Доля П.Г.
Харьковский Национальный Университет
механико – математический факультет
2013 г.

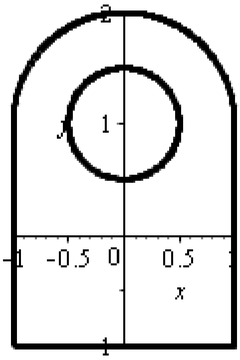
Аналитические методы геометрического моделирования

Глава 4. Неявные уравнения кривых и поверхностей

Оглавление

В 1963 г. В.Л. Рвачев предложил способ построения неявных уравнений кривых и поверхностей с ребрами, которые можно рассматривать как границы некоторых областей. Пусть Ω область n – мерного пространства с границей S. Идея построения неявного уравнения границы области S состояла в предложенной им методике конструирования функции $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая строго положительна внутри области, отрицательна вне нее и обращается в ноль на ее границе. Очевидно, что уравнение $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$ является неявным уравнением границы области.

Допустим, что с помощью операций над множествами (пересечение, объединение, дополнение и т.д.) мы можем представить область Ω в виде дополнения, пересечения и объединения нескольких подобластей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$, имеющих более простую форму, чем Ω, и для каждой из подобластей Ω_i мы знаем функцию $\omega_i(x_1, \ldots, x_n)$ положительную внутри области, отрицательную – вне нее и равную нулю на границе. Такую функцию мы будем называть функцией идентификации области или кратко – идентификатор области. Очевидно, что для любой области таких функций можно построить бесконечно много. Например, показанную на следующем рисунке область (плоский прямоугольник объединить с приподнятым кругом и с круглой дыркой внутри)



с помощью логической формулы

$$\Omega = \left(\Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcup \Omega_3\right) \bigcap \bar{\Omega}_4 \quad (1)$$

можно представить в виде комбинации подобластей Ω_i со следующими идентификаторами $\omega_i(x,y)$:

$\Omega_1 : \omega_1(x,y) = 1 - x^2 \geq 0$ - вертикальная полоса;

$\Omega_2 : \omega_2(x,y) = 1 - y^2 \geq 0$ - горизонтальная полоса;

$\Omega_3 : \omega_3(x,y) = 1 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$ - приподнятый круг радиуса 1;

$\Omega_4 : \omega_4(x,y) = \frac{1}{4} - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$ - приподнятый круг радиуса $\frac{1}{2}$;

Легко проверить, что функции идентификации $\omega_i(x,y) \geq 0$ неотрицательны внутри и на границе своих областей Ω_i.

Построим функцию двух переменных $IR(x,y)$, которая положительна в области первого квадранта $x > 0, y > 0$, обращается в ноль на его граничных лучах $y = 0\ (x \geq 0)$, $x = 0\ (y \geq 0)$ и отрицательную для остальных значений *x*,*y* (это функция идентификации $\omega(x,y)$ области первого квадранта). Построим также функцию двух переменных $UR(x,y)$, которая отрицательна во внутренних точках первого квадранта $x > 0, y > 0$, обращается в ноль на его граничных лучах $y = 0\ (x \geq 0)$, $x = 0\ (y \geq 0)$ и положительна для остальных точек (*x*,*y*) плоскости (это функция идентификации области, полученной объединением 2 – го, 3 – го и 4 – го квадрантов плоскости XY). Заменим в логической формуле (1) операции пересечения функцией $IR(\ldots,\ldots)$ с аргументами – идентификаторами ω_i соответствующих подобластей Ω_i, операцию объединения заменим функцией $UR(\ldots,\ldots)$, операцию дополнения заменим арифметическим отрицанием (т.е. вместо $\overline{\Omega}_i$ в формуле поставим $-\omega_i$). Тогда получаемая композиция функций $IR(\ldots),UR(\ldots)$ и $\omega_i(x,y)$ даст идентифицирующую функцию результирующей области. Например, для логической формулы, приведенной выше, следующая композиция функций

$$\omega(x,y)=IR(UR(\,IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)),\omega_3(x,y))\,,-\omega_4(x,y))$$

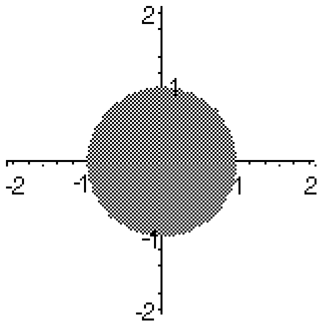
даст идентифицирующую функцию нашей области, а неявным уравнением ее границы будет $\omega(x,y)=0$. Описанный подход и есть предметом более подробного обсуждения данной главы.

4.1. Неявные уравнения границ плоских областей

Для идентификации области будем использовать функцию $\omega(x,y)$, которая положительна внутри области, равна нулю на ее границе и отрицательна вне области. Например, для окружности единичного радиуса с центром в начале координат такой функцией может быть $\omega(x,y)=1-x^2-y^2$. Для полуплоскости, лежащей с одной стороны прямой $a\,x+b\,y+c=0$ такой функцией будет либо $\omega(x,y)=a\,x+b\,y+c$, либо $\omega(x,y)=-a\,x-b\,y-c$ в зависимости от покрываемой части плоскости. Для краткости такие функции мы будем называть «функцией идентификации области» или кратко – идентификатор области. Очевидно, что для одной и той же области таких функций можно построить бесчисленное множество. Имея функции $\omega_1(x,y)$ и $\omega_2(x,y)$ двух пересекающихся областей можно построить такие же функции (положительные внутри и отрицательные снаружи) для области пересечения $\omega_\cap(x,y)$, объединения $\omega_\cup(x,y)$ или разности $\omega_\neg(x,y)$ таких областей. При этом неявным уравнением границы новой области будет соответственно $\omega_\cap(x,y)=0$, $\omega_\cup(x,y)=0$ или $\omega_\neg(x,y)=0$. Метод построения таких функций для области, полученной от пересечения, объединения или других операций над множествами, по уравнениям функций $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y)$ исходных областей предложен харьковским математиком В.Л. Рвачевым и носит название метода R функций. В литературе имеется методика его обоснования и применения, основанная на использовании булевых функций. Но для этой методики есть простая интерпретация, которую мы здесь описываем и приводим способ использования в MAPLE.

Для графического представления области, если есть ее функция идентификации области $\omega(x,y)$, в MAPLE удобно использовать функцию `implicitplot` с опциями `filled` и `coloring`.

```
restart;
with(plots):
w:=(x,y)-> 1-x^2-y^2:
implicitplot( w(x,y), x=-2..2, y=-2..2, filled=true,
 coloring=[WHITE,BLUE]);
```



Если опции `filled` и `coloring` убрать, то будет построена линия – граница области. Везде далее мы будем строить область (закрашенную), чтобы показывать не только кривую, представляющую границу области, но и ту часть плоскости, в которой функция идентификации области положительна.

4.1.1 Пересечение областей

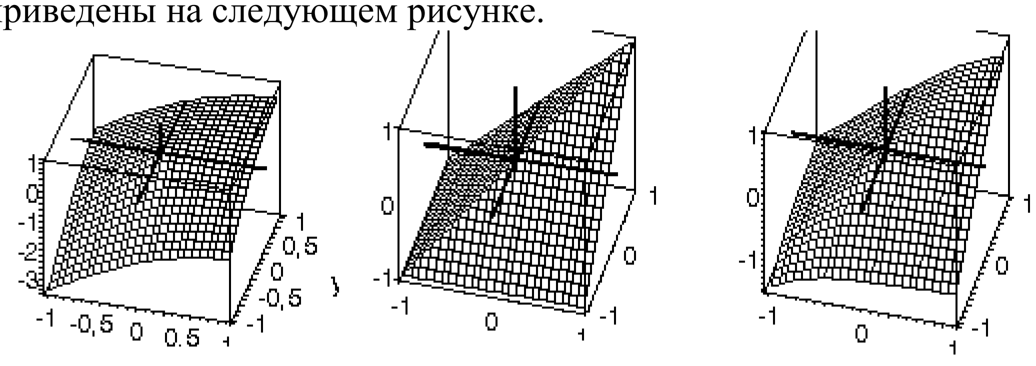
Рассмотрим функцию двух переменных $IR(x,y)$ положительную в области первого квадранта $x>0, y>0$, обращающуюся в ноль на его граничных лучах $y=0\,(x\geq 0)$, $x=0\,(y\geq 0)$ и отрицательную для остальных значений *x*,*y*. Примерами таких функций являются

$$IR_0(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad (1a)$$

$$IR_1(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right) \qquad (1b)$$

$$IR_\alpha(x,y,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right) \qquad (-1<\alpha\leq 1) \qquad (1c)$$

Мы их будем называть функциями, сопровождающими операцию пересечения или кратко «функциями пересечения». Графики этих функций приведены на следующем рисунке.



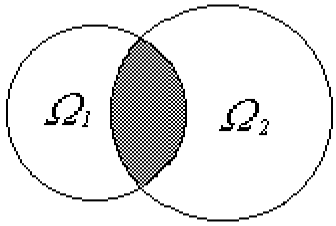
a) $IR_0(x,y)$ *b*) $IR_1(x,y)$ *c*) $IR_\alpha(x,y,4/5)$

Далее часто мы будем использовать обозначение $IR(x,y)$, и в качестве $IR(x,y)$ может выступать любая из функций (1), а также любая другая, которая удовлетворяет специальным условиям знаков

$$IR(x,y)=\begin{cases} IR(x,y)>0 & ,x>0\wedge y>0 \\ IR(x,y)=0 & ,x=0\wedge y\geq 0\ \vee\ x\geq 0\wedge y=0 \\ IR(x,y)<0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что функция $IR(x,y)$ тоже является «функцией идентификации области» первого квадранта $x\geq 0\wedge y\geq 0$.

Допустим, что замкнутая область Ω_1 определяется неравенством $\omega_1(x,y)\geq 0$, а замкнутая область Ω_2 определяется неравенством $\omega_2(x,y)\geq 0$. Рассмотрим множество точек (x,y) определяемое неравенством $IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))\geq 0$. Покажем, что это множество совпадает с областью пересечения $\Omega_1\bigcap\Omega_2$.



Пусть точка $P(x,y)\notin\Omega_1$ и $P(x,y)\notin\Omega_2$. Тогда $\omega_1(x,y)<0$ и $\omega_2(x,y)<0$. Согласно (2) $IR(\omega_1<0,\omega_2<0)<0$ как функция двух отрицательных аргументов.

Пусть $P(x,y)\in\Omega_1$ и $P(x,y)\notin\Omega_2$. Тогда $\omega_1(x,y)\geq 0$ и $\omega_2(x,y)<0$. В соответствии с (2), $IR(\omega_1\geq 0,\omega_2<0)<0$, поскольку второй аргумент отрицателен.

Пусть $P(x,y)\notin\Omega_1$ и $P(x,y)\in\Omega_2$. Тогда $\omega_1(x,y)<0$ и $\omega_2(x,y)\geq 0$. В соответствии с (2) имеем $IR(\omega_1<0,\omega_2\geq 0)<0$, поскольку первый аргумент отрицателен.

Пусть $P(x,y)\in\Omega_1$ и $P(x,y)\in\Omega_2$. Тогда $\omega_1(x,y)\geq 0$ и $\omega_2(x,y)\geq 0$. В соответствии с (2) получаем $IR(\omega_1\geq 0,\omega_2\geq 0)\geq 0$. Т.о. выражение $IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))$ неотрицательно только для точек $P(x,y)\in\Omega_1\bigcap\Omega_2$. При этом, если точка $P(x,y)$ лежит на границе области пересечения $\Omega_1\bigcap\Omega_2$, то $IR(0,\omega_2\geq 0)=0$ либо $IR(\omega_1\geq 0,0)=0$. Поэтому получаем $IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))=0$, и только в граничных точках области $\Omega_1\bigcap\Omega_2$ выполняется это равенство.

Таким образом, мы получили

Лемма 1. Функция $\omega_\cap(x,y)$ идентификации области пересечения $\Omega_1\bigcap\Omega_2$ замкнутых областей Ω_1 и Ω_2 может быть построена по формуле

$$\omega_\cap(x,y)=IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)), \tag{3}$$

где $\omega_1(x,y)$ и $\omega_2(x,y)$ являются функциями идентификации областей Ω_1 и Ω_2 .

Следствие. Неявное уравнение границы области $\Omega_1\bigcap\Omega_2$ имеет вид

$$IR(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))=0 \tag{4}$$

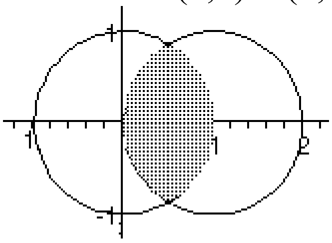
Пример 1. Построим неявное уравнение границы прямоугольника $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Функция ω_1 идентификации полосы $-a \le x \le a$ может быть записана, например, в виде $\omega_1(x,y) = a - |x|$. Аналогично, идентификатор полосы $-b \le y \le b$ может иметь вид $\omega_2(x,y) = b - |y|$. Используя функцию $IR_1(x,y)$ идентификатор области пересечения полос, т.е. области прямоугольника, имеет вид

$$\omega_r(x,y) = \frac{1}{2}\left(\omega_1(x,y) + \omega_2(x,y) - \left|\omega_1(x,y) - \omega_2(x,y)\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + b - |x| - |y| - \left|a - b + |y| - |x|\right|\right)$$

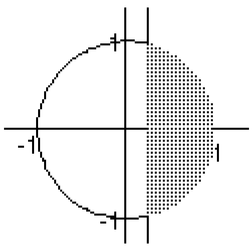
Пусть $a \ge b$. Двухэтажный модуль, стоящий в предыдущем выражении, как функция переменной x является ломаной и может быть приведен к «одноэтажному выражению».

Пример 2. Построить неявное уравнение границы области пересечения двух единичных кругов с центрами в точках (0,0) и (1,0).



Функции областей этих кругов имеют вид $\omega_1(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ и $\omega_2(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$. Тогда в соответствии с (3) получаем $\omega(x,y) = IR(1 - x^2 - y^2, 1 - (x-1)^2 - y^2)$. Выбирая в качестве функции пересечения функцию (1*b*), после некоторых преобразований получаем $\omega(x,y) = \frac{1}{2} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2}|2x - 1|$. Неявное уравнение границы “луночки” имеет вид $\frac{1}{2} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2}|2x - 1| = 0$.

Пример 3. Построить идентифицирующую функцию области пересечения единичного круга с центром в точке (0,0) и полуплоскости $x \ge \frac{1}{4}$.



Имеем $\omega_1(x,y)=1-x^2-y^2$, $\omega_2(x,y)=x-\dfrac{1}{4}$. Выбирая ($1b$) в качестве функции пересечения, получаем

$$\omega(x,y)=IR_1(1-x^2-y^2,x-\frac{1}{4})=\frac{3}{8}-\frac{x^2+y^2-x}{2}-\frac{1}{2}\left|x^2+y^2+x-\frac{5}{4}\right|$$

Пример 4. Построить функцию $\omega_{ABC}(x,y)$ внутренней области треугольника с вершинами в точках A(-2, -2), B(1,0), C(0,2). Для этого представим эту область как пересечение стрех полуплоскостей – лежащей ниже прямой AC, лежащей выше прямой AB и лежащей левее прямой BC. Функции $\omega_\alpha(x,y)$ этих полуплоскостей следует задать следующими уравнениями:

$$\omega_{AC}(x,y)=2+2x-y,\ \omega_{BC}(x,y)=2-2x-y,\ \omega_{AB}(x,y)=2-2x+3y.$$

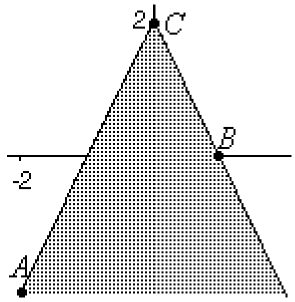
Для проверки того, что мы правильно выбрали знаки «функций полуплоскостей» достаточно вычислить значение этих функций в одной внутренней точке, например, в точке (0,0).

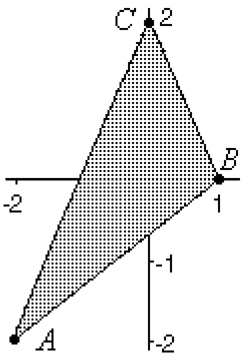
Пересечение первых двух полуплоскостей дает область угла, заштрихованного на следующем рисунке слева. Функция этой области равна

$$\omega_{\angle ACB}(x,y)=IR_1(2+2x-y,2-2x-y)=2-2|x|-y.$$

Полученную область мы пересекаем с полуплоскостью, лежащей выше прямой AB, и получаем треугольную область. Функция этой области будет равна

$$\omega_{ABC}(x,y)=IR_1(2-2|x|-y,2-2x+3y)=2-x+y-|x|-\big|x-2y-|x|\big|$$

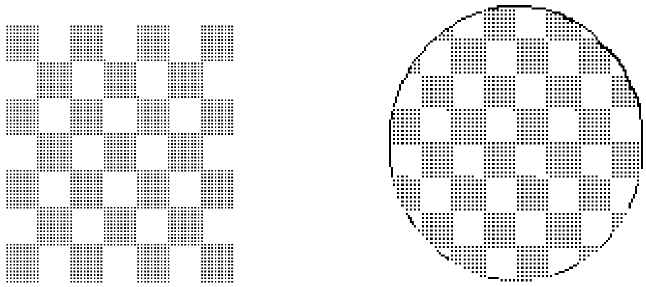




Пример 5. Построить функцию положительную внутри множества черных точек плоскости, показанных на следующем рисунке справа, и равную нулю на его границе. Оно представляет собой набор “черных квадратных клеток шахматной доски” расположенных внутри и на границе круга.

Пусть ширина клетки равна единице, а круг имеет радиуса 4 и центр в начале координат. Легко видеть, что функция области “бесконечной шахматной доски” (см. следующий рисунок слева) имеет уравнение $\omega_1(x,y)=\sin\pi x\sin\pi y$, а внутренняя область круга определяется функцией $\omega_2(x,y)=16-x^2-y^2$. Тогда $\omega(x,y)=IR_1(\sin\pi x\sin\pi y,16-x^2-y^2)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\pi x\sin\pi y+16-x^2-y^2-\left|\sin\pi x\sin\pi y-16+x^2+y^2\right|\right)$$

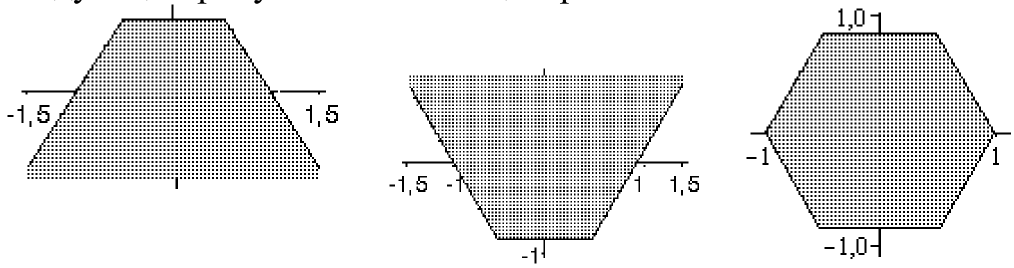


□

Предложение. Даны две области: одна ограничена сверху кривой $y = f_1(x)$, а другая ограничена снизу кривой $y = f_2(x)$. Функции этих областей имеют вид: $\omega_1(x,y) = f_1(x) - y$ и $\omega_2(x,y) = y - f_2(x)$. Очевидно, что функция области пересечения будет иметь вид $\omega_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x,y) = IR_1(f_1(x) - y, y - f_2(x))$.

Пример 6. Написать неявное уравнение правильного шестиугольника с центром в начале координат и единичным радиусом описанной окружности.

Можно построить эту область как пересечение шести полуплоскостей. Однако можно поступить по-другому. В предыдущих главах нами получен способ построения явного уравнения ломаной. Будет проще, если мы построим область шестиугольника пересечением областей показанных на следующем рисунке слева и в центре.



Координаты узлов верхней ломаной равны $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а тангенсы углов наклона бесконечных лучей равны $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. Уравнение ломаной, сверху ограничивающей область на левом рисунке, можно построить следующим образом

$$y_1(x) = \sqrt{3}\,Q_l(x, -\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,Q(x, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Аналогично, уравнение ломаной, ограничивающее снизу область показанную на среднем рисунке, имеет вид

$$y_2(x) = -\sqrt{3}\,Q_l(x, -\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,Q(x, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2 + \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Тогда

$$\omega_1(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) - y$$

$$\omega_2(x,y)=y-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)$$

И в результате получаем

$$\omega_6(x,y)=IR_1(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)-|y|$$

4.1.2 Дополнение областей

Аналогично предыдущему, для любой булевой функции можно построить сопровождающую функцию.

Легко понять, что если функция $\omega_\Omega(x,y)$ является «функцией области» Ω, то «функцией области» $\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega$ (черта сверху обозначает внешность области Ω, а $\partial\Omega$ обозначает множество точек границы Ω) будет $-\omega_\Omega(x,y)$. Действительно, область $\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega$ состоит из точек плоскости не принадлежащих Ω и граничных точек этой области. Тогда.

Если точка $P(x,y)\in\partial\Omega$, то $\omega_\Omega(x,y)=0\Rightarrow\omega_{\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega}(x,y)=0$.

Если $P(x,y)\in\bar{\Omega}$, то $\omega_\Omega(x,y)<0\Rightarrow\omega_{\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega}(x,y)>0$.

Если $P(x,y)\in\Omega$, то $\omega_\Omega(x,y)>0\Rightarrow\omega_{\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega}(x,y)<0$.

Таким образом, мы получили

Лемма 2. Функция $\omega_{\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega}(x,y)$ положительная вне области Ω, равная нулю на ее границе и отрицательная внутри области, может быть построена по формуле

$$\omega_{\bar{\Omega}\bigcup\partial\Omega}(x,y)=-\omega_\Omega(x,y), \qquad (5)$$

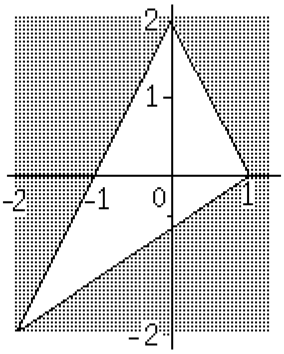
где $\omega_\Omega(x,y)$ являются «функцией области» Ω.

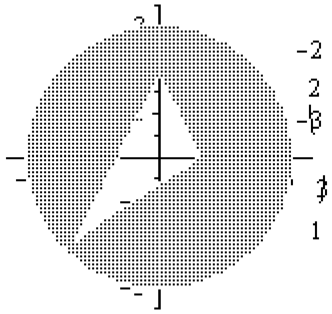
Пример 1. Построить функцию $\omega(x,y)$ положительную внутри круга с центром в начале координат, радиуса 3 и вне треугольника с вершинами в точках A(-2, -2), B(1,0), C(0,2) и равную 0 на границе этой области.

Для нашего треугольника в примере 3 предыдущего пункта мы построили «функцию области» $\omega_{ABC}(x,y)=2-x+y-|x|-\big|x-2y-|x|\big|$. Очевидно, что функция положительная вне области треугольника, равная 0 на его границе и отрицательная внутри будет отличаться от этой только знаком. Тогда для нашей области мы получим

$$\omega(x,y)=IR_1(-\omega_{ABC}(x,y),9-x^2-y^2)=$$

$$\frac{7}{2}-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}|-4y-2|x|+2x|-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$$
$$-\frac{1}{2}\left|-11-y+|x|+x+\frac{1}{2}|-4y-2|x|+2x|+x^2+y^2\right|$$





4.1.3 Объединение плоских областей

Аналогично п. 4.1.1 можно строить неявные уравнения границ областей. Для этого нам потребуются следующие вспомогательные функции

$$UR_0(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

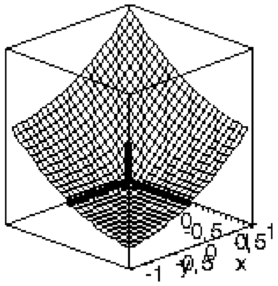
$$UR_1(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$$

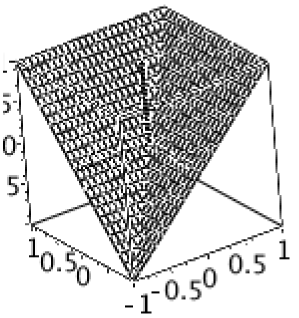
$$UR_\alpha(x,y)=\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha\,x\,y}\right)\ \left(-1<\alpha\le 1\right)$$

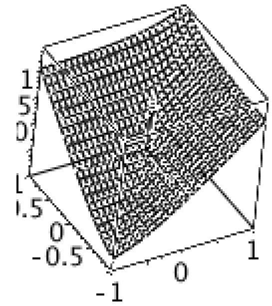
(по сравнению с функциями $IR_\alpha(x,y)$ имеем только отличие в знаке).

Вот пример кода Maple построения графиков этих функций

```
p1:=spacecurve({[t,0,0],[0,t,0],[0,0,t]},t=-1..1,
              thickness=3, color=BLACK):
p2:=plot3d(UR0(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
              style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-135,70]);
p2:=plot3d(UR1(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
           style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-135,70]);
p2:=plot3d(URa(x,y,4/5),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
                 style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-135,70]);
```



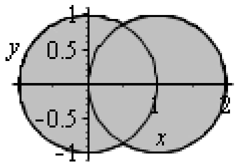




Пример. Построить уравнение границы области объединения двух кругов, представленную на следующем рисунке

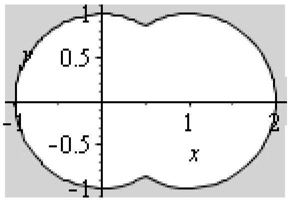
```
w1:=(x,y)->1-x^2-y^2:
w2:=(x,y)->1-(x-1)^2-y^2:
```

```
wu:=(x,y)->UR1(w1(x,y),w2(x,y)):
p1:=implicitplot([w1(x,y),w2(x,y)],x=-2..4,y=-2..2,
                thickness=1, color=BLACK):
p2:=implicitplot(wu(x,y),x=-1.1..2.1,y=-1.1..1.1,
    filled=true,   coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25]):
display(p1,p2, scaling=CONSTRAINED);
simplify(wu(x,y));
```



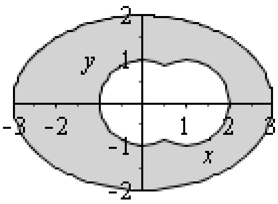
Внешность области объединения двух кругов можно построить следующим кодом

```
implicitplot(-wu(x,y),x=-1.1..2.1,y=-1.1..1.1,filled=true,
   coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25],scaling=CONSTRAINED);
```



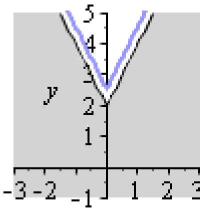
Пересечение внешности предыдущей области с внутренностью эллипса

```
w3:=(x,y)->1-x^2/9-y^2/4:
wi:=(x,y)->IR1(-wu(x,y),w3(x,y)):
implicitplot(wi(x,y),x=-3..3,y=-2..2,filled=true,
                    coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25],
scaling=CONSTRAINED);
```



Объединение двух полуплоскостей дает внешность/внутренность угловой области

```
w1:=(x,y)->2-2*x-y:
w2:=(x,y)->2+2*x-y:
w12:=(x,y)->UR1(w1(x,y),w2(x,y)):
implicitplot(w12(x,y),x=-3..3,y=-1..5,filled=true,
   coloring=[WHITE,BLUE],scaling=CONSTRAINED,grid=[41,41]);
simplify(w12(x,y));
```



4.1.3 Разность областей

Поскольку имеет место $\Omega_1 \setminus \Omega_2 = \Omega_1 \bigcap \bar{\Omega}_2$, то функциями «разности областей» будут следующие

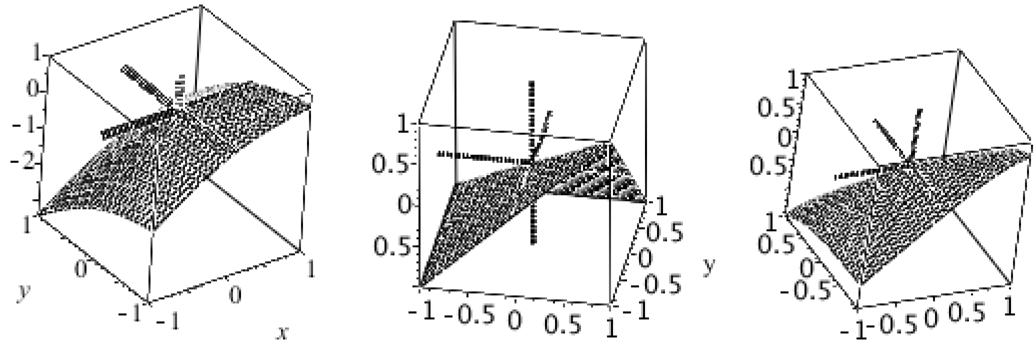
$$DR_0(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$DR_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - y - |x + y|\right)$$

$$UR_\alpha(x,y) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x - y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha x y}\right) \ (-1 < \alpha \le 1)$$

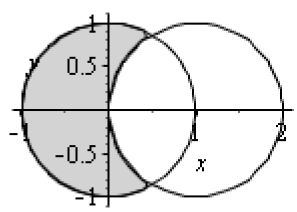
Вот пример кода Maple построения графиков этих функций

```
p1:=spacecurve({[t,0,0],[0,t,0],[0,0,t]},t=-1..1,
                    thickness=3, color=BLACK):
p2:=plot3d(DR0(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
                       style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-55,55]);
p2:=plot3d(DR1(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
                            style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-80,55]);
p2:=plot3d(DRa(x,y,4/5),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED,
                         style=HIDDEN, color=BLACK):
display(p1,p2,orientation=[-100,55]);
```



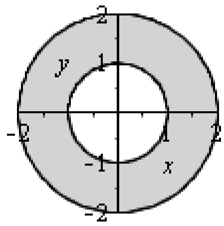
Пример. Построим неявное уравнение границы разности двух кругов

```
w1:=(x,y)->1-x^2-y^2:
w2:=(x,y)->1-(x-1)^2-y^2:
wu:=(x,y)->DR1(w1(x,y),w2(x,y)):
p1:=implicitplot([w1(x,y),w2(x,y)],x=-2..4,y=-2..2,
                      thickness=1,color=BLACK):
p2:=implicitplot(wu(x,y),x=-1.1..2.1,y=-1.1..1.1,
       filled=true, coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25]):
display(p1,p2,scaling=CONSTRAINED);
simplify(wu(x,y));
```



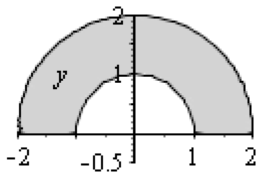
Пример. Построим неявное уравнение границы кольцевой области

```
w1:=(x,y)->4-x^2-y^2:
w2:=(x,y)->1-x^2-y^2:
w12:=(x,y)->DR1(w1(x,y),w2(x,y)):
p1:=implicitplot([w1(x,y),w2(x,y)],x=-2..2,y=-2..2,
                 thickness=1,color=BLACK):
p2:=implicitplot(w12(x,y),x=-2..2,y=-2..2,
         filled=true,coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25]):
display(p1,p2,scaling=CONSTRAINED);
simplify(w12(x,y));
```



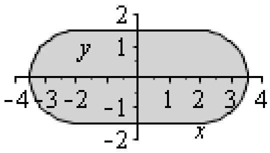
Пример. Построим неявное уравнение границы полукольца

```
w3:=(x,y)->y:
w123:=(x,y)->IR1(w12(x,y),w3(x,y)):
implicitplot(w123(x,y),x=-2..2,y=-0.5..2,filled=true,
  coloring=[WHITE,BLUE],grid=[25,25], scaling=CONSTRAINED);
```



Пример. Построим неявное уравнение границы «стадиона»

```
a:=2: b:=3/2:
w1:=(x,y)->a^2-x^2:
w2:=(x,y)->b^2-y^2:
w12:=(x,y)->IR1(w1(x,y),w2(x,y)):
w3:=(x,y)->b^2-(x+a)^2-y^2:
w4:=(x,y)->b^2-(x-a)^2-y^2:
w123:=(x,y)->UR1(w12(x,y),w3(x,y)):
w1234:=(x,y)->UR1(w123(x,y),w4(x,y)):
implicitplot(w1234(x,y),x=-4..4,y=-2..2,filled=true,
  coloring=[WHITE,BLUE],grid=[30,20], scaling=CONSTRAINED);
```

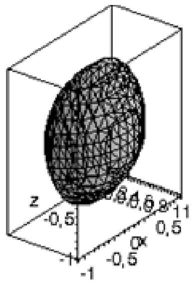


4.2 Неявные уравнения составных поверхностей

Методику получения уравнений границ плоских областей можно применять для построения неявных уравнений границ (поверхностей) пространственных областей. Только в трехмерном случае надо использовать «идентифицирующие» функции трехмерных областей (функции 3 – х переменных).

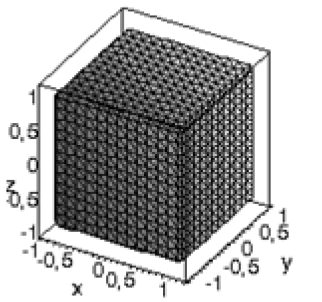
Пример.

```
w1:=(x,y,z)->1-x^2-y^2-z^2:
w2:=(x,y,z)->1-(x-1)^2-y^2-z^2:
wi:=(x,y,z)->IR1(w1(x,y,z),w2(x,y,z)):
implicitplot3d(wi(x,y,z),x=0..1,y=-1..1,z=-1..1,
    grid=[15,15,15],scaling=CONSTRAINED,axes=BOXED,
    orientation=[-60,60]);
simplify(wi(x,y,z));
```



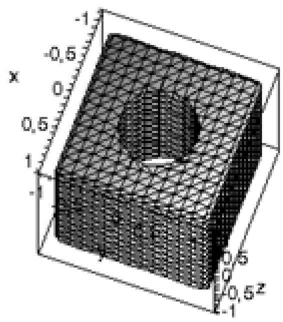
Пример. Неявное уравнение поверхности куба

```
w1:=(x,y,z)->1-x^2:
w2:=(x,y,z)->1-y^2:
w12:=(x,y,z)->IR1(w1(x,y,z),w2(x,y,z)):
w3:=(x,y,z)->1-z^2:
w123:=(x,y,z)->IR1(w12(x,y,z),w3(x,y,z)):
implicitplot3d(w123(x,y,z),x=-1.1..1.1,y=-1.1..1.1,
     z=-1.1..1.1,grid=[15,15,15],scaling=CONSTRAINED,
     axes=BOXED,orientation=[-60,60]);
simplify(w123(x,y,z));
```



Пример. Вычтем цилиндр (делаем цилиндрическую дырку)

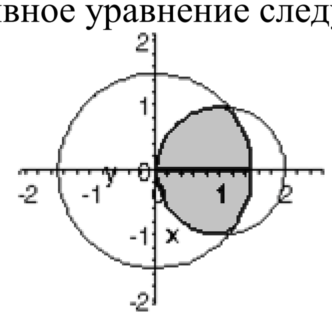
```
w4:=(x,y,z)->1/4-x^2-y^2:
w1234:=(x,y,z)->DR1(w123(x,y,z),w4(x,y,z)):
implicitplot3d(w1234(x,y,z),x=-1.1..1.1,y=-1.1..1.1,
     z=-1.1..1.1,grid=[15,15,15],scaling=CONSTRAINED,
     axes=BOXED, orientation=[20,25]);
simplify(w1234(x,y,z));
```



Задачи и упражнения к главе 4

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение прямоугольника, рассматривая его как область пересечения двух полос.

<u>Упражнение</u>. Построить неявное уравнение следующей области



Ответ: $\frac{9}{8} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2}\left|2x - \frac{9}{4}\right|$

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение квадрата.

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение двумерной буквы «К»

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение трехмерной буквы «К». *Замечание. Для этого надо рассмотреть уравнение двумерной буквы «К» как уравнение трехмерной (бесконечного цилиндра с сечением в форме буквы «К») и выполнить пересечение этой области с областью полосы, например, с полосой* $z \le 1$

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение трехмерной буквы – первой буквы вашей фамилии или имени.

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение цилиндра (с донышками).

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение конуса (с донышком) и усеченного конуса (с донышками).

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение вертикального цилиндра с горизонтальным цилиндрическим отверстием.

<u>Упражнение</u>. Написать неявное уравнение вертикального цилиндра с горизонтальным отверстием квадратного сечения.