enomoto K. The Gauss image of flat surface fn $\mathbb{R}^4$ // Kodai Math. J.—1986.— V. 9, N. 1.— P. 19—32.

[71] Enomoto K. Global properties of the Gauss image of flat surfaces in $\mathbb{R}^4$ // Kodai Math. J.—1987.— V. 10, N. 3.— P. 272—284.

[72] Ferreira M. J. A twistorial characterization of conformal branched immersions with parallel mean curvature // Bull. Soc. math. Belg.—1987.— V. 39, N. 1.— P. 47—81.

[73] Ferus D. Immersions with parallel second fundamental form // Math. Z.—1974.— V. 140, N. 1.— P. 87—93.

[74] Ferus D. Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele // Manuscr. Math.—1974.— V. 12, N. 2.— P. 153—162.

[75] Ferus D. Symmetric submanifolds of Eucilidean space // Math. Ann.—1980.— V. 247, N. 1.— P. 81—93.

[76] Ferus D. On the volume of the generalized Gauss map // Geom. Dedic.— 1983.— V. 14, N. 3.— P. 237—242.

[77] Grecu E. Espaces de Grassman singuliéres // Bull. math. Soc. sci. math. RSR.— 1981. — V. 25, № 4.— P. 359—365.

[78] Grecu E. Sur les espaces de Grassmann réels, complexes et quaternioniques // Publ. Inst. Math.— 1982 (1983).— V. 33.— P. 73—82.

[79] Griffits P. On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to unqueness and existence questions in differential geometry // Duke Math. J.— 1974.— V. 41, N. 4.— P. 775—814.

[80] Harvey R., Lawson G. H. B. Calibrated geometries // Acta math. 1982.— V. 148.— P. 47—157.

[81] Harvey R., Morgan F. The faces of the Grassmannian of three-planes in R^7 (Calibrated geometries on R^7) // Invent. math.— 1986.— V. 83, N 2.— P. 191—228.

[82] Hoffman D., Osserman R. The geometry of the generalized Gauss map // Memoirs AMS.— 1980.— V. 28, N. 236 (1)—P. 1—105.

[83] Hoffman D., Osserman R., Schoen R. On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in R^3 and R^4 // Comment. Math. Helv.— 1982.— V. 57, N. 4.— P. 519—531.

[84] Hoffman D., Osserman R. The Gauss map of surfaces in R^n // J. Dif. Geom.— 1983.— V. 18, N. 1.— P. 733—754.

[85] Hoffman D., Osserman R. The Gauss map of surfaces in R^3 and R^4 // Proc. London. Math. Soc.— 1985.— V. 50, N. 1.— P. 27—56.

[86] Houch C.-S. On spectral geometry of complex quadrics // Tensor.— 1982.— V. 32, N. 2.— P. 77—81.

[87] Hsiang W. C., Szczarba R. H. On the tangent bundle of a Grassmann manifold // Amer. J. Math.— 1964.— V. 86, N. 4.— P. 698—704.

[88] Ishihara T. On a submanifold of a submanifold of a Riemannian manifold and the Gauss map // J. Math., Tokushima Univ.— 1980.— V. 14.— P. 1—9.

[89] Ishihara T. The harmonic Gauss map in a generalized sense // J. London Math. Soc.— 1982.— V. 26, N. 1.— P. 104—112.

[90] Ishihara T. Total curvature of manifolds in self-immersed manifolds // Manuscr. Math.— 1982.— V. 39, N. 2—3.— P. 201—218.

[91] Ishihara T. The Gauss map of Kaehler immersions into complex hyperbolic spaces // J. Math. Tokushima Univ.— 1983.—V. 17.— P. 11—14.

[92] Ishikawa S. On some extensions of the Ruh — Vilms' theorem // Tensor — 1982.— V. 39, N. 3.— P. 113—116.

[93] Ishikawa S. On Gauss map of immersion into space form // Repts Fac. Sci and Eng. Saga Univ. Math.— 1988.— V. 16, N. 1.— P. 1—11.

[94] Itoh T. Isotropic submanifolds in a Euclidean space // Proc. Japan Acad.— 1986.— V. A62, N 10.— P. 382—385.

[95] Kelly E. Tight equivariant immersions of symmetric spaces // Bull. AMS.— 1971.— V. 77, N. 4.— P. 580—583.

[96] Kenmotsu K. The mean curvature vector of surfaces in R^4 // Bull. London Math. Soc.—1987.— V. 19, № 5.— P. 458—462.

[97] Ki U.-H., Pak J. S. Submanifolds of a Euclidean m-space E^m with totally umbilical Gauss image // Tensor.— 1987.— V. 44, N 3.— P. 233—239.

[98] Kim J. J. Submanifolds with totally umbilical Gauss image immersed in a Euclidean spase // Kyungpook Math. J.— 1987.— V. 27, N. 1.— P. 15—26.

[99] Kobayashi S. Isometric imbeddings of compact symmetric spaces // Tohoku Math. J.— 1968.— V. 20, N 1.— P. 21—25.

[100] Koschorke U., Korbac J. The rank of vector fields on Grassman manifolds // Rend. Circ. Math. Palermo — 1987.— V. 36, N 16.— P. 113—117.

[101] Lanteri A. Invariant di k-piani in uno spazio eucldeo e metrica sulle grassmaniane reali // Rend. Inst. Lombardo Accad. Sci e Cett.— 1976.— V. A110, N 2.— P. 212—250.

[102] Lawson J. H. B. Some intrinsic characterization of minimal surfaces // J. Anal. Math.— 1971.— V. 24.— P. 151—161.

[103] Leichtweiss K. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Z.— 1961.— Bd 76, N 4.— S. 334—366.

[104] Lu G.-K. The elliptic geometry of extended spaces // Chinese Math.— 1963.— V. 4.— P. 54—69.

[105] Machado A., Salavessa T. Grassman manifolds as subsets of Euclidean spaces // Differ. Geom. Proc. Colloq. Santiago de Compostela, Sept. 1984, Boston e. a.— 1985.— P. 85—102.

[106] Markl M. Lower bounds for the embedding dimension of real oriented and nonoriented Grassmannians // Glasnik math.— 1988.— V. 23, N 1.— P. 213—219.

[107] Masahiko F. On the Gauss map of minimal surfaces immersed in R^n // Kodai Math. J.— 1986.— V. 9, N 1.— P. 44—49.

[108] Montiel S., Romero A. Holomorfic sectional curvatures of indefinite complex Grassman manifolds // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1983.— V. 93, N 1.— P. 121—125.

[109] Morgan F. Area-minimizing surfaces, faces of Grassmannians and calibrations // Amer. Math. Month.— 1988.— V. 95, N 9.— P. 813—822.

[110] Muto Y. The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space // J. Math. Soc. Japan.— 1978.— V. 30, N 1.— P. 85—100.

[111] Muto Y. Index of some Gauss-critical submanifolds // Tohoku Math. J.— 1978.— V. 30, N 4.— P. 561—573.

[112] Muto Y. Deformability of a submanifold in a Euclidean space whose image by the Gauss map is fixed // Proc. AMS.— 1979.— V. 76, N 1.— P. 140—144.

[113] Muto Y. Submanifolds of a Euclidean space with homothetic Gauss map // J. Math. Soc. Japan.— 1980.— V. 32, N 3.— P. 531—555.

[114] Muto Y. Deformation of submanifolds in a Euclidean space with fixed Gauss image. I // Geom. dedicata.— 1981.— V. 11, N 1.— P. 1—18; II. // Geom. dedicata.— 1982.— V. 12, N 3.— P. 321—335.

[115] Muto Y. Some properties of isometric minimal immersions of spheres into spheres // Kodai Math. J.— 1983.— V. 6, N 3.— P. 308—332.

[116] Nishikawa S. The Gauss map of Kaehler immersions // Tohoku Math. J.— 1975.— V. 27, N 3.— P. 453—460.

[117] Nikic J. Poptuna geodezijsku podmnogostrukost prostora $SO(m+2)/SO(m)\times \times SO(2)$ // Mat. B.— 1980.— V. 4, N 3.— P. 323—328.

[118] Nagano T. Groups of transformations of compact symmetric spaces // Trans. AMS.— 1965.— V. 118, N 6.— P. 428—453.

[119] Obata M. The Gauss map of immersion of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature // J. Diff. Geom.— 1968.— V. 2, N 2.— P. 217—223.

[120] Ohnita Y. Stability of harmonic maps and standart minimal immersions // Tohoku Math. J.— 1986.— V. 38, N 2.— P. 259—267.

[121] Osserman R. Minimal surfaces, Gauss maps, total curvature, eigenvalues, estimates and stability. Chern Symposium 1979.— N.— Y., Heidelberg, Berlin: Springer Verlag, 1980.

[122] Osserman R., Hoffman D. The area of the generalized Gaussian Image and the stability of minimal surfaces in S^n and R^n // Math. Ann.— 1982.— № 4.— P. 437—452.

[123] Pak J. S., Kim J. J. Isotropic immersions with totally geodesic Gauss image // Tensor — 1986.— V. 43, N. 2.— P. 167—174.

[124] Palmer B. Isothermic surfaces and the Gauss map // Proc. AMS.— 1988.— V. 104, N. 3.— P. 876—884.

[125] Pan Y. Submanifolds with parallel mean curvature and Gauss maps // Chin. Ann. Math.— 1983.— V. B4, N. 2.— P. 171—176.

[126] Pan Y., Shen J. Some stability results of harmonic map from a manifold with boundary // Lect. Notes in Math.— 1987.— V. 1255. — P. 80—87.

[127] Papantoniou B. J. Jacobi fields, geodesic spheres, and second fundamental form of the rank two symmetric space $M = SO\,(p+2)\,/\,SO\,(p) \times SO\,(2)$ // Tensor.— 1984.— V. 4.1, N 1.— P. 27—34.
[128] Papantoniou B. J. An investigation of a tensor field on the grassmannian $SO\,(p+2)\,/\,SO\,(p) \times SO\,(2)$ // Bull. Math. Soc. Sci. math. RSR. — 1987.— V. 31, N. 4.— P. 327—354.
[129] Pekonen O. On the Kaehler geometry of the Hilbert — Schmidt Grassmannian // Manuscr. Math.— 1989.— V. 63, N. 1.— P. 21—27.
[130] Pinl M. B-Kugelbilder neeler Minimalflächen in R^4 // Math. Z.— 1953.— Bd 59.— S. 290—295.
[131] Rigoli M. The harmonicity of the spherical Gauss map // Bull. London Math. Soc.— 1986.— V. 18, N. 6.— P. 609—612.
[132] Ruh E. A., Vilms J. The tension field of the Gauss map // Trans. AMS.— 1970.— V. 149, N. 2.— P. 569—573.
[133] Sakamoto K. Planar geodesic immersions // Tohoku Math. J.— 1977.— V. 29.— P. 25—56.
[134] Seaman W. On surfaces in R^4 // Proc. AMS.— 1985.— V. 94, N. 3.— P. 467—470.
[135] Shen Y.-B. On the tension field of the generalized Gauss map // J. Hangzhou Univ. Nat. Sci. Ed.— 1984.— V. 11, N. 3.— P. 311—315.
[136] Song S. Horizontal isometric maps and Gauss maps // Adv. math.— 1988.— V. 17, N. 2.— P. 207—208.
[137] Takeuchi M., Kobayashi S. Minimal imbeddings of R-spaces // J. Diff. Geom.— 1968.— V. 2, N. 2.— P. 203—216.
[138] Teleman C. Sur les varietes de Grassmann // Bull. math. Soc. sci. math. phys. RPR.— 1958.— V. 50, N. 2.— P. 203—224.
[139] Thas C. On submanifolds with flat normal connection in a conformally flat space // Kodai Math. J.— 1983.— V. 6.— P. 51—56.
[140] Vilms J. Submanifolds of Euclidean space with parallel second fundamental form // Proc. AMS.— 1972.— V. 32, N. 1.— P. 263—267.
[141] Wang C.-P. On the Gauss map of a submanifold in R^n and S^n // Lect. Notes in Math.— 1987.— V. 1255.— P. 109—129.
[142] Weiner J. L. The Gauss map for surfaces in 4-space // Math. Ann.— 1984.— V. 269, N. 4.— P. 541—560.
[143] Weiner J. L. The Gauss map for surfaces. Part I. The affine case // Trans. AMS.— 1986.— V. 293, N. 2.— P. 431—446; Part II. The Euclidean case // Trans. AMS.— 1986.— V. 293, N. 2.— P. 447—466.
[144] White B. Complete surfaces of finite total curvature // J. Diff. Geom.— 1987.— V. 26, N 2.— P. 315—326.
[145] Willmore T. J. The Gauss map of surfaces in R_3 and R_4 // Differ. Geom. Proc. Colloq. Santiago de Compostela. Boston e. a.— 1985.— P. 138—148.
[146] Wilkinson S. Exterior differential systems and the problem of characterizing Gauss maps // Contemp. Math. — 1986.— V. 51.— P. 121—130.
[147] Wintgen P. On the total curvature of surfaces in E^4 // Colloq. math.— 1978.— V. 39, N. 2.— P. 289—296.
[148] Wolf J. A. Geodesic spheres in Grassmann manifolds // Illinois J. Math.— 1963.— V. 7.— P. 425—446.
[149] Wolf J. A. Elliptic spaces in Grassmann manifolds // Illinois J. Math.— 1963.— V. 7.— P. 447—462.
[150] Wolf J. A. Space forms of Grassmann manifolds // Canad. J. Math. — 1963.
[151] Wong Y. C. Isoclinic n-planes in Euclidean $2n$-space, Clifford parallels in elliptic $(2n-1)$-space and the Hurvitz matrix equation // Memoirs AMS.— 1961.— V. 41.

[152] W o n g Y. C. Differential geometry of Grassmann manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1967.— V. 57.— P. 589—594.
[153] W o n g Y. C. Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1968.— V. 60, N. 1.— P. 75—79.
[154] W o n g Y. C. Conjugate loci in Grassmann manifolds // Bull. AMS.— 1968.— V. 74, N. 2.— P. 240—245.
[155] W o o d C. M. The Gauss section of a Riemannian immersion // J. London Math. Soc.— 1986.— V. 33, N. 1.— P. 157—168.
[156] W u G., C h e n W. An inequality for matrices and its geometrical applications // Acta Math. Sin.— 1988.— V. 31, N. 3.— P. 348—355.
[157] Y a u S. T. Submanifolds with constant mean curvature. I // Amer. J. Math.— 1974.— V. 96.— P. 346—366.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
13 августа 1990 г.