

2 Властивості радіус-вектору

Доведіть, що для радіус-векторів $\bar{r}_i(t) = \begin{cases} x = x_i(t) \\ y = y_i(t) \\ z = z_i(t) \end{cases}$ виконується:

1. $(\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t))' = \bar{r}_1'(t) \pm \bar{r}_2'(t)$
2. $(f(t)\bar{r}(t))' = f'(t)\bar{r}(t) + f(t)\bar{r}'(t)$
3. $(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t))' = (\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2'(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t))$
4. $[\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)]' = [\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)] + [\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t)]$
5. $(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t))' = (\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2'(t), \bar{r}_3'(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t), \bar{r}_3(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3'(t))$

1. Доведіть, що з неперервності радіус-вектора $\bar{r}(t)$ наслідком є неперервність $|\bar{r}(t)|$. Чи вірне зворотне твердження?
2. Обчисліть похідну від: а) $\bar{r}^2(t)$; б) $|\bar{r}(t)|$; в) $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)$; г) $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t))$; д) $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))$; е) $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \times \bar{r}'''(t)$; ф) $|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|$;
3. Чи вірно, що $|\bar{r}'(t)| = |\bar{r}(t)|'$.
4. Доведіть, що якщо на деякому інтервалі $\bar{r}(t) = \bar{0}$, то $\bar{r}(t) = \text{const}$ на цьому інтервалі. Чи вірне зворотне твердження?
5. На деякому інтервалі $|\bar{r}(t)| = \text{const}$. Доведіть, що $\bar{r}(t) \perp \bar{r}'(t)$ на цьому інтервалі. Чи вірне зворотне твердження?
6. На деякому інтервалі $\bar{r}(t) \parallel \bar{r}'(t)$, для цього необхідно і достатньо, щоб $\bar{r}(t)$ мав постійний напрямок. Доведіть.
7. Нехай для вектор-функції $\bar{r}(t)$ класа C^k в усіх точках області визначення мають місце наступні співвідношення: $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = 0, \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \neq 0$. Довести, що $\bar{r}(t)$ задає плоску криву.
8. Довести, що вектор-функція $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \cos(t)\bar{r}_1 + \sin(t)\bar{r}_2$ задає еліпс, якщо $\bar{r}_1 \nparallel \bar{r}_2$.

3 Дотична до кривої

Дотичним вектором до кривої $\bar{r}$ буде вектор $\bar{r}'$. Тоді дотичною прямою в точці кривої $p = \bar{r}(t_0)$ буде пряма, яка задається рівнянням $\tau(u) = \bar{r}(t_0) + u\bar{r}'|_{t=t_0}$.

1. Складіть рівняння дотичної та нормалі (пряма ортогональна до дотичної) для наступних ліній:
 - (a) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 + 1$ в точці $A(t = 1)$;
 - (b) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$ в довільній точці;
 - (c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точці $A(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$;
 - (d) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = C$;
 - (e) $r = a\varphi$;
 - (f) $r = 2a \cos \varphi$ в точці A , для якої $\varphi = \frac{\pi}{4}$;
 - (g) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 4t$ в точці $t = 0$;
 - (h) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ в точці $t = 1$.
2. Складіть рівняння дотичної до кривої $y = x^3 + 3x^2 - 5$, які перпендикулярні до $2x - 6y + 1 = 0$
3. Складіть рівняння дотичної до кривої $y = x^2 + 2x$, які проходять через точку $P(1, -3)$, та обчисліть кут між ними.
4. Доведіть, що дотичні до гіперболи $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках її перетину з вісями координат, будуть паралельними між собою.
5. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(\frac{1}{2}, 2)$, та дотична до графіка функції $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ та перетинає в двох різних точках графік функції $y = \sqrt{4 - x^2}$.
6. Знайдіть координати точок перетину з віссю Ox тих дотичних до графіка функції $y = \frac{x+1}{x-1}$ які утворюють кут $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ з віссю Ox .
7. Знайдіть всі значення x , при кожному з яких дотичні до графіків функцій $y = 3 \cos 5x$ і $y = 5 \cos 3x + 2$ в точках з абсциссою x паралельні.
8. На графіці функції $y = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ знайдіть всі точки, в яких дотична до цього графіку відтинає від додатньої частині вісі Ox вдвічі менший відрізок, ніж від від'ємної частини вісі Oy . Знайдіть довжини цих відрізків.
9. Яка з прямих, які проходять через початок координат, перетинають гіперболу $xy = a^2$ під прямим кутом?
10. В рівнянні параболи

$$y = x^2 + bx + c$$
 постійні b та c визначити так, щоб пряма $y = 3x - 5$ була дотичною до параболи в точці з абсцисой $x = 2$.