



Аналитические методы геометрического моделирования

Глава 2. Параметрические уравнения составных кривых

Оглавление

2.1 Составные кривые	2
2.2 Ломаные	14
2.3 Кусочно-полиномиальные кривые	16
2.3.1 Уравнение кусочно-полиномиальной кривой	17
2.3.2 Составной кубический полином Эрмита	22
2.3.3 Кусочно-полиномиальные кривые Бернштейна – Безье	25
2.3.4 Сплайны	34
2.5 Задачи и упражнения к главе 2	35
Литература	36

В главе 1 мы познакомились со способами построения единых «аналитических» уравнений непрерывных функций, которые заданы различными формульными выражениями на различных участках изменения аргумента. В этой главе мы познакомимся со способами построения параметрических уравнений составных кривых, когда криволинейные отрезки заданы различными параметрическими (векторными) уравнениями.

2.1 Составные кривые

Пусть требуется построить параметрическое уравнение $\mathbf{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ непрерывной составной кривой γ , которая на различных участках задается различными векторными уравнениями $\mathbf{R}_i(\tau)$ и последовательность обхода этих участков известна.

$$\gamma : \begin{cases} \gamma_1 : \mathbf{R}_1(\tau), \tau \in [\tau_1^0, \tau_1^1] \\ \gamma_2 : \mathbf{R}_2(\tau), \tau \in (\tau_2^0, \tau_2^1] \\ \dots \\ \gamma_n : \mathbf{R}_n(\tau), \tau \in (\tau_n^0, \tau_n^1] \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{R}_i(\tau) = (x_i(\tau), y_i(\tau), z_i(\tau))$ представляют уравнения гладких кривых, а сегменты $[\tau_i^0, \tau_i^1]$ выделяют на кривых $\mathbf{R}_i(\tau)$ соответствующие ориентированные криволинейные отрезки γ_i . Кроме того, выполняются условия непрерывной стыковки прилегающих сегментов $\mathbf{R}_{i-1}(\tau_{i-1}^1) = \mathbf{R}_i(\tau_i^0)$, т.е. конечная точка $i-1$ -го сегмента совпадает с начальной точкой i -го сегмента.

Формулу (1) нельзя рассматривать как кусочно определенную вектор-функцию, поскольку сегменты $[\tau_i^0, \tau_i^1]$ изменения параметра τ каждого участка γ_i могут пересекаться или даже все совпадать. Представление (1) – это набор кусков непрерывных вектор функций $\mathbf{R}_i(\tau), \tau \in [\tau_i^0, \tau_i^1]$, которые будучи взяты в последовательности $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ определяет некоторую непрерывную кривую. При этом мы полагаем, что направление прохождения криволинейных отрезков γ_i , как части составной кривой, сохраняется, т.е. определяется изменением параметров τ от меньшего значения τ_i^0 к большему τ_i^1 .

Назначим для начальной точки $\mathbf{R}_1(\tau_1^0)$, для точек $\mathbf{R}_i(\tau_i^0) (i=2, \dots, n)$ соединения криволинейных отрезков и для конечной точки $\mathbf{R}_n(\tau_n^1)$ составной кривой произвольные возрастающие значения $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ параметра t . Имеет место следующая

Теорема 1 (Доля П.Г. []) *Векторное уравнение составной криволинейной ломаной (1) может быть построено по следующей формуле*

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0) + \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{R}_k(\tau_k^0 + (\tau_k^1 - \tau_k^0)P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1})) - \mathbf{R}_k(\tau_k^0) \right) \quad (2)$$

Здесь параметры τ_k^0 и τ_k^1 являются граничными значениями параметра в уравнении криволинейного сегмента $\mathbf{R}_k(\tau) (\tau \in [\tau_k^0, \tau_k^1])$, а параметры t_{k-1}, t_k

представляют диапазон изменения параметра t для этого сегмента в едином уравнении составной кривой.

Напомним, что функция $P(t,a,w)$ определяется формулой (1.1.1). Приведем ее здесь еще раз

$$P(x,a,w) = \frac{1}{2w}(w+|x-a|-|x-a-w|) \quad (w \neq 0) \quad (3)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что правая часть равенства (2) представляет параметрическое уравнение k -го криволинейного отрезка γ_k , если $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

При $t < t_0$ имеем $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), и все слагаемые в (2) равны 0. Поэтому $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0)$, т.е. мы имеем фиксированную (начальную) точку криволинейной ломаной γ .

Пусть теперь $t_{q-1} \leq t \leq t_q$ ($q = 1, \dots, n$). Тогда для $k = 1, \dots, q-1$ $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 1$. Для $k = q$ имеем $P(t, t_{q-1}, t_q - t_{q-1}) = \alpha_q(t)$, где $\alpha_q(t) = (t - t_{q-1}) / (t_q - t_{q-1})$ является монотонно возрастающей от 0 до 1 функцией. Для $k = q+1, \dots, n$ имеем $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 0$. Поэтому в (2) все слагаемые с номерами $k > q$ равны нулю, и мы получаем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0) + \sum_{k=1}^{q-1} (\mathbf{R}_k(\tau_k^1) - \mathbf{R}_k(\tau_k^0)) + (\mathbf{R}_q(\tau_q^0 + (\tau_q^1 - \tau_q^0)\alpha_q(t)) - \mathbf{R}_q(\tau_q^0))$$

В силу условия стыковки $\mathbf{R}_{k-1}(\tau_{k-1}^1) = \mathbf{R}_k(\tau_k^0)$ ($k = 2, \dots, n$) все слагаемые, кроме первого из последней скобки, сокращаются. В результате мы получаем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_q(\tau_q^0 + (\tau_q^1 - \tau_q^0)\alpha_q(t)).$$

Когда параметр t изменяется в интервале $[t_{q-1}, t_q]$, аргумент последней формулы $\tau = \tau_q^0 + (\tau_q^1 - \tau_q^0)\alpha_q(t) = \tau_q^0 + \frac{\tau_q^1 - \tau_q^0}{t_q - t_{q-1}}(t - t_{q-1})$ пробегает отрезок $[\tau_q^0, \tau_q^1]$, и радиус-вектор $\mathbf{R}_q(\tau)$ $\tau \in [\tau_q^0, \tau_q^1]$ описывает точки соответствующего криволинейного отрезка γ_q .

Если $t \geq t_n$, то все функции $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 1$ и, с учетом условия стыковки $\mathbf{R}_k(\tau_k^1) = \mathbf{R}_{k+1}(\tau_{k+1}^0)$, получаем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0) + \sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k(\tau_k^1) - \mathbf{R}_k(\tau_k^0)) = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$$

Т.о. при изменении параметра t в интервалах $t_{k-1} < t < t_k$ ($k = 1, \dots, n$) вектор-функция $\mathbf{R}(t)$ последовательно описывает точки каждого криволинейного сегмента γ_k . Теорема доказана. ■

Отметим, что формула (2) представляет параметрическое уравнение кривой с концами. Действительно, выше мы показали, что при $t \leq t_0$

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0)$, а при $t \geq t_n$ $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$. Таким образом, когда параметр t возрастает от $-\infty$ до t_0 , точка кривой γ находится в неподвижном положении $\mathbf{R}_1(\tau_1^0)$. При изменении параметра t на отрезке $t_0 \leq t \leq t_n$ вектор $\mathbf{R}(t)$ описывает точки криволинейной ломаной (1), а при $t > t_n$ точка кривой снова находится в неподвижном положении $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$.

Заметим также, что при $\mathbf{R}_1(\tau_1^0) = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$ мы получаем уравнение замкнутой кривой. Однако многократного обхода кривой при изменении параметра t от $-\infty$ до ∞ не будет. Изображающая точка $\mathbf{R}(t)$ будет описывать кривую только один раз при изменении параметра t от t_0 до t_n . Для любого $t \notin (t_0, t_n)$ радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ будет совпадать с точкой $\mathbf{R}_1(\tau_1^0) = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$.

Пример 1. Написать параметрическое уравнение отрезка, соединяющего точки $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$.

Параметрическое уравнение прямой, которая проходит через точки A_0 и A_1 , имеет вид

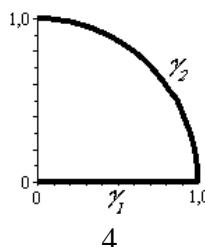
$$\mathbf{R}_1(t) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \tau(x_1 - x_0) \\ y_0 + \tau(y_1 - y_0) \end{pmatrix},$$

причем $\mathbf{R}_1(0) = A_0$ и $\mathbf{R}_1(1) = A_1$. Т.е. $\tau_1^0 = 0$ и $\tau_1^1 = 1$. Пусть параметр t в параметрическом уравнении отрезка A_0A_1 изменяется от 0 до 1, т.е. $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Тогда из (2) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_1(\tau_1^0) + (\mathbf{R}_1(\tau_1^0 + (\tau_1^1 - \tau_1^0)P(t, t_0, t_1 - t_0)) - \mathbf{R}_1(\tau_1^0)) = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + P(t, 0, 1)(x_1 - x_0) \\ y_0 + P(t, 0, 1)(y_1 - y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} P(t, 0, 1) = \\ &= \mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) \frac{1}{2} (1 + |t| - |t - 1|). \end{aligned}$$

Уравнение отрезка в пространстве строится аналогично. Отметим также, что всем значениям параметра $-\infty < t \leq 0$ соответствует одна точка A_0 , всем значениям параметра $1 \leq t < \infty$ соответствует точка A_1 . Поэтому последнее уравнение следует называть уравнением отрезка, а не прямой. \square

Пример 2. Написать параметрическое уравнение кривой, которая состоит из отрезка $[0, 1]$ оси X и четверти окружности с центром в начале координат радиуса 1.



Уравнение отрезка γ_1 имеет вид $x(\tau) = \tau$, $y(\tau) = 0$, где $[\tau_1^0, \tau_1^1] = [0, 1]$.

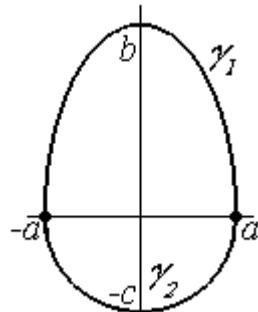
Уравнение дуги окружности γ_2 можно записать в виде $x = \cos \frac{\pi \tau}{2}$, $y = \sin \frac{\pi \tau}{2}$,

где $[\tau_2^0, \tau_2^1] = [0, 1]$. Назначим узлам криволинейной ломаной значения параметра: $t=0$ для точки $(0, 0)$, $t=1$ для точки $(1, 0)$ и $t=2$ для точки $(0, 1)$. Тогда уравнение замкнутой кривой, состоящей из отрезка γ_1 и дуги окружности γ_2 , будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) P(t, 0, 1) + \left(\begin{pmatrix} \cos(\pi P(t, 1, 1)/2) \\ \sin(\pi P(t, 1, 1)/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 + P(t, 0, 1) + \cos(\pi P(t, 1, 1)/2) \\ \sin(\pi P(t, 1, 1)/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Заметим, что мы получили уравнение криволинейной ломаной с концами. Любому значению $t \in (-\infty, 0]$ соответствует точка $(0, 0)$, а любому значению $t \in [2, \infty)$ соответствует точка $(0, 1)$. \square

Пример 3. Написать параметрическое уравнение замкнутой кривой, составленной из дуг двух эллипсов.

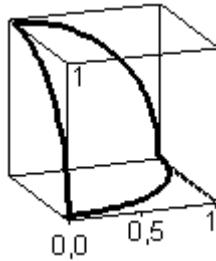


Уравнение дуги γ_1 (верхней части эллипса с полуосами a и b) имеет вид $x = a \cos \tau$, $y = b \sin \tau$ и $\tau \in [\tau_1^0, \tau_1^1] = [0, \pi]$. Уравнение дуги γ_2 (нижней части эллипса с полуосами a и c) имеет аналогичный вид $x = a \cos \tau$, $y = c \sin \tau$ и $\tau \in [\tau_2^0, \tau_2^1] = [\pi, 2\pi]$. Назначим точкам стыка дуг эллипсов значения параметра: $t=0$ для точки $(a, 0)$, $t=1$ для точки $(-a, 0)$ и $t=2$ снова для точки $(a, 0)$. Тогда уравнение замкнутой кривой, состоящей из двух дуг эллипсов, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a \cos \pi P(t, 0, 1) \\ b \sin \pi P(t, 0, 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a \cos(\pi + \pi P(t, 1, 1)) \\ c \sin(\pi + \pi P(t, 1, 1)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} a(\cos \pi P(t, 0, 1) - \cos \pi P(t, 1, 1) + 1) \\ b \sin \pi P(t, 0, 1) - c \sin \pi P(t, 1, 1) \end{pmatrix}\end{aligned}\blacksquare$$

Пример 4. Написать параметрическое уравнение замкнутой пространственной кривой

$$\gamma : \begin{cases} (\cos \tau, \sin \tau, 0), 0 \leq \tau \leq \pi/2 \\ (0, \cos \tau, \sin \tau), 0 \leq \tau \leq \pi/2 \\ (\sin \tau, 0, \cos \tau), 0 \leq \tau \leq \pi/2 \end{cases}$$



Назначим узлам $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$ значения параметра $\{t_i\}_{i=0}^3 = (0, 1, 2, 3)$. В соответствии с (2) имеем

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi P(t, 0, 1)/2) \\ \sin(\pi P(t, 0, 1)/2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\pi P(t, 1, 1)/2) \\ \sin(\pi P(t, 1, 1)/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\pi P(t, 2, 1)/2) \\ 0 \\ \cos(\pi P(t, 2, 1)/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

После упрощений получаем

$$x(t) = \cos \frac{\pi}{4} (1 + |t| - |t - 1|) + \sin \frac{\pi}{4} (1 + |t - 2| - |t - 3|)$$

$$y(t) = -1 + \sin \frac{\pi}{4} (1 + |t| - |t - 1|) + \cos \frac{\pi}{4} (1 + |t - 1| - |t - 2|)$$

$$z(t) = -1 + \sin \frac{\pi}{4} (1 + |t - 1| - |t - 2|) + \cos \frac{\pi}{4} (1 + |t - 2| - |t - 3|) \quad \square$$

Если проанализировать теорему 1, то легко заметить, что при доказательстве формулы (2) использовались только условия того, что непрерывная функция $P(x, a, w)$ обладает следующим свойством: при $x < a$ функция равна нулю, на отрезке $[a, a+w]$ она монотонно возрастает и при $x > a+w$ равна единице. Ее линейность на отрезке $[a, a+w]$ не использовалась. Поэтому имеет место следующая, более общая

Теорема 2. (Доля П.Г. []) Назначим для начальной точки, для точек соединения криволинейных отрезков и для конечной точки составной кривой (1) возрастающие значения $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ параметра t . Построим набор непрерывных функций $\alpha_k(t)$, которые обладают свойством: $\alpha_k(t) = 0$ при $t \leq t_{k-1}$, на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ функция $\alpha_k(t)$ монотонно возрастает от 0 до 1, и $\alpha_k(t) = 1$ при $t > t_k$. Тогда

(i) векторное уравнение составной криволинейной ломаной (1) может быть построено по формуле

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0) + \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{R}_k(\tau_k^0 + (\tau_k^1 - \tau_k^0)\alpha_k(t)) - \mathbf{R}_k(\tau_k^0) \right) \quad (4)$$

- (ii) если все вектор-функции $\mathbf{R}_i(\tau)$ на отрезках $[\tau_i^0, \tau_i^1]$ имеют непрерывные производные до порядка m включительно ($m > 0$), и функции $\alpha_k(t)$ также являются m раз непрерывно дифференцируемыми, то вектор-функция $\mathbf{R}(t)$ также будет иметь непрерывные производные до порядка m включительно. Кроме того, все производные $\mathbf{R}^{(q)}(t_k) = 0$ ($q=1,2,\dots,m$) вектор функции $\mathbf{R}(t)$ в узловых точках $t = t_k$ равны нулю.

Доказательство. То, что правая часть формулы (4) при указанном выборе функций $\alpha_k(t)$ представляет векторное уравнение кривой (1) показывается так же как и при доказательстве теоремы 1. Поэтому требует доказательства только утверждение (ii).

Поскольку $\alpha_i(t) \in C^m(\mathbf{R})$ и $\mathbf{R}_i(\tau)$ имеет непрерывные m производные на отрезке $[\tau_i^0, \tau_i^1]$, то суперпозиция $\mathbf{R}_i(\tau_i(t)) = \mathbf{R}_i(\tau_i^0 + (\tau_i^1 - \tau_i^0)\alpha_i(t))$, где $\tau_i(t) = \tau_i^0 + (\tau_i^1 - \tau_i^0)\alpha_i(t)$, как функция параметра t будет иметь непрерывную первую производную на всей вещественной оси. Действительно, имеем

$$\frac{d\mathbf{R}_i(\tau_i(t))}{dt} = (\tau_i^1 - \tau_i^0) \frac{d\mathbf{R}_i(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\alpha_i(t)}{dt}.$$

Но значение аргумента $\tau_i(t)$ функции $\mathbf{R}_i(\tau_i(t))$ при любом $-\infty < t < \infty$ находится на отрезке $[\tau_i^0, \tau_i^1]$. Поэтому производная $d\mathbf{R}_i(\tau_i(t))/dt$ существует и непрерывна при любом t . Поскольку $\alpha_i(t) \in C^m(\mathbf{R})$ ($m \geq 1$), то правая часть последней формулы существует и непрерывна при любом t .

Аналогично, $d^q \mathbf{R}_i(\tau_i(t))/dt^q$ при $q \leq m$ выражается через производные $d^k \mathbf{R}_i(\tau)/d\tau^k$, $d^k \alpha_i(t)/dt^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$), которые существуют и непрерывны $\forall t$. Поэтому $\forall t$ производные $d^q \mathbf{R}_i(\tau_i(t))/dt^q$ ($q \leq m$) существуют и непрерывны. Заметим, что при $t \leq t_{i-1}$ и $t \geq t_i$ производные $d^q \mathbf{R}_i(\tau_i(t))/dt^q$ равны 0, поскольку $d^k \alpha_i(t)/dt^k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, q$) для этих t .

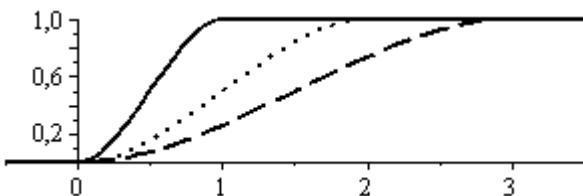
Т.о. каждое слагаемое в (4) имеет непрерывные производные до порядка m включительно. Следовательно, вся сумма будет представлять вектор-функцию, имеющую непрерывные производные до порядка m для всех $-\infty < t < \infty$.

Так как производные $d^k \alpha_i(t)/dt^k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) во всех узлах t_j обращаются в ноль (в окрестности узлов с номерами $j < i-1$ и $j > i+1$ функция $\alpha_i(t)$ постоянна, а в узлах t_{i-1} и t_i ее производные существуют и непрерывны по условию, т.е. тоже равны 0), то производные $d^k \mathbf{R}_i(\tau_i(t))/dt^k$ в этих точках будут равны 0, т.е. $\mathbf{R}^{(k)}(t_i) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Теорема доказана. ■

В качестве функций $\alpha_k(t)$ могут выступать различные функции. Например, для построения $\alpha_k(t)$ можно использовать функцию $P_1^3(t, a, w)$ определенную в примере 2 п. 1.3.2. формулой

$$P_1^3(t, a, w) = \frac{1}{2w^3} \left(w^3 + (-2t + 2a + 3w)(t - a)|t - a| + (2t - 2a + w)(t - a - w)|t - a - w| \right) \quad (5)$$

Она является один раз непрерывно дифференцируемой потому, что выражение $(t - a)|t - a|$ при любом фиксированном a имеет непрерывную производную ($\frac{d}{dt}(t - a)|t - a| = 2|t - a|$). На следующем рисунке показаны графики функций $P_1^3(t, 0, 1)$, $P_1^3(t, 0, 2)$, $P_1^3(t, 0, 3)$.



В кусочном виде эту функцию можно записать следующим образом

$$P_1^3(t, a, w) = \begin{cases} 0 & , t \leq a \\ p(t), & a < t < a + w, \text{ где } p(t) = -\frac{2}{w^3}(t - a)^3 + \frac{3}{w^2}(t - a)^2. \\ 1 & , t \geq a + w \end{cases}$$

Но $p'(t) = \frac{6(t - a)}{w^2} \left(1 - \frac{t - a}{w} \right)$. Отсюда сразу видно, что $p'(t) > 0$ при $a < t < a + w$ и, следовательно, на этом участке функция $p(t)$ монотонно возрастает. Значит функция $P_1^3(t, a, w)$ удовлетворяет всем требованиям, наложенным на функции $\alpha_k(t)$ в теореме 2 (при $m=1$).

В примере 4 п.1.3.1 мы построили функцию $P_2^5(t, a, w)$, которая является дважды непрерывно дифференцируемой. Ее уравнение имеет вид

$$P_2^5(t, a, w) = \frac{1}{2w^5} \left(w^5 + (6t^2 - 3t(5w + 4a) + 10w^2 + 15wa + 6a^2)|t - a|^3 - (6t^2 + 3t(w - 4a) + w^2 - 3wa + 6a^2)|t - a - w|^3 \right) \quad (6)$$

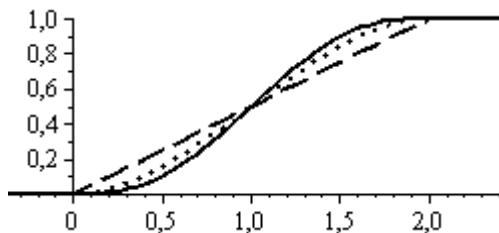
Она является дважды непрерывно дифференцируемой потому, что выражение $|t - a|^3$ имеет непрерывную первую и вторую производные ($\frac{d}{dt}|t - a|^3 = 3(t - a)|t - a|$ и $\frac{d^2}{dt^2}|t - a|^3 = 6|t - a|$). Кусочный вид этой функции мы привели в том примере. На отрезке $[a, a+w]$ этот кусочный полином вычисляется по формуле $p(t) = 10\left(\frac{t-a}{w}\right)^3 - 15\left(\frac{t-a}{w}\right)^4 + 6\left(\frac{t-a}{w}\right)^5$, при $t < a$ он равен 0, и при $t > a+w$ равен 1. Легко видеть, что производная

$$p'(t) = \frac{30(t-a)^2}{w^3} \left(1 - \frac{t-a}{w}\right)^2 > 0$$

положительна при всех t , кроме $t=a$ и $t=a+w$.

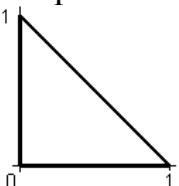
Поэтому функция $p(t)$ монотонно возрастает на интервале $(a, a+w)$, и функция $P_2^5(t, a, w)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на функции $\alpha_k(t)$ в теореме 2 ($m=2$).

При обозначении функций $P_1^3(t, a, w)$ и $P_2^5(t, a, w)$ мы использовали следующее правило индексации: верхний индекс обозначает максимальную степень кусочного полинома, а нижний индекс – его минимальную гладкость. Тогда функцию $P(t, a, w)$, определяемую формулой (3), следовало бы обозначать $P_0^1(t, a, w)$. Однако для нее мы сохраним принятое выше обозначение. На следующем рисунке для сравнения приведены графики функций $P(t, 0, 2)$, $P_1^3(t, 0, 2)$, $P_2^5(t, 0, 2)$ (пунктирная, точки, сплошная линия).



Другим примером могут быть функции из упражнения 11.4 (один раз непрерывно дифференцируемая функция), функция из примера 3 п.1.3.1 или из упражнений (добавить упражнения в гл.1: ноль и единица соединяются окружностью, параболой, четвертью синусоиды).

Пример 4. Построить один раз непрерывно дифференцируемое уравнение прямоугольного треугольника из упражнения 1.5.1. Его рисунок и уравнения, построенные по формуле (2) теоремы 1, приведены ниже



$$x = P(t, 0, 1) - P(t, 1, 1)$$

$$y = P(t, 1, 1) - P(t, 2, 1)$$

В соответствии с теоремой 2 вместо функций $P(t, a, w)$ в этих уравнениях можно использовать, например, функции $P_1^3(t, a, w)$, т.е. можем записать $x(t) = P_1^3(t, 0, 1) - P_1^3(t, 1, 1)$, $y(t) = P_1^3(t, 1, 1) - P_1^3(t, 2, 1)$. Из (5) имеем

$$P_1^3(t, 0, 1) = \frac{1}{2} (1 + (3 - 2t)t |t| + (2t + 1)(t - 1) |t - 1|).$$

$$P_1^3(t, 1, 1) = \frac{1}{2} (1 + (-2t + 5)(t - 1) |t - 1| + (2t - 1)(t - 2) |t - 2|)$$

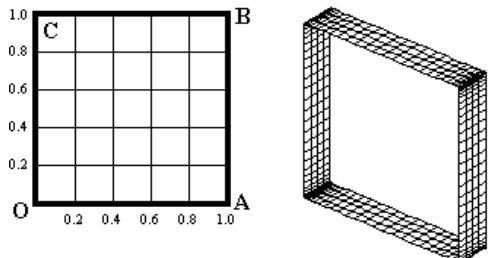
$$P_1^3(t, 2, 1) = \frac{1}{2} (1 + (-2t + 7)(t - 2) |t - 2| + (2t - 3)(t - 3) |t - 3|)$$

Подставляя их в уравнения для функций $x(t)$, $y(t)$, и упрощая, получаем один раз непрерывно дифференцируемое уравнение треугольника

$$x(t) = \frac{1}{2}((-2t+3)t|t| + 4(t-1)^2|t-1| - (2t-1)(t-2)|t-2|)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}((-2t+5)(t-1)|t-1| + 4(t-2)^2|t-2| - (2t-3)(t-3)|t-3|) \quad \square$$

Пример 5. Написать дважды непрерывно дифференцируемое уравнение квадрата, приведенного на рис.1 гл.1. Там мы записали его уравнение в виде $x(t) = P(t, 0, 1) - P(t, 2, 1)$, $y(t) = P(t, 1, 1) - P(t, 3, 1)$ (то же дает формула (2)).



Вместо функций $P(t, a, w)$ используем функции $P_2^5(x, a, w)$. Подставляя их в эти уравнения и заменяя выражениями (6), получаем

$$x(t) = \frac{1}{2}((6t^2 - 15t + 10)|t|^3 - (6t^2 + 3t + 1)|t-1|^3 - (6t^2 - 39t + 64)|t-2|^3 + (6t^2 - 21t + 19)|t-3|^3)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}((6t^2 - 27t + 31)|t-1|^3 - (6t^2 - 9t + 4)|t-2|^3 - (6t^2 - 51t + 109)|t-3|^3 + (6t^2 - 33t + 46)|t-4|^3)$$

На правом рисунке показан тот же квадрат в виде поверхности с уравнением $x(t, \tau) = x(t)$, $y(t, \tau) = y(t)$, $z(t, \tau) = \tau$. Параметр t изменяется вдоль контура квадрата и координатные линии $t = Const$ на этой поверхности проведены на одинаковом по t удалении (на рисунке $\Delta t = 1/30$) друг от друга. Мы видим, что эти линии сгущаются к ребрам поверхности. Т.е. приращение параметра Δt в середине квадрата приводит к относительно большому расстоянию между соответствующими точками поверхности. То же приращение Δt возле ребра квадрата приводит к весьма малому расстоянию между точками. \square

Выбирая различные наборы функций $\alpha_k(t)$, мы получаем разные параметризации той же самой непрерывной кусочно-гладкой кривой. Угловые точки кривой остаются при любой параметризации. Повышенная гладкость функций $\alpha_k(t)$ дает возможность получать более гладкие уравнения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, но все равно не делает кривые регулярными. Напомним, что для регулярности кривой на интервале требуется наличие такой параметризации, при которой $|\mathbf{R}'(t)| \neq 0$ ни в одной его точке. Но при нашем построении в угловых точках кривой $|\mathbf{R}'(t_i)| = 0$ и, естественно, что нерегулярная кривая не становится регулярной.

Более того, если два участка гладко стыкуются в какой-либо точке, т.е. точка является регулярной для составной кривой, то выбор гладких функций

$\alpha_k(t)$ для левого и правого участков изменения параметра t ухудшает ситуацию. Такой выбор функций $\alpha_k(t)$ обращает в ноль левый и правый касательный вектора в этой точке. Для гладких кривых это, как правило, нежелательно. Простым решением является выбор в качестве конструирующих функций $\alpha_k(t)$ функции $P(t,a,w)$. В этом случае касательный вектор по длине может быть разрывен в этой точке, но непрерывен по направлению. Кроме того, при построении векторного уравнения (2) кусочно заданной кривой γ , мы выбирали произвольно возрастающие значения $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ параметра t . Если значения t_i подбирать специальным образом, то иногда можно сделать касательный вектор $\mathbf{R}'(t)$ непрерывным в узлах также и по длине. Более сложное решение состоит в построении функций $\alpha_k(t)$ специально для каждого криволинейного сегмента. Можно подобрать начальный и конечный наклоны функций $\alpha_k(t)$ (оставляя ее монотонно возрастающей на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$) так, что касательный вектор $\mathbf{R}'(t)$ будет непрерывен также и по длине.

Пусть теперь кроме криволинейных сегментов конечной длины $\mathbf{R}_i(\tau), \tau \in [\tau_i^0, \tau_i^1] (i=1,2,\dots,n)$ задана вектор-функция $\mathbf{R}_0(\tau)$, которая при $-\infty < \tau \leq \tau_0^1$ представляет начальную бесконечную ветвь кривой γ_0 . И пусть задана вектор-функция $\mathbf{R}_{n+1}(\tau)$, которая при $\tau > \tau_{n+1}^0$ представляет последнюю бесконечную ветвь составной кривой γ_{n+1} . Как и ранее, считаем, что эти вектор-функции подобраны так, что выполняется условие непрерывности $\mathbf{R}_{i-1}(\tau_{i-1}^1) = \mathbf{R}_i(\tau_i^0) (i=1,\dots,n+1)$. Т.о. кривая γ состоит из криволинейных кусков γ_i и может быть задана следующим образом

$$\gamma : \begin{cases} \gamma_0 : \mathbf{R}_0(\tau), -\infty < \tau \leq \tau_0^1 \\ \gamma_1 : \mathbf{R}_1(\tau), \tau \in (\tau_1^0, \tau_1^1] \\ \dots \\ \gamma_n : \mathbf{R}_n(\tau), \tau \in (\tau_n^0, \tau_n^1] \\ \gamma_{n+1} : \mathbf{R}_{n+1}(\tau), \tau > \tau_{n+1}^0 \end{cases} \quad (7)$$

Назначим для точек $\mathbf{R}_i(\tau_i^0) (i=1,2,\dots,n+1)$ соединения криволинейных отрезков возрастающие значения параметра t_0, t_1, \dots, t_n . Имеет место следующая

Теорема 3. (Доля П.Г.) *Векторное уравнение криволинейной ломаной (7), которая содержит бесконечные ветви γ_0 и γ_{n+1} , имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) = & \mathbf{R}_0(\tau_0^1 + Q_l(t, t_0)) + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{R}_i(\tau_i^0 + (\tau_i^1 - \tau_i^0) P(t, t_{i-1}, t_i - t_{i-1})) - \mathbf{R}_i(\tau_i^0) \right) + \\ & + \left(\mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0 + Q(t, t_n)) - \mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0) \right) (-\infty < t < \infty) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь вектор-функция $\mathbf{R}_0(\tau)$ при $\tau < \tau_0^1$ представляет начальную (бесконечную) ветвь γ_0 кривой, а $\mathbf{R}_{n+1}(\tau)$ при $\tau > \tau_{n+1}^0$ представляет последнюю (бесконечную) ветвь γ_{n+1} . При этом считаем, что выполняются условия непрерывности $\mathbf{R}_0(\tau_0^1) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0)$ и $\mathbf{R}_n(\tau_n^1) = \mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0)$.

Здесь функции $Q_l(t, t_0)$ и $Q(t, t_n)$ построены по формулам (1.1.4). Приведем их здесь еще раз

$$Q(x, a) = \frac{1}{2}(x - a + |x - a|) \quad \text{и} \quad Q_l(x, a) = \frac{1}{2}(x - a - |x - a|). \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, при $t < t_0^0$ мы имеем $Q_l(t, t_0) = t - t_0$, $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), $Q(t, t_n) = 0$. В этом случае в (8) все слагаемые кроме первого сокращаются и мы получаем $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(\tau_0^1 + (t - t_0))$. Когда t изменяется от $-\infty$ до t_0 аргумент $\tau_0(t) = \tau_0^1 + (t - t_0)$ изменяется от $-\infty$ до τ_0^1 . Поэтому вектор-функция $\mathbf{R}_0(\tau_0^1 + (t - t_0))$ описывает точки начального участка γ_0 составной кривой.

При $t_0 \leq t \leq t_n$ имеем $Q_l(t, t_0) = 0$ и $Q(t, t_n) = 0$. С учетом условия стыковки $\mathbf{R}_0(\tau_0^1) = \mathbf{R}_1(\tau_1^0)$ формула (8) принимает вид (2) и радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ последовательно описывает точки криволинейных отрезков γ_i ($i = 1, \dots, n$).

При $t > t_n$ мы имеем $P(t, t_{k-1}, t_k - t_{k-1}) = 1$ ($k = 1, \dots, n$), $Q_l(t, t_0) = 0$ и $Q(t, t_n) = t - t_n$. Поэтому из (8) мы получаем

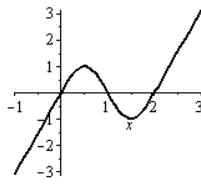
$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_0(\tau_0^1) + \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{R}_k(\tau_k^1) - \mathbf{R}_k(\tau_k^0) \right) + \mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0 + (t - t_n)) - \mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0) = \\ &= \mathbf{R}_{n+1}(\tau_{n+1}^0 + (t - t_n)) \end{aligned}$$

Здесь мы учли все условия стыковки $\mathbf{R}_{i-1}(\tau_{i-1}^1) = \mathbf{R}_i(\tau_i^0)$ ($i = 1, \dots, n+1$). Когда t изменяется от t_n до ∞ , аргумент $\tau = \tau_{n+1}^0 + (t - t_n)$ изменяется от τ_{n+1}^0 до ∞ и вектор-функция $\mathbf{R}_{n+1}(\tau)$ описывает точки последнего криволинейного участка γ_{n+1} кривой γ . Теорема доказана. ■

Если начальная и конечная вектор-функции вырождаются в постоянные вектора, т.е. $\mathbf{R}_0(\tau) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_1(\tau_1^0)$ и $\mathbf{R}_{n+1}(\tau) = \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n(\tau_n^1)$, то формула (8) представляет уравнение криволинейной ломаной с концами. Фактически она совпадет с формулой (2).

Пример 4. Написать уравнение плоской бесконечной кривой, заданной следующим образом

$$y(x) = \begin{cases} (\tau, \pi\tau), & \tau \leq 0 \\ (\tau, \sin \pi\tau), & 0 < \tau < 2 \\ (\tau + 2, \pi\tau), & \tau > 0 \end{cases}$$



Назначим узлам $(0,0)$ и $(2,0)$ криволинейной ломаной значения параметра $\{t_i\}_{i=0}^1 = \{0, 2\}$. В соответствии с (8) имеем

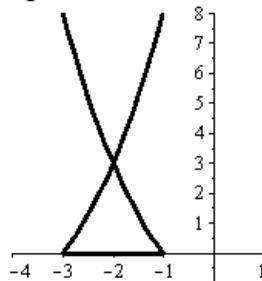
$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} Q_l(t, 0) \\ \pi Q_l(t, 0) \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2P(t, 0, 2) \\ \sin 2\pi P(t, 0, 2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 2 + Q(t, 2) \\ \pi Q(t, 2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} Q_l(t, 0) + 2P(t, 0, 2) + Q(t, 2) \\ \pi Q_l(t, 0) + \sin 2\pi P(t, 0, 2) + \pi Q(t, 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

После упрощений получаем

$$x(t) = t, \quad y(t) = \pi(t-1) + \frac{1}{2}\pi(|t-2| - |t|) + \sin \frac{\pi(|t-2| - |t|)}{2}.$$

Пример 5. Написать параметрическое уравнение плоской бесконечной кривой, заданной следующим образом

$$y(x) = \begin{cases} (\tau, \tau^2 - 1), & \tau \leq -1 \\ (-2 - \tau, 0), & -1 < \tau < 1 \\ (\tau - 4, \tau^2 - 1), & \tau > 1 \end{cases}$$



Назначим узлам $(-1,0)$ и $(-3,0)$ криволинейной ломаной значения параметра $\{t_i\}_{i=0}^1 = \{-1, 1\}$. Тогда, в соответствии с (8), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} -1 + Q_l(t, -1) \\ (-1 + Q_l(t, -1))^2 - 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -2 - (-1 + 2P(t, -1, 2)) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ \left(\begin{pmatrix} (1 + Q(t, 1)) - 4 \\ (1 + Q(t, 1))^2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 + Q_l(t, -1) - 2P(t, -1, 2) + Q(t, 1) \\ -2(Q_l(t, -1) - Q(t, 1)) + Q_l^2(t, -1) + Q^2(t, 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

После упрощений получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + t - |t+1| + |t-1| \\ y(t) &= t^2 - 1 + \frac{1}{2}(t+1)|t-1| + \frac{1}{2}(1-t)|t+1| \end{aligned}$$

□

Также как и в теореме 2 можно показать, что в доказательстве используется только монотонность функций (9). Если есть необходимость построить гладкие координатные функции $x(t), y(t), z(t)$, представляющие параметрическое уравнение кривой (7), то вместо функций (9) можно,

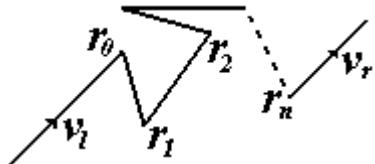
например, использовать функции $(-1)^m(x-t_0)^m Q_l(x,t_0)$ и $(x-t_n)^m Q(x,t_n)$. При целом $m \geq 1$ они являются m раз непрерывно дифференцируемыми и монотонно возрастающими на участках $(-\infty, t_0)$ и (t_n, ∞) соответственно, а вне участков равны 0.

Используя формулы (2) и (8), мы можем построить векторное уравнение практически для любой составной кривой. Оно будет содержать сумму аналитических выражений уравнений исходных кусков γ_i в суперпозиции с функцией абсолютного значения.

2.2 Ломаные

Формулы (2) и (8) позволяют получать параметрические уравнения практически любых составных кривых. Но для некоторых из них эти формулы допускают упрощения.

В качестве примера рассмотрим уравнение ломаной. Предположим, что нам дан набор узлов \mathbf{r}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) ломаной. Пусть также вектор \mathbf{v}_l определяет направление начального луча ломаной, и вектор \mathbf{v}_r задает направление последнего луча ломаной. Назначим узлам произвольные возрастающие значения параметра $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.



Уравнение прямолинейного сегмента проходящего через два смежных узла имеет вид

$$\mathbf{R}_i(\tau) = \mathbf{r}_{i-1} + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})\tau, 0 \leq \tau \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$$

Уравнения начального и конечного лучей имеют вид

$$\mathbf{R}_0(\tau) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_l \tau, \tau \leq 0$$

$$\mathbf{R}_{n+1}(\tau) = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_r \tau, \tau \geq 0$$

Подставляя эти уравнения в (8), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_l \cdot Q_l(t, t_0) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) P(t, t_{i-1}, t_i - t_{i-1}) + \\ + \mathbf{v}_r \cdot Q(t, t_n) \quad (-\infty < t < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь векторы \mathbf{v}_l , \mathbf{v}_r и $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ указывают направление, в котором возрастает значение параметра t . Если вектора \mathbf{v}_l и \mathbf{v}_r равны 0, то формула (1) будет представлять уравнение ломаной с концами. Если начальная и конечная точки совпадают, т.е. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_n$, то ломаная является замкнутой.

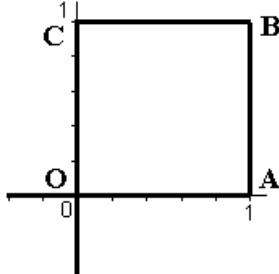
Вспоминая определения (3) и (9) мы можем выразить уравнение ломаной с использованием функции абсолютного значения.

Пример 1. Построим уравнение квадрата, приведенного на рис. 1 (глава 1). Здесь $\mathbf{r}_0 = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и \mathbf{v}_l и \mathbf{v}_r равны 0. Назначим узлам значение параметра $\{t\}_{i=0}^4 = i$. Тогда из (1) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} P(t,0,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P(t,1,1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P(t,2,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} P(t,3,1) = \\ &= \begin{pmatrix} P(t,0,1) - P(t,2,1) \\ P(t,1,1) - P(t,3,1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |t| - |t-1| - |t-2| + |t-3| \\ |t-1| - |t-2| - |t-3| + |t-4| \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Эти формулы представляют уравнение квадрата при $0 \leq t \leq 4$ и совпадают с результатом примера 3 п.1.1 (глава 1). Отметим, что точке $(0,0)$ соответствуют значения параметра $t \in [-\infty, 0]$ и $t \in [4, \infty]$, т.е. в этой точке нарушается однозначность соответствия параметра t и точек квадрата. Если в последнем уравнении взять более широкий интервал, чем $(0,4)$, то мы все равно получим квадрат.

Можно построить уравнение квадрата по-другому.



Будем считать, что ломаная состоит из луча оси абсцисс, соединяющего точки $x = -\infty$ и A , отрезков AB , BC и луча оси ординат, соединяющего точку C и точку $y = -\infty$. Назначим вершинам ABC последовательные значения параметра $t = 1, 2, 3$ и применим формулу (1). Получаем

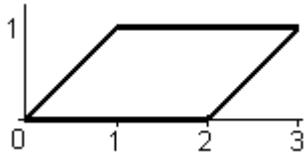
$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_l(t,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P(t,1,1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P(t,2,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} Q(t,3) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + Q_l(t,1) - P(t,2,1) \\ P(t,1,1) - Q(t,3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t - |t-1| - |t-2| + |t-3| \\ 4-t + |t-1| - |t-2| - |t-3| \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Эти уравнения содержат модулей на один меньше, чем предыдущие уравнения, но представляют квадрат только при $0 \leq t \leq 4$.

Пример 2. Написать уравнение параллелограмма с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$.

$$x = 3P(t,0,3) - 3P(t,3,3) = \frac{1}{2}(|t| - 2|t-3| + |t-6|)$$

$$y = P(t,2,1) - P(t,5,1) = \frac{1}{2}(|t-2| - |t-3| - |t-5| + |t-6|)$$



Пример 3. Построить уравнение плоского правильного n -угольника с центром в начале координат, радиусом описанной окружности равным R и одной из вершин расположенной на оси ОХ. Вектора вершин равны

$$\mathbf{r}_i = R \left(\cos \frac{2\pi i}{n}, \sin \frac{2\pi i}{n} \right)$$

Вектор соединяющей i -ю и $(i+1)$ -ю вершины (вершины обходятся против часовой стрелки) равен

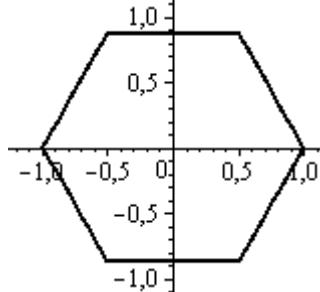
$$\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i = 2R \sin \frac{\pi}{n} \cdot \left(-\sin(2i+1)\frac{\pi}{n}, \cos(2i+1)\frac{\pi}{n} \right)$$

Если для вершин назначить натуральные значения параметра $t_i = i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), то уравнение правильного n -угольника будет иметь вид

$$x_n(t) = R - 2R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^n P(t, i, i+1) \cdot \sin(2i+1) \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

$$y_n(t) = 2R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^n P(t, i, i+1) \cdot \cos(2i+1) \frac{\pi}{n}$$

Например, уравнение правильного шестиугольника можно записать в виде



$$x_6(t) = 1 + \frac{1}{4}(-|t| - |t-1| + |t-2| + 2|t-3| + |t-4| - |t-5| - |t-6|)$$

$$y_6(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(|t| - |t-1| - |t-2| + |t-4| + |t-5| - |t-6|)$$

2.3 Кусочно-полиномиальные кривые

В разделе 1.3 мы видели, что кусочно-полиномиальные функции могут быть представлены единственным «аналитическим» выражением, использующим функции абсолютного значения. Здесь мы рассмотрим, как эти результаты можно перенести на параметрические уравнения кусочно-полиномиальных кривых.

2.3.1 Уравнение кусочно-полиномиальной кривой

В главе 1 мы показали (теорема 1), что непрерывная кусочно-полиномиальная функция $p(t)$, заданная различными полиномами $p_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) степени n_i на различных участках изменения аргумента $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, может быть представлена в виде

$$p(t) = \frac{1}{2} (p_1(t) + p_n(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(t) |t - t_k|, \quad (1)$$

где $P_k(t)$ являются полиномами степени $N_k = h_k - 1$ ($h_k = \max\{n_k, n_{k+1}\}$) вычисляемыми по формуле

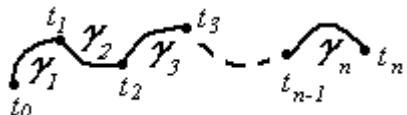
$$P_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{p_{k+1}^{(q)}(t_k) - p_k^{(q)}(t_k)}{q!} (t - t_k)^{q-1}. \quad (2)$$

Аналогичный результат можно получить и для кусочно-полиномиальных кривых. Каждый сегмент такой кривой задается векторной полиномиальной функцией вида $\mathbf{p}_k(t) = \sum_{j=0}^{n_k} \mathbf{a}_{kj} t^j$, где \mathbf{a}_{kj} некоторые векторные коэффициенты. Очевидно, что каждая координата такой вектор-функции $\mathbf{p}_k(t) = x_k(t)\mathbf{i} + y_k(t)\mathbf{j} + z_k(t)\mathbf{k}$ является скалярным полиномом. Например, $x_k(t) = \sum_{j=0}^{n_k} a_{kj}^x t^j$, где a_{kj}^x являются x -координатами векторов \mathbf{a}_{kj} .

Пусть непрерывная кривая γ составлена из последовательности криволинейных отрезков γ_i ($i=1,2,\dots,n$), которые определяются полиномиальными вектор функциями $\mathbf{p}_i(\tau)$ степени n_i и диапазоном изменения параметра $\tau \in [\tau_i^0, \tau_i^1]$:

$$\gamma : \begin{cases} \gamma_1 : \mathbf{p}_1(\tau) \quad \tau_1^0 \leq \tau \leq \tau_1^1 \\ \dots \\ \gamma_n : \mathbf{p}_n(\tau) \quad \tau_n^0 \leq \tau \leq \tau_n^1 \end{cases}, \quad (\mathbf{p}_{i-1}(\tau_{i-1}^1) = \mathbf{p}_i(\tau_i^0)). \quad (3)$$

Требуется записать единое параметрическое уравнение этой кусочно-полиномиальной кривой.



Назначим начальной точке, каждому узлу (стыку) и конечной точке последовательно возрастающие значения параметра $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и перепараметризуем вектор-функции $\mathbf{p}_i(\tau)$ к параметру t так, чтобы он на соответствующем участке изменялся в диапазоне $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Очевидно, что это может быть выполнено следующим образом

$$\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i \left(\tau_i^0 + (\tau_i^1 - \tau_i^0) \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right), \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = (\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t), \tilde{z}_i(t))$. Набор координатных функций $\tilde{x}_i(t)$ (а также $\tilde{y}_i(t)$ и $\tilde{z}_i(t)$) теперь представляет некоторую непрерывную кусочно-полиномиальную функцию $\tilde{x}(t)$. Действительно, сегменты $\tilde{x}_i(t)$ $t \in [t_{i-1}, t_i]$ каждой функции $\tilde{x}(t)$ являются полиномами степени n_i , определены на последовательных участках $[t_{i-1}, t_i]$ изменения аргумента t и выполняется условие непрерывной стыковки соседних сегментов $\tilde{x}_{i-1}(t_{i-1}) = x_{i-1}(\tau_{i-1}^1) = x_i(\tau_i^0) = \tilde{x}_i(t_{i-1})$. Поэтому мы получаем непрерывную кусочно-полиномиальную функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t), & t_0 \leq t < t_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_n(t), & t_{n-1} \leq t \leq t_n \end{cases},$$

для которой справедливо представление (1) – (2). Тогда можно записать

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_n(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} X_k(t) |t - t_k|,$$

где $X_k(t)$ являются полиномами степени $N_k = h_k - 1$ ($h_k = \max\{n_k, n_{k+1}\}$) вычисляемыми по формуле (2). Аналогичное представление имеет место и для координатных функций $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{z}(t)$. Параметр t общий для функций $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$. Поэтому мы можем записать

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_k(t) |t - t_k|,$$

где $\tilde{\mathbf{p}}_i(t)$ определяются в соответствии с (4), а $\mathbf{P}_k(t) = (X_k(t), Y_k(t), Z_k(t))$ являются векторными полиномами степени $N_k = h_k - 1$ ($h_k = \max\{n_k, n_{k+1}\}$). Для функций $X_k(t)$ из (2) имеем

$$X_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{\tilde{x}_{k+1}^{(q)}(t_k) - \tilde{x}_k^{(q)}(t_k)}{q!} (t - t_k)^{q-1}$$

Аналогичное представление также имеет место для функций $Y_k(t), Z_k(t)$, причем h_k является для них одинаковым. Записывая эти равенства в векторном виде, получаем

$$\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{1}{q!} (\tilde{\mathbf{p}}_{k+1}^{(q)}(t_k) - \tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t_k)) (t - t_k)^{q-1}$$

Но из (4) имеем $\tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t) = \mathbf{p}_k^{(q)}(\tau) \cdot \frac{(\tau_k^1 - \tau_k^0)^q}{(t_k - t_{k-1})^q}$ (слева стоит производная по параметру t , а справа - по параметру τ). Тогда

$$\tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t_k) = \mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1) \cdot \frac{(\tau_k^1 - \tau_k^0)^q}{(t_k - t_{k-1})^q} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{k+1}^{(q)}(t_k) = \mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0) \cdot \frac{(\tau_{k+1}^1 - \tau_{k+1}^0)^q}{(t_{k+1} - t_k)^q}.$$

И мы получаем

$$\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{1}{q!} \left(\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0) \cdot \frac{(\tau_{k+1}^1 - \tau_{k+1}^0)^q}{(t_{k+1} - t_k)^q} - \mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1) \cdot \frac{(\tau_k^1 - \tau_k^0)^q}{(t_k - t_{k-1})^q} \right) (t - t_k)^{q-1}$$

Таким образом, мы получили

Теорема 1. (Доля П.Г. []) Векторное (параметрическое) уравнение непрерывной кусочно-полиномиальной кривой (3) может быть записано в виде

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_k(t) |t - t_k|, \quad (5)$$

где $\mathbf{P}_k(t)$ являются векторными полиномами степени $h_k - 1$ вида

$$\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{1}{q!} \left(\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0) \cdot \frac{(\tau_{k+1}^1 - \tau_{k+1}^0)^q}{(t_{k+1} - t_k)^q} - \mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1) \cdot \frac{(\tau_k^1 - \tau_k^0)^q}{(t_k - t_{k-1})^q} \right) (t - t_k)^{q-1}, \quad (6)$$

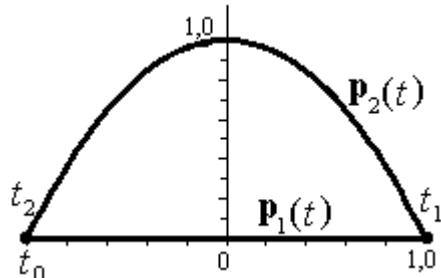
и $\tilde{\mathbf{p}}_1(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}_n(t)$ определяются заменой переменной (4). Здесь $h_k = \max\{n_k, n_{k+1}\}$, и n_k представляет степень полиномиальной вектор-функции $\mathbf{p}_k(\tau)$.

Следствие 1. При назначении параметров t_i мы можем взять произвольное значение t_0 , а остальные значения t_i ($i=1,2,\dots,n$) можем брать так, чтобы выполнялось равенство $t_i - t_{i-1} = \tau_i^1 - \tau_i^0$. Тогда (4) и (6) дают

$$\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i(t + \tau_i^0 - t_{i-1}) \text{ и } \mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{h_k} \frac{1}{q!} (\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0) - \mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1)) (t - t_k)^{q-1}. \quad (7)$$

Замечание. Формулы (5) – (6) в случае, когда параметр t изменяется на всей вещественной оси $-\infty < t < \infty$, дают уравнение бесконечной кривой. Например, при $t < t_0$ все модули в (5) раскрываются и дают $-(t - t_k)$. Для этих t вектор-функция $\mathbf{p}(t)$ превращается в обычный полином (полиномиальную вектор функцию). Кривая γ получается только при изменении параметра на отрезке $t_0 \leq t \leq t_n$.

Пример 1. Написать параметрическое уравнение кривой, составленной из отрезка $[-1,1]$ оси X и отрезка параболы $1 - x^2$, расположенного над этим отрезком.



Назначим узлам $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ кривой значения параметра $\{t_i\}_{i=0}^2 = \{0, 2, 4\}$. В нашем случае $n=2$, $h_1=2$ и

$$\mathbf{p}_1(\tau) = \begin{pmatrix} -1 + \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \tau \in [0, 2]; \quad \mathbf{p}'_1(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}''_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{p}_2(\tau) = \begin{pmatrix} 1-\tau \\ 2\tau - \tau^2 \end{pmatrix}, \tau \in [0, 2]; \quad \mathbf{p}'_2(\tau) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-2\tau \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}''_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (7) имеем $\tilde{\mathbf{p}}_1(t) = \mathbf{p}_1(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}_2(t) = \mathbf{p}_2(t-2)$ и

$$\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_2(t)) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1+t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-(t-2) \\ 2(t-2)-(t-2)^2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -t^2 + 6t - 8 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(t) &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{p}'_2(0) - \mathbf{p}'_1(2)) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}''_2(0) - \mathbf{p}''_1(2))(t-2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)(t-2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Тогда из (5) получаем

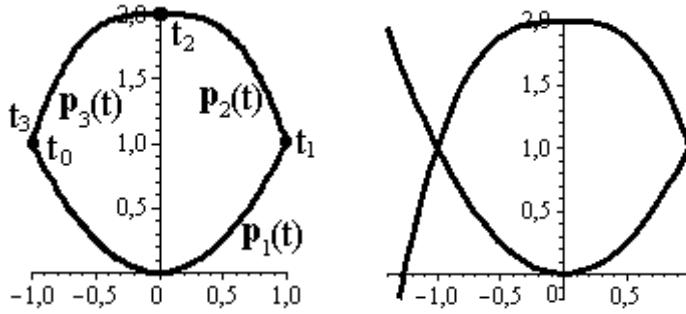
$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) + \mathbf{P}_1(t)|t-t_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -t^2 + 6t - 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4-t \end{pmatrix} |t-2|$$

или

$$x(t) = 1 - |t-2|, \quad y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t - 4 + \frac{4-t}{2}|t-2|.$$

Эти формулы дают параметрическое уравнение замкнутой кривой при $0 \leq t \leq 4$. Если параметр t выходит за эти пределы, то мы получим координаты точек, не принадлежащих нашей замкнутой кривой.

Пример 2. Написать параметрическое уравнение кривой, показанной на следующем рисунке слева. Она образована снизу параболой x^2 ($-1 \leq x \leq 1$), сверху справа кубической кривой $2 - x^3$ ($0 \leq x \leq 1$), сверху слева – кубической кривой $2 + x^3$ ($-1 \leq x \leq 0$).



Параметрические уравнения криволинейных сегментов и их производных имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(\tau) &= \begin{pmatrix} -1+\tau \\ 1-2\tau+\tau^2 \end{pmatrix}, \tau \in [0, 2]; \quad \mathbf{p}'_1(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+2\tau \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}''_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}'''_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{p}_2(\tau) &= \begin{pmatrix} 1-\tau \\ 2-(1-\tau)^3 \end{pmatrix}, \tau \in [0, 1]; \quad \mathbf{p}'_2(\tau) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3(1-\tau)^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}''_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(\tau-1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}'''_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_3(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau \\ 2 - \tau^3 \end{pmatrix}, \tau \in [0,1]; \quad \mathbf{p}'_3(\tau) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3\tau^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}''_3(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6\tau \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}'''_3(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Назначим узлам кривой следующие значения параметра t : $\{t_i\}_{i=0}^3 = \{0, 2, 3, 4\}$. В нашем случае $n=3$, $h_1=3$, $h_2=3$ и $\tilde{\mathbf{p}}_1(t)=\mathbf{p}_1(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}_3(t)=\mathbf{p}_3(t-3)$. Тогда

$$\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_3(t)) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1+t \\ 1-2t+t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(t-3) \\ 2-(t-3)^3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 30-29t+10t^2-t^3 \end{pmatrix}$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(t) &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{p}'_2(0) - \mathbf{p}'_1(2)) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}''_2(0) - \mathbf{p}''_1(2))(t-2) + \frac{1}{6} (\mathbf{p}'''_2(0) - \mathbf{p}'''_1(2))(t-2)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)(t-2) + \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)(t-2)^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ t^2 - 8t + 13 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_2(t) &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{p}'_3(0) - \mathbf{p}'_2(1)) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}''_3(0) - \mathbf{p}''_2(1))(t-3) + \frac{1}{6} (\mathbf{p}'''_3(0) - \mathbf{p}'''_2(1))(t-3)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)(t-3) + \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)(t-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}(t-3)^2 \end{aligned}$$

Тогда

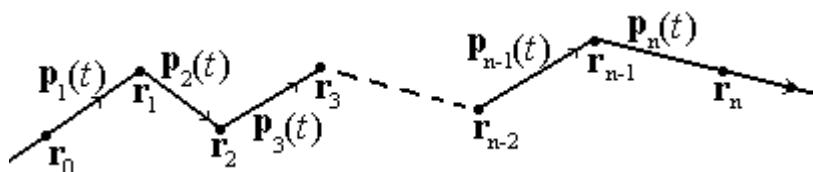
$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_3(t)) + \mathbf{P}_1(t)|t-2| + \mathbf{P}_2(t)|t-3| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 30-29t+10t^2-t^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ t^2 - 8t + 13 \end{pmatrix} |t-2| + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (t-3)^2 |t-3| \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - |t-2| \\ y(t) &= \frac{1}{2} (30-29t+10t^2-t^3 + (t^2-8t+13)|t-2| - 2(t-3)^2|t-3|) \end{aligned}$$

Эти формулы дают параметрическое уравнение замкнутой кривой при $0 \leq t \leq 4$. Если параметр t выходит за эти пределы, то мы получим кривую, показанную на предыдущем рисунке справа.

Пример 3. Вывести формулу для параметрического уравнения ломаной, проходящей через заданные вершины $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{n-1}$, причем направления ее крайних лучей определяется вспомогательными точками \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_n (в которых нет излома).



Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i$, имеет вид $\mathbf{p}_i(\tau) = \mathbf{r}_{i-1} + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})\tau$, $\tau \in [0,1]$ и $\mathbf{p}'_i(\tau) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1})$. Назначим точкам \mathbf{r}_i значения параметра t равные $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Тогда $\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i\left(\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)$ и

$$\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + \mathbf{r}_{n-1} + \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1})\right)$$

Поскольку все $h_i = 1$, то

$$\mathbf{P}_i(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}'_{i+1}(0)\frac{1}{t_{i+1}-t_i} - \mathbf{p}'_i(1)\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{t_{i+1}-t_i} - \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)$$

Тогда в соответствии с (5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) = & \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + \mathbf{r}_{n-1} + \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(t - t_{n-1})\right) + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{t_{i+1}-t_i} - \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)|t-t_i| \end{aligned} \quad (8)$$

□

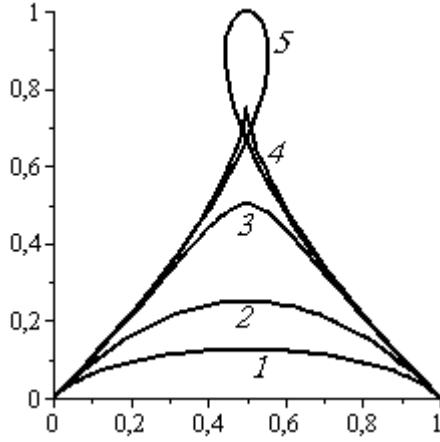
2.3.2 Составной кубический полином Эрмита

Кусочно-кубический полином Эрмита состоит из сегментов кубических кривых. Для его построения задают координаты узлов и касательные вектора в этих узлах. Т.о. для каждого сегмента известны координаты его концов и касательные вектора в них. Этой информации достаточно, чтобы определить уравнение каждого сегмента, а значит, построить и всю кривую.

Прежде чем продолжить, исследуем некоторую особенность кубических параметрических кривых. Она состоит в существенном влиянии на форму кубического сегмента длины касательных векторов в узлах, а не только направления этих векторов. Рассмотрим эту особенность на примере.

Пример 1. Построим параметрическое уравнение кубической кривой, проходящей через точки $(0,0)$ и $(1, 0)$ с заданными на концах касательными векторами $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1$. Назначим значения параметра t в узлах 0 и 1.

Кубическая полиномиальная функция, проходящая через две точки с заданными производными на концах, определяется по формуле (1.3.2.13). В нашем случае для функции $X(t)$ с узлами $(0,0)$, $(1,1)$ эта формула принимает вид $X(t) = (t^2 - t)((X'(0) + X'(1))t - X'(0)) + 3t^2 - 2t^3$. Для функции $Y(t)$ с узлами $(0,0)$, $(1,0)$ мы получаем $Y(t) = (t^2 - t)((Y'(0) + Y'(1))t - Y'(0))$. На следующем рисунке построены графики кривых, заданных параметрическим уравнением $(X(t), Y(t))$, при одинаковом направлении, но различной длине касательных векторов $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1$.



Для кривых: 1 - $\mathbf{V}_0 = (1/2, 1/2)$, $\mathbf{V}_1 = (1/2, -1/2)$; 2 - $\mathbf{V}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{V}_1 = (1, -1)$; 3 - $\mathbf{V}_0 = (2, 2)$, $\mathbf{V}_1 = (2, -2)$; 4 - $\mathbf{V}_0 = (3, 3)$, $\mathbf{V}_1 = (3, -3)$; 5 - $\mathbf{V}_0 = (4, 4)$, $\mathbf{V}_1 = (4, -4)$

Например, в случае 1 уравнение имеет вид $x = t$, $y = t - t^2$, а в случае 4 параметрическое уравнение кривой имеет вид $X(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3$, $Y(t) = 3t - 3t^2$. Все кривые имеют одинаковое направление касательных векторов в точках $(0,0)$ и $(1,0)$. Но, как видим, при достаточно большой их длине у кривой появляются петли.

Пусть задан набор узлов $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$, через которые должен проходить кусочно-кубический полином и набор $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, представляющий значения касательных векторов в этих узлах. Пара точек $\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i$ и пара $\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i$ касательных векторов однозначно определяют кубический полином $\mathbf{p}_i(t)$, если задать интервал изменения параметра t . Рассмотрим случай, когда узлам \mathbf{r}_i назначены натуральные значения параметра $t = 0, 1, 2, \dots, n$. В этом случае кубический полином $\mathbf{p}_i(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(t) = & \mathbf{r}_{i-1}(2t - 2i + 3)(t - i)^2 + \mathbf{v}_{i-1}(t - i + 1)(t - i)^2 + \\ & + \mathbf{v}_i(t - i)(t - i + 1)^2 + \mathbf{r}_i(2i - 2t + 1)(t - i + 1)^2. \end{aligned}$$

Действительно, легко проверить, что $\mathbf{p}_i(i-1) = \mathbf{r}_{i-1}$ и $\mathbf{p}_i(i) = \mathbf{r}_i$. Дифференцирование по t также дает $\mathbf{p}'_i(i-1) = \mathbf{v}_{i-1}$ и $\mathbf{p}'_i(i) = \mathbf{v}_i$.

Рассмотрю случай, когда левый и правый касательные вектора не равны. Т.е. пусть для каждого сегмента $\mathbf{p}_i(t)$ заданы его касательный вектор \mathbf{v}_i^l на левом конце и касательный вектор \mathbf{v}_i^r на правом конце. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(t) = & \mathbf{r}_{i-1}(2t - 2i + 3)(t - i)^2 + \mathbf{v}_i^l(t - i + 1)(t - i)^2 + \\ & + \mathbf{v}_i^r(t - i)(t - i + 1)^2 + \mathbf{r}_i(2i - 2t + 1)(t - i + 1)^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_i(t) = & \mathbf{r}_{i-1}2(t - i)^2 + \mathbf{r}_{i-1}(2t - 2i + 3)2(t - i) + \mathbf{v}_i^l(t - i)^2 + \mathbf{v}_i^l(t - i + 1)2(t - i) + \\ & + \mathbf{v}_i^r(t - i + 1)^2 + \mathbf{v}_i^r(t - i)2(t - i + 1) - 2\mathbf{r}_i(t - i + 1)^2 + \mathbf{r}_i(2i - 2t + 1)2(t - i + 1) \end{aligned}$$

Отсюда, в частности имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_i(i-1) &= 2\mathbf{r}_{i-1} - 2\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{v}_i^l + \mathbf{v}_i^l \cdot 0 + \mathbf{v}_i^r \cdot 0 + \mathbf{v}_i^r \cdot 0 - 2\mathbf{r}_i \cdot 0 + \mathbf{r}_i \cdot 0 = \mathbf{v}_i^l \\ \mathbf{p}'_i(i) &= \mathbf{r}_{i-1} \cdot 0 + \mathbf{r}_{i-1} \cdot 0 + \mathbf{v}_i^l \cdot 0 + \mathbf{v}_i^l \cdot 0 + \mathbf{v}_i^r + \mathbf{v}_i^r \cdot 0 - 2\mathbf{r}_i \cdot 0 + \mathbf{r}_i \cdot 0 = \mathbf{v}_i^r\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{p}''_i(t) &= \mathbf{r}_{i-1} 4(t-i) + \mathbf{r}_{i-1} 4(t-i) + 2\mathbf{r}_{i-1}(2t-2i+3) + 2\mathbf{v}_i^l(t-i) + \mathbf{v}_i^l 2(t-i) + 2\mathbf{v}_i^l(t-i+1) + \\ &+ \mathbf{v}_i^r 2(t-i+1) + 2\mathbf{v}_i^r(t-i+1) + 2\mathbf{v}_i^r(t-i) - 4\mathbf{r}_i(t-i+1) - 4\mathbf{r}_i(t-i+1) + 2\mathbf{r}_i(2i-2t+1)\end{aligned}$$

В частности имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{p}''_i(i-1) &= -4\mathbf{r}_{i-1} - 4\mathbf{r}_{i-1} + 2\mathbf{r}_{i-1} - 2\mathbf{v}_i^l - 2\mathbf{v}_i^l + 2\mathbf{v}_i^l \cdot 0 + \\ &+ \mathbf{v}_i^r \cdot 0 + 2\mathbf{v}_i^r \cdot 0 - 2\mathbf{v}_i^r - 4\mathbf{r}_i \cdot 0 - 4\mathbf{r}_i \cdot 0 + 6\mathbf{r}_i = -6\mathbf{r}_{i-1} - 4\mathbf{v}_i^l - 2\mathbf{v}_i^r + 6\mathbf{r}_i \\ \mathbf{p}''_i(i) &= \mathbf{r}_{i-1} \cdot 0 + \mathbf{r}_{i-1} \cdot 0 + 6\mathbf{r}_{i-1} + 2\mathbf{v}_i^l \cdot 0 + \mathbf{v}_i^l \cdot 0 + 2\mathbf{v}_i^l + \\ &+ 2\mathbf{v}_i^r + 2\mathbf{v}_i^r + 2\mathbf{v}_i^r \cdot 0 - 4\mathbf{r}_i - 4\mathbf{r}_i + 2\mathbf{r}_i = 6\mathbf{r}_{i-1} + 2\mathbf{v}_i^l + 4\mathbf{v}_i^r - 6\mathbf{r}_i\end{aligned}$$

Аналогично для третьих производных имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'''_i(t) &= 4\mathbf{r}_{i-1} + 4\mathbf{r}_{i-1} + 4\mathbf{r}_{i-1} + 2\mathbf{v}_i^l + 2\mathbf{v}_i^l + 2\mathbf{v}_i^l + 2\mathbf{v}_i^r + 2\mathbf{v}_i^r + 2\mathbf{v}_i^r - 4\mathbf{r}_i - 4\mathbf{r}_i - 4\mathbf{r}_i = \\ &= 12\mathbf{r}_{i-1} + 6\mathbf{v}_i^l + 6\mathbf{v}_i^r - 12\mathbf{r}_i = 6(2\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{v}_i^l + \mathbf{v}_i^r - 2\mathbf{r}_i)\end{aligned}$$

Тогда для составного кубического полинома Эрмита получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k(t) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^3 \frac{1}{q!} (\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(k) - \mathbf{p}_k^{(q)}(k)) (t-k)^{q-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{p}_{k+1}'(k) - \mathbf{p}_k'(k)) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{k+1}''(k) - \mathbf{p}_k''(k)) (t-k) + \frac{1}{6} (\mathbf{p}_{k+1}'''(k) - \mathbf{p}_k'''(k)) (t-k)^2 \right) =\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{k+1}'(k) - \mathbf{p}_k'(k) &= \mathbf{v}_{k+1}^l - \mathbf{v}_k^r \\ \mathbf{p}_{k+1}''(k) - \mathbf{p}_k''(k) &= -6\mathbf{r}_k - 4\mathbf{v}_{k+1}^l - 2\mathbf{v}_{k+1}^r + 6\mathbf{r}_{k+1} - (6\mathbf{r}_{k-1} + 2\mathbf{v}_k^l + 4\mathbf{v}_k^r - 6\mathbf{r}_k) = \\ &= 6\mathbf{r}_{k+1} - 4\mathbf{v}_{k+1}^l - 2\mathbf{v}_{k+1}^r - 2\mathbf{v}_k^l - 4\mathbf{v}_k^r - 6\mathbf{r}_{k-1} \\ \mathbf{p}_{k+1}'''(k) - \mathbf{p}_k'''(k) &= 6(4\mathbf{r}_k - 2\mathbf{r}_{k+1} - 2\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{v}_{k+1}^l + \mathbf{v}_{k+1}^r - \mathbf{v}_k^l - \mathbf{v}_k^r)\end{aligned}$$

В частности если $\mathbf{v}_{k+1}^l = \mathbf{v}_k^r = \mathbf{v}_k$, то $\mathbf{p}_{k+1}'(k) - \mathbf{p}_k'(k) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{k+1}''(k) - \mathbf{p}_k''(k) &= 6\mathbf{r}_{k+1} - 8\mathbf{v}_k - 2\mathbf{v}_{k+1} - 2\mathbf{v}_{k-1} - 6\mathbf{r}_{k-1} \\ \mathbf{p}_{k+1}'''(k) - \mathbf{p}_k'''(k) &= 6(4\mathbf{r}_k - 2\mathbf{r}_{k+1} - 2\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_{k-1})\end{aligned}$$

И тогда

$$\mathbf{P}_k(t) = (t-k)(3\mathbf{r}_{k+1} - 4\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_{k-1} - 3\mathbf{r}_{k-1} + 3(4\mathbf{r}_k - 2\mathbf{r}_{k+1} - 2\mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_{k-1})(t-k))$$

Также

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_0(2t+1)(t-1)^2 + \mathbf{v}_0 t(t-1)^2 + \mathbf{v}_1 t^2(t-1) + \mathbf{r}_1(3-2t)t^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}_{n-1}(2t-2n+3)(t-n)^2 + \mathbf{v}_{i-1}(t-n+1)(t-n)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{v}_n(t-n)(t-n+1)^2 + \mathbf{r}_n(2n+1-2t)(t-n+1)^2 \right)\end{aligned}$$

Подставляя это в общее выражение для кусочного полинома $\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_k(t) |t - t_k|$, получим выражение кусочного полинома Эрмита через радиус-вектора \mathbf{r}_k его узлов и касательных векторов \mathbf{v}_k .

2.3.3 Кусочно-полиномиальные кривые Бернштейна – Безье

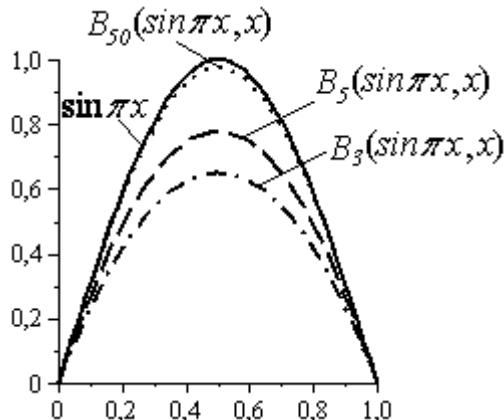
Пьер Безье в работах 1968-1972 годов для решения задач аппроксимации кривых предложил способ, опирающийся на использование функций специальной структуры. Основу своего метода он вывел из геометрических соображений. Но для построения своих кривых Безье в качестве базисных функций использовал многочлены С.Н. Бернштейна.

Пусть f – действительная функция, определенная на отрезке $[0,1]$. Полиномом Бернштейна степени N , связанным с функцией f , называют

$$B_N(f, t) = \sum_{i=0}^N f\left(\frac{i}{N}\right) \Phi_{N,i}(t) \quad (1)$$

$$\text{где } \Phi_{N,i}(t) = C_N^i t^i (1-t)^{N-i} \quad \text{и} \quad C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}. \quad (2)$$

На следующем рисунке показан график функции $\sin \pi x$ на отрезке $[0,1]$ и графики полиномов Бернштейна 3 – й, 5 – й и 50 – й степени. Можно показать, что при увеличении степени N полиномы Бернштейна приближаются к связанной с ними функции $f(x)$.



Функции $\Phi_{N,i}(t)$ на отрезке $[0,1]$ положительны, т.е. $\Phi_{N,i}(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$. Их называют базисом Бернштейна, поскольку они могут служить базисными полиномами для пространства полиномов степени не превосходящей N . Действительно

$$1 = ((1-t) + t)^N = \sum_{i=0}^N C_N^i (1-t)^{N-i} t^i = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t)$$

Аналогично, для $1 \leq k \leq N$ имеем

$$t^k = t^k \cdot (1-t) + t^k = t^k \cdot \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(N-k)!}{j!(N-k-j)!} (1-t)^{N-k-j} t^j =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-k} \frac{N!}{(j+k)!(N-(j+k))!} \frac{(j+1)\cdots(j+k)}{N\cdots(N-(k-1))} (1-t)^{N-(j+k)} t^{j+k} = \\
&= \sum_{i=k}^N \frac{i\cdot(i-1)\cdots(i-(k-1))}{N\cdot(N-1)\cdots(N-(k-1))} \frac{N!}{i!(N-i)!} (1-t)^{N-i} t^i.
\end{aligned}$$

Поскольку множители $\frac{i\cdot(i-1)\cdots(i-(k-1))}{N\cdot(N-1)\cdots(N-(k-1))}$ при $i=0,1,\dots,k-1$ обращаются в ноль, то в последнем выражении суммирование можно начать от нуля. Поэтому получаем

$$t^k = \sum_{i=0}^N \frac{i\cdot(i-1)\cdots(i-(k-1))}{N\cdot(N-1)\cdots(N-(k-1))} \Phi_{N,i}(t) \quad (3)$$

или (суммирование снова от k)

$$t^k = \sum_{i=k}^N \frac{i!(N-k)!}{(i-k)!N!} \Phi_{N,i}(t) = \sum_{i=k}^N \frac{i!(N-k)!k!}{(i-k)!k!N!} \Phi_{N,i}(t) = \sum_{i=k}^N \frac{C_i^k}{C_N^k} \Phi_{N,i}(t)$$

Например, при $k=1$ получаем $t = \sum_{i=0}^N \frac{i}{N} \Phi_{N,i}(t)$.

Заменяя в разложении произвольного полинома $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N$ компоненты t^k их представлениями (3), получим разложение полинома по функциям Бернштейна.

Рассмотрим, как Безье использовал базисные полиномы Бернштейна. Пусть даны радиус-векторы $N+1$ точки $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Кривая Безье строится по следующей формуле:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(t) \cdot \mathbf{r}_i \quad (4)$$

Легко проверить, что $\Phi_{N,i}(0) = C_N^i t^i (1-t)^{N-i} \Big|_{t=0} = 0$ для $i \geq 1$. Аналогично $\Phi_{N,i}(1) = C_N^i t^i (1-t)^{N-i} \Big|_{t=1} = 0$ для $i \leq N-1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(0) &= \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(0) \cdot \mathbf{r}_i = \Phi_{N,0}(0) \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 \\
\mathbf{p}(1) &= \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}(1) \cdot \mathbf{r}_i = \Phi_{N,N}(1) \cdot \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N
\end{aligned}$$

Т.о кривая (4) проходит через крайние точки \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_N .

Вычислим производные $\mathbf{p}^{(q)}(t)$ в конечных точках сегмента (при $t=0$ и $t=1$). Имеем $\mathbf{p}^{(q)}(t) = \sum_{i=0}^N \Phi_{N,i}^{(q)}(t) \cdot \mathbf{r}_i$. Очевидно, что при $q > N$ $\Phi_{N,i}^{(q)}(t) \equiv 0$. Для $q \leq N$ имеем

$$\Phi_{N,i}^{(q)}(t) = \left(C_N^i (1-t)^{N-i} t^i \right)^{(q)} = C_N^i \sum_{j=0}^q C_q^j \left((1-t)^{N-i} \right)^{(q-j)} \left(t^i \right)^{(j)} \quad (5)$$

При $q < i$ и $t = 0$ все слагаемые в сумме (5) равны нулю. Поэтому $\Phi_{N,i}^{(q)}(0) = 0$ при $q < i$. Также ясно, что при $t = 0$ и $q \geq i$ ненулевым слагаемым в последней сумме будет только слагаемое с $j = i$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_{N,i}^{(q)}(0) &= C_N^i C_q^i \left((1-t)^{N-i} \right)^{(q-i)} \left(t^i \right)^{(i)} \Big|_{t=0} = \\ &= C_q^i \frac{N!}{i!(N-i)!} \cdot i! \frac{(N-i)!}{(N-i-(q-i))!} (-1)^{q-i} = \frac{N!}{(N-q)!} (-1)^{q-i} C_q^i\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{p}^{(q)}(0) = \sum_{i=0}^q \Phi_{N,i}^{(q)}(0) \cdot \mathbf{r}_i = \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} C_q^i \mathbf{r}_i \quad (6)$$

Если $N-i > q$ и $t=1$, то все слагаемые в сумме (5) равны нулю. Поэтому $\Phi_{N,i}^{(q)}(1) = 0$ при $i < N-q$. Также ясно, что при $t=1$ и $i \geq N-q$ ненулевым слагаемым в сумме (5) будет только слагаемое с $N-i = q-j$, т.е. $j = q+i-N$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_{N,i}^{(q)}(1) &= C_N^i C_q^{q+i-N} \left((1-t)^{N-i} \right)^{(N-i)} \left(t^i \right)^{(q+i-N)} \Big|_{t=1} = \\ &= \frac{N!}{(N-i)! i!} C_q^{q+i-N} (N-i)! (-1)^{N-i} \frac{i!}{(i-(q+i-N))!} = \frac{N!}{(N-q)!} (-1)^{N-i} C_q^{q+i-N}\end{aligned}$$

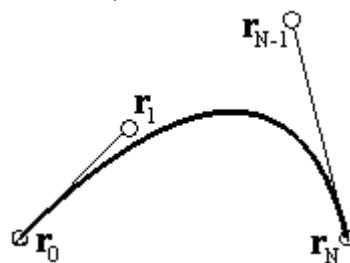
Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(q)}(1) &= \sum_{i=N-q}^N \Phi_{N,i}^{(q)}(1) \cdot \mathbf{r}_i = \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{i=N-q}^N (-1)^{N-i} C_q^{q+i-N} \mathbf{r}_i = |N-i=j|= \\ &= \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{j=q}^0 (-1)^j C_q^{q-j} \mathbf{r}_{N-j} = \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{i=0}^q (-1)^i C_q^i \mathbf{r}_{N-i}\end{aligned} \quad (7)$$

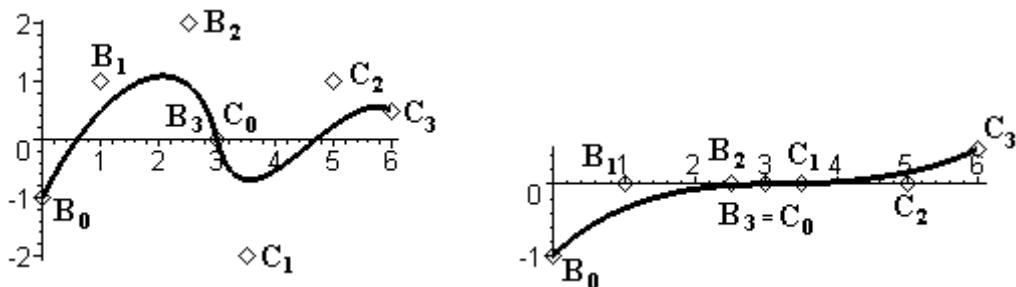
В частности при $q=1$ имеем

$$\mathbf{p}'(0) = \frac{N!}{(N-1)!} \sum_{i=0}^1 (-1)^{1-i} C_1^i \mathbf{r}_i = N \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{и} \quad \mathbf{p}'(1) = N(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1})$$

Т.о. вектора касательных в концах кривой по направлению совпадают с векторами $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1}$ первой и последней стороны многоугольника. Более подробное исследование показывает, что основная форма кривой в некотором смысле повторяет очертания многоугольника с вершинами в точках $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. На следующем рисунке приведен пример плоской кривой Безье построенной по 4-м точкам ($N=3$).



В приложениях, как правило, используются непрерывные кривые, составленные из некоторого набора криволинейных отрезков Безье. Задаваясь некоторым множеством точек, мы можем разбить его на группы, каждая из которых будет определять отдельный многоугольник и кривую (сегмент) Безье. На следующем рисунке слева приведен пример кривой, состоящей из двух сегментов Безье. В этом случае задача формулируется так. Пусть требуется через точки $B_0, B_3=C_0, C_3$ провести гладкую кривую. Добавим точки B_1, B_2 и C_1, C_2 . По точкам B_0, B_1, B_2, B_3 с помощью формулы (4) построим одну кривую Безье, а по точкам C_0, C_1, C_2, C_3 – другую.



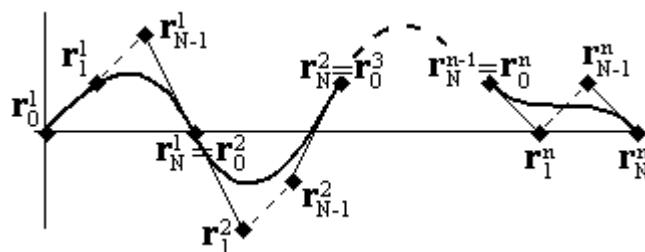
Если точки B_2 и C_1 выбрать так, что тройка точек $B_2, B_3=C_0, C_1$ лежит на одной прямой, то составная кривая в точке стыковки функций Безье будет иметь непрерывную производную. Управляя положением добавленных точек B_1, B_2 и C_1, C_2 мы можем подобрать желаемую форму кривой, проходящей через три заданные точки $B_0, B_3=C_0, C_3$. На рисунке вверху справа показана составная кривая Безье, проходящая через те же точки $B_0, B_3=C_0, C_3$, но использующая другие управляющие точки B_1, B_2 и C_1, C_2 .

Если в точке стыковки требуется более высокий порядок гладкости кривой, то надо добавить больше вспомогательных точек, а степень базисных полиномов Бернштейна увеличить.

Получим уравнение для составной кривой Безье. Уравнение k -го сегмента Безье ($k=1, 2, \dots, n$), задаваемого радиус-векторами $\mathbf{r}_0^k, \mathbf{r}_1^k, \dots, \mathbf{r}_N^k$ ($N \geq 1$) k -го многоугольника Безье, имеет вид

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i^k \Phi_{N,i}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Предполагается непрерывность составной кривой, т.е. $\mathbf{r}_N^k = \mathbf{r}_0^{k+1}$ ($k=1, \dots, n-1$)



В соответствии с (6) и (7) производные $\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau)$ в конечных точках сегмента (при $\tau=0$ и $\tau=1$) будут равны

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_k^{(q)}(0) &= \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} C_q^i \mathbf{r}_i^k \\ \mathbf{p}_k^{(q)}(1) &= \frac{N!}{(N-q)!} \sum_{i=0}^q (-1)^i C_q^i \mathbf{r}_{N-i}^k\end{aligned}\quad (8)$$

Назначим узлам $\mathbf{r}_0^1, \mathbf{r}_N^k = \mathbf{r}_0^{k+1}$ ($k=1, \dots, n-1$), \mathbf{r}_N^n , через которые проходит составная кривая Безье, последовательно значения параметра $t=0, 1, 2, \dots, n$. Поскольку составная кривая Безье является кусочным полиномом, то для нее будет выполняться теорема 1 п.2.3.1 и следствие 1. Тогда в соответствии с (7) п. 2.3.1 получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k(t) &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \frac{N!}{(N-q)! q!} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} C_q^i \mathbf{r}_i^{k+1} - \sum_{i=0}^q (-1)^i C_q^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) (t-k)^{q-1} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N C_N^q \sum_{i=0}^q C_q^i \left((-1)^{q-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) (t-k)^{q-1}\end{aligned}\quad (9)$$

Также имеем $\tilde{\mathbf{p}}_1(t) = \mathbf{p}_1(t)$ и $\tilde{\mathbf{p}}_n(t) = \mathbf{p}_n(t-(n-1))$. Поэтому формула (5) п.2.3.1 дает

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}}_1(t) + \tilde{\mathbf{p}}_n(t)) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_k(t) |t-k| = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i^1 \Phi_{N,i}(t) + \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i^n \Phi_{N,i}(t+1-n) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{q=1}^N C_N^q \sum_{i=0}^q C_q^i \left((-1)^{q-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) (t-k)^{q-1} \right) |t-k|\end{aligned}\quad (10)$$

Это есть общее уравнение непрерывной составной кривой Безье. Отметим некоторые особенности этой формулы.

Когда во внутренней сумме (10) индекс q – четный, то при $i=0$ имеем $(-1)^{q-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k = \mathbf{r}_0^{k+1} - \mathbf{r}_N^k = 0$ в силу непрерывной стыковки соседних сегментов и соответствующие слагаемые в (10) уходят.

Кроме того, в (10) слагаемое при $q=1$ имеет вид

$$C_N^1 \sum_{i=0}^1 C_1^i \left((-1)^{1-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) = N \cdot \left((\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1}) - (\mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k) \right)$$

Оно уходит, если $\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} = \mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k$ и множитель $t-k$ может быть вынесен за скобки. Т.е. сумма в (10) примет вид $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{q=2}^N \mathbf{Q}_k^{q-2}(t) \right) (t-k) |t-k|$, где

$\mathbf{Q}_k^{q-2}(t)$ некоторые векторные полиномы степени не выше чем $q-2$. Это означает, что составная кривая Безье гладкая (имеет непрерывную касательную в узлах стыка сегментов). Это также можно понять из условий (8). Действительно, для касательной в конце k -го сегмента имеем

$\mathbf{p}_k^{(1)}(1) = N(\mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k)$, а для касательной в начале следующего сегмента имеем $\mathbf{p}_{k+1}^{(1)}(0) = N(-\mathbf{r}_0^{k+1} + \mathbf{r}_1^{k+1})$. При выполнении условия $\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} = \mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k$ левый и правый касательные вектора в точке $t = k$ будут равны $\mathbf{p}_k^{(1)}(1) = \mathbf{p}_{k+1}^{(1)}(0)$. А это означает просто, что касательный вектор в этой точке существует.

Пример 1. Очевидно, что многоугольником Безье для полинома 1 – го порядка является отрезок соединяющий точки \mathbf{r}_0^k и \mathbf{r}_1^k (в этом случае многоугольник и кривая Безье совпадают). Тогда уравнение составной кривой Безье 1 – го порядка (ломаной, узлам которой назначены значения параметра $t = 0, 1, \dots, n$) можно построить по общей формуле . Из (9) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 C_1^i \left((-1)^{1-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{1-i}^k \right) = \frac{1}{2} \left((-\mathbf{r}_0^{k+1} - \mathbf{r}_1^k) + (\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_0^k) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1}) - (\mathbf{r}_1^k - \mathbf{r}_0^k) \right)\end{aligned}$$

Назначим узлам ломаной единую нумерацию обозначив $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^1$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_1^k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Поскольку предполагается непрерывность составной кривой,

то выполняется условие $\mathbf{r}_1^k = \mathbf{r}_0^{k+1}$. Тогда $\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{k+1} - 2\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k-1})$. Кроме того,

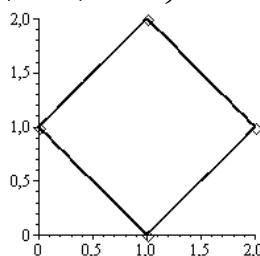
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^1 C_1^i t^i (1-t)^{1-i} \mathbf{r}_i^1 + \sum_{i=0}^1 C_1^i (t+1-n)^i (n-t)^{1-i} \mathbf{r}_i^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} ((1-t)\mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{r}_1 + (n-t)\mathbf{r}_{n-1} + (t+1-n) \cdot \mathbf{r}_n)\end{aligned}$$

Поэтому уравнение ломаной принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \frac{1}{2} ((1-t)\mathbf{r}_0 + t \mathbf{r}_1 + (n-t)\mathbf{r}_{n-1} + (t+1-n) \cdot \mathbf{r}_n) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbf{r}_{k+1} - 2\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k-1}) |t - k| \quad (11)\end{aligned}$$

Пусть, например, требуется построить составную ломаную Безье, проходящую через точки $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставляя это в

(11), получаем $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} t-1-|t-1|+|t-3| \\ 2-|t-2| \end{pmatrix}$.



□

Выведем уравнение составного кубического полинома Безье ($N=3$). Для каждого сегмента надо задать 4 точки $\mathbf{r}_0^k, \mathbf{r}_1^k, \mathbf{r}_2^k, \mathbf{r}_3^k$, причем последняя точка k – го сегмента будет совпадать с начальной точкой $k+1$ – го сегмента, т.е. $\mathbf{r}_3^k = \mathbf{r}_0^{k+1}$ ($k = 1, \dots, n-1$). В соответствии с (9), (10) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^3 C_3^i t^i (1-t)^{3-i} \mathbf{r}_i^1 + \sum_{i=0}^3 C_3^i (t+1-n)^i (n-t)^{3-i} \mathbf{r}_i^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left((1-t)^3 \mathbf{r}_0^1 + 3t (1-t)^2 \mathbf{r}_1^1 + 3t^2 (1-t) \mathbf{r}_2^1 + t^3 \mathbf{r}_3^1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{r}_0^n (n-t)^3 + 3(n-t)^2 (t+1-n) \mathbf{r}_1^n + 3(n-t) (t+1-n)^2 \mathbf{r}_2^n + (t+1-n)^3 \mathbf{r}_3^n \right) \right)\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}2 \cdot \mathbf{P}_k(t) &= \sum_{q=1}^3 C_3^q \sum_{i=0}^q C_q^i \left((-1)^{q-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{3-i}^k \right) (t-k)^{q-1} = \\ &= C_3^1 \sum_{i=0}^1 C_1^i \left((-1)^{1-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{3-i}^k \right) + C_3^2 \sum_{i=0}^2 C_2^i \left((-1)^{2-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{3-i}^k \right) (t-k) + \\ &\quad + C_3^3 \sum_{i=0}^3 C_3^i \left((-1)^{3-i} \mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{3-i}^k \right) (t-k)^2 = 3 \left(\left(-\mathbf{r}_0^{k+1} - \mathbf{r}_3^k \right) + \left(\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_2^k \right) \right) + \\ &\quad + 3 \left(\left(\mathbf{r}_0^{k+1} - \mathbf{r}_3^k \right) + 2 \left(-\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_2^k \right) + \left(\mathbf{r}_2^{k+1} - \mathbf{r}_1^k \right) \right) (t-k) + \\ &\quad + \left(\left(-\mathbf{r}_0^{k+1} - \mathbf{r}_3^k \right) + 3 \left(\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_2^k \right) + 3 \left(-\mathbf{r}_2^{k+1} - \mathbf{r}_1^k \right) + \left(\mathbf{r}_3^{k+1} + \mathbf{r}_0^k \right) \right) (t-k)^2 = \\ &= 3 \left(\left(\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - \mathbf{r}_2^k \right) \right) + 3 \left(\left(\mathbf{r}_2^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - 2\mathbf{r}_2^k + \mathbf{r}_1^k \right) \right) (t-k) + \\ &\quad + \left(\left(\mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 3\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - 3\mathbf{r}_2^k + 3\mathbf{r}_1^k - \mathbf{r}_0^k \right) \right) (t-k)^2.\end{aligned}$$

В силу непрерывности $\mathbf{r}_0^{k+1} = \mathbf{r}_3^k$ мы имеем

$$\left(\mathbf{r}_2^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - 2\mathbf{r}_2^k + \mathbf{r}_1^k \right) = \mathbf{r}_2^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + 2\mathbf{r}_2^k - \mathbf{r}_1^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 3 \left(\left(\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - \mathbf{r}_2^k \right) \right) + 3 \left(\mathbf{r}_2^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + 2\mathbf{r}_2^k - \mathbf{r}_1^k \right) (t-k) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 3\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - 3\mathbf{r}_2^k + 3\mathbf{r}_1^k - \mathbf{r}_0^k \right) \right) (t-k)^2 \right\} |t-k|\end{aligned}$$

Если касательные в узлах стыка сегментов совпадают, т.е. $\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} = \mathbf{r}_3^k - \mathbf{r}_2^k$, то первое слагаемое в последней сумме уходит. В этом случае также имеем

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 3\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - 3\mathbf{r}_2^k + 3\mathbf{r}_1^k - \mathbf{r}_0^k \right) = \\ &= \mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 2\mathbf{r}_1^{k+1} + \left(\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} \right) - \left(\mathbf{r}_3^k - \mathbf{r}_2^k \right) + \left(2\mathbf{r}_2^k - 3\mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_0^k \right) = \\ &= \mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 2\mathbf{r}_1^{k+1} + 2\mathbf{r}_2^k - 3\mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_0^k.\end{aligned}$$

Поэтому в случае гладкой стыковки кубических сегментов Безье мы получаем

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 3 \left(\mathbf{r}_2^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + 2\mathbf{r}_2^k - \mathbf{r}_1^k \right) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{r}_3^{k+1} - 3\mathbf{r}_2^{k+1} + 2\mathbf{r}_1^{k+1} + 2\mathbf{r}_2^k - 3\mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_0^k \right) (t-k) \right\} (t-k)|t-k|$$

На следующем рисунке приведены три гладкие составные кубические кривые Безье, проходящие через одни и те же точки, но с разными многоугольниками Безье для соответствующих сегментов.

Для левой кривой узлы многоугольников Безье были следующими:

$$\{\mathbf{r}_i^1\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^2\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \{\mathbf{r}_i^3\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^4\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Уравнение кривой имеет вид

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 6t^2 + 15t - 13 - (t-1)^2|t-1| + 3(t-2)|t-2| + (t-3)^2|t-3| \\ 6t^2 - 24t + 32 - 3(t-1)|t-1| - (t-2)^2|t-2| + 3(t-3)|t-3| \end{pmatrix}$$

Для средней кривой вершины многоугольников Безье были следующими:

$$\{\mathbf{r}_i^1\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^2\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \{\mathbf{r}_i^3\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^4\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ее уравнение имеет вид

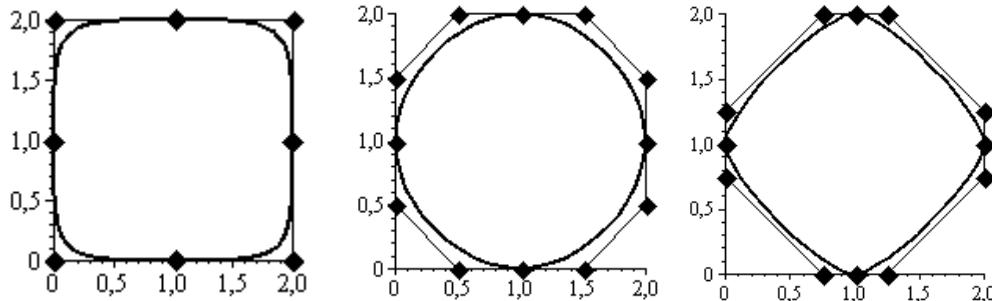
$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t^3 + 6t^2 - 21t + 28 + (t-1)^2|t-1| - (t-3)^2|t-3| \\ -3t^2 + 12t - 8 + (t-2)^2|t-2| \end{pmatrix}$$

Для правой кривой вершины многоугольников Безье были следующими:

$$\{\mathbf{r}_i^1\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^2\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \{\mathbf{r}_i^3\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{r}_i^4\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение кривой имеет вид

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5t^3 + 30t^2 - 93t + 110 + 5(t-1)^2|t-1| - 6(t-2)|t-2| - 5(t-3)^2|t-3| \\ -21t^2 + 84t - 88 + 6(t-1)|t-1| + 5(t-2)^2|t-2| - 6(t-3)|t-3| \end{pmatrix}$$



Здесь на рисунке показаны также многоугольники Безье и их узлы.

Заметим, что если параметр t в уравнениях этих кривых будет выходить за пределы интервала $[0,4]$, то мы увидим продолжение первого и последнего векторных полиномов составной кривой, которые конечно не ложатся на показанные замкнутые кривые. \square

Пример 2. Построим кривую, составленную из двух сегментов Безье со следующими многоугольниками

$$\begin{aligned}\{\mathbf{r}_i^1\}_{i=0}^5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \{\mathbf{r}_i^2\}_{i=0}^5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Все точки первого многоугольника Безье лежат на одной прямой, поэтому соответствующий ему криволинейный сегмент Безье вырождается в отрезок прямой. Уравнение составной кривой Безье, построенное по формуле (**), принимает вид

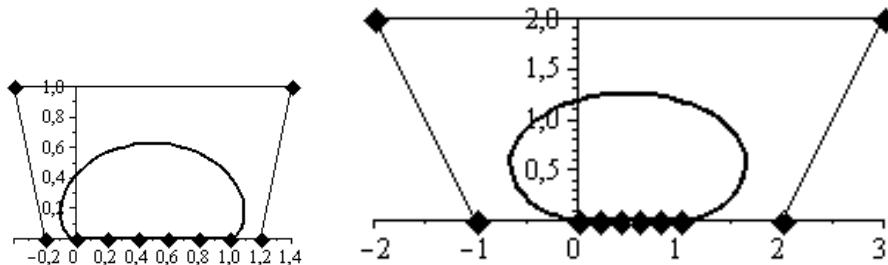
$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} -6t^5 + 45t^4 - 130t^3 + 180t^2 - 119t + 31 - (t-1)^2(6t^2 - 27t + 31)|t-1| \\ 5t^4 - 30t^3 + 65t^2 - 60t + 20 + 5(t-1)(t-2)^2|t-1| \end{cases}$$

Если немного изменим 2-й многоугольник Безье

$$\{\mathbf{r}_i^2\}_{i=0}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то его уравнение примет вид

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} -18t^5 + 135t^4 - 390t^3 + 540t^2 - 357t + 91 - (18t^4 - 117t^3 + 273t^2 - 267t + 91)|t-1| \\ 10t^4 - 60t^3 + 130t^2 - 120t + 40 + 10(t-1)(t-2)^2|t-1| \end{cases}$$



Заметим, что длины касательных векторов слева и справа в точке $t=1$ в последнем случае разные. Поэтому выражение $p_x(t)$ в этой точке оказалось не дифференцируемым. Хотя, как видно из рисунка наклон касательной в этой точке меняется плавно переходя от 0 к положительному значению. Это

значит, что при другой параметризации кривой можно получить дифференцируемым и первую координатную функцию !!!!!!!!!!!!!!!

2.3.4 Сплайны

В главе 1 мы привели примеры построения сплайн функций. Однако чаще они используются для моделирования параметрических кривых. В данном параграфе мы рассмотрим подробнее эти сплайны.

В п.1.3.2 мы видели, что кубическая сплайн-функция может быть представлена уравнением (1.3.2.16) $S_{\Delta}^3(x) = P^3(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i |x - x_i|^3$.

Пусть требуется построить кубический параметрический сплайн, проходящий через точки $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Назначаем узлам стыка возрастающую последовательность $\{t_k\}$ значений параметра t кривой. Возьмем последовательность узлов $\{(t_i, x_i)\}$ и построим по ним по формуле (1.3.2.16) кубическую сплайн-функцию $X(t) = P_x^3(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^x |t - t_i|^3$. Возьмем последовательность узлов $\{(t_i, y_i)\}$ и построим по ним кубическую сплайн-функцию $Y(t) = P_y^3(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^y |t - t_i|^3$. Аналогично, по набору узлов $\{(t_i, z_i)\}$ строим кубическую сплайн-функцию $Z(t) = P_z^3(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^z |t - t_i|^3$. Объединяя эти уравнения в одно векторное, получаем

$$\mathbf{R}(t) = X(t) \cdot \mathbf{i} + Y(t) \cdot \mathbf{j} + Z(t) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}^3(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}_i |t - t_i|^3, \quad (1)$$

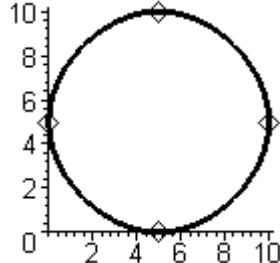
где $\mathbf{P}^3(t) = P_3^x(t)\mathbf{i} + P_3^y(t)\mathbf{j} + P_3^z(t)\mathbf{k} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$ некоторый векторный кубический полином, а $\mathbf{c}_i = c_i^x \cdot \mathbf{i} + c_i^y \cdot \mathbf{j} + c_i^z \cdot \mathbf{k}$ - некоторые векторные константы. Вспоминая способы получения кубических полиномов $P_x^3(t), P_y^3(t), P_z^3(t)$ легко заключаем, что $\mathbf{P}^3(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_n(t))$, где $\mathbf{p}_1(t)$ и $\mathbf{p}_n(t)$ являются начальным и конечным векторными кубическими полиномами в кусочном представлении параметрического сплайна.

Аналогично, для коэффициентов c_i^x, c_i^y, c_i^z мы имеем $c_i^\omega = \frac{1}{12} \left(\frac{s_{i+1}^\omega - s_i^\omega}{t_{i+1} - t_i} - \frac{s_i^\omega - s_{i-1}^\omega}{t_i - t_{i-1}} \right)$, где ω представляет x , y или z , s_i^ω является значением вторых производных соответствующих сплайн функций в узлах. Т.о. имеем $\mathbf{c}_i = \frac{1}{12} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}'' - \mathbf{r}_i''}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\mathbf{r}_i'' - \mathbf{r}_{i-1}''}{t_i - t_{i-1}} \right)$, где \mathbf{r}_i'' представляют значения вторых производных кубического параметрического сплайна в узлах t_i . В результате получаем

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_n(t)) + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}'' - \mathbf{r}_i''}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\mathbf{r}_i'' - \mathbf{r}_{i-1}''}{t_i - t_{i-1}} \right) |t - t_i|^3 \quad (2)$$

Заметим, что вектора в уравнении (2) могут быть двумерными или трехмерными (или даже n -мерными, $n > 1$).

Пример 1. Построить уравнение кубического сплайна, проходящего через точки $(5,0), (0,5), (5,10), (10,5), (5,0)$.



Назначим узлам последовательные значения параметра $\{t_i\}_{i=0}^4 = \{i\}$.

Границные векторы $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_4$. Составим систему уравнений Для определения 2-х производных в узлах. Решая ее и подставляя в (2), получим

$$x(t) = -60 + \frac{105}{2}t - 15t^2 + \frac{5}{2}t^3 - \frac{5}{2}|t-1|^3 + \frac{5}{2}|t-3|^3$$

$$y(t) = -20 + 30t - \frac{15}{2}t^2 + \frac{5}{2}|t-2|^3$$

2.5 Задачи и упражнения к главе 2

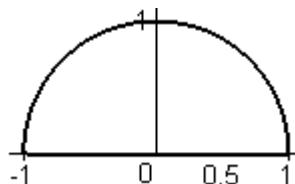
1⁰. Написать один раз непрерывно дифференцируемое уравнение квадрата, приведенного на рис.1 гл.1

Ответ:

$$x(t) = \frac{(-2t+3)t|t|+(2t+1)(t-1)|t-1|+(2t-7)(t-2)|t-2|-(2t-3)(t-3)|t-3|}{2}$$

$$y(t) = \frac{(-2t+5)(t-1)|t-1|+(2t-1)(t-2)|t-2|+(2t-9)(t-3)|t-3|-(2t-5)(t-4)|t-4|}{2}$$

2⁰. Написать параметрическое уравнение границы полукруга единичного радиуса с центром в начале координат (может лучше записать уравнение четверти – отрезок $[0,1]$ + четверть окружности; потом используем при построении полусфера)



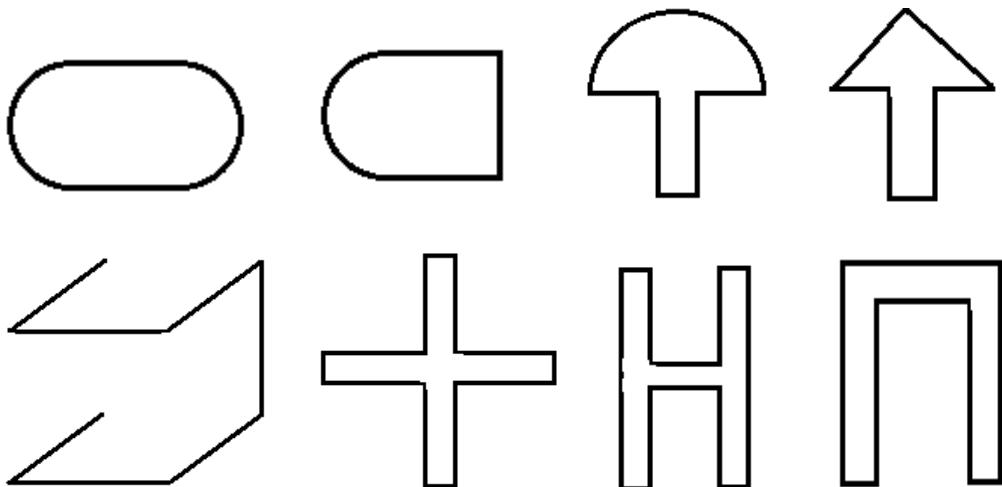
Решение. Уравнение полуокружности γ_1 можно записать в виде $x = \cos(\pi\tau)$, $y = \sin(\pi\tau)$ и для полуокружности интервалом будет $[\tau_1^0, \tau_1^1] = [0,1]$. Для прямолинейного отрезка γ_2 , соединяющего точки $(-1,0)$ и

$(1,0)$, имеем $x = -1 + 2\tau$, $y = 0$ и $[\tau_2^0, \tau_2^1] = [0,1]$. Назначим узлам криволинейной ломаной значения параметра: $t=0$ для точки $(1,0)$, $t=1$ для точки $(-1,0)$ и $t=2$ снова для точки $(1,0)$. Тогда уравнение замкнутой кривой, состоящей из дуги полуокружности γ_1 и отрезка $\gamma_2 : [-1,1]$ вещественной оси, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \cos \pi P(t, 0, 1) \\ \sin \pi P(t, 0, 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} -1 + 2P(t, 1, 1) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \pi P(t, 0, 1) + 2P(t, 1, 1) \\ \sin \pi P(t, 0, 1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Когда параметр t возрастает от $-\infty$ до 0 точка кривой не движется и находится в положении $(1,0)$. При возрастании параметра t от 0 до 2 радиус-вектор описывает замкнутый контур границы полукруга. При возрастании t от 2 до $+\infty$ точка кривой опять не движется и находится в положении $(1,0)$. ■

3⁰. Написать параметрические уравнения следующих кривых (координаты характерных точек подобрать самостоятельно).



Литература

1. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001.
3. Доля П.Г. Параметрические уравнения кусочно-гладких непрерывных кривых.// Вестник Международного Славянского Университета. Харьков. Серія “Технічні науки”, т.5, 2002, №7.
4. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых.// Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 661. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып.4. – С.97-103

5. Доля П.Г. Моделирование составных поверхностей в системах символьной математики. // Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 703. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып.5. – С.87-94.
6. Завьялов Ю.С.,Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. – М.:Машиностроение, 1985. – 224с.
7. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Учеб.пособие.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1986. 120с.
8. Алберг Дж., Нильсон Э.,Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., 1972. 320 с.
9. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М., 1985. 304с.