1 Кривина кривої

Для натуральної параметризації $k = |\bar{r}'(s)|$, та $k = \frac{|[\bar{r}'(t),\ \bar{r}''(t)]|}{|\bar{r}'(t)|^3}$, для довільної вектор-функції $\bar{r}(t)$. В координатах

$$k = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Якщо крива пласка, то $k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$ для параметричного задання. Для неявного $F(x, y) = 0$:

$$k = \frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}.$$

Або в загальному вигляді $k = div\left(\frac{grad\,F}{|grad\,F|}\right)$.

2 Скрут кривої

Для натуральної параметризації $\kappa = |\bar{\beta}'(s)| = \frac{|(\bar{r}'_s, \bar{r}''_s, \bar{r}'''_s)|}{k^2}$, де k - кривина кривої. Для довільної вектор-функції $\bar{r}(t)$:

$$\kappa = \frac{|(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))|}{|[\bar{r}'(t),\ \bar{r}''(t)]|^2}$$

1. Створити процедуру в Maple для обчислення скруту кривої. Обчислити в Maple кривину та скрут наступних ліній:

   (a) $x = 3t - t^3,\quad y = 3t^2,\quad z = 3t + 3t^3;$

   (b) $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = \cos t + \sin t;$

   (c) $x = ct,\quad y = c\sqrt{2}\ln t,\quad z = ct^{-1};$

   (d) $x = \frac{1+t}{1-t},\quad y = \frac{1}{1-t^2},\quad z = \frac{t}{1+t};$

   (e) $x = 2t,\quad y = \ln t,\quad z = t^2$

   (f) $x = \cos^3 t,\quad y = \sin^3 t,\quad z = \cos 2t;$

   (g) $x = t^2,\quad y = t,\quad z = t^4;$

   (h) $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\quad y = a\,\mathrm{sh}\,t,\quad z = at.$

   (i) $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = at^2$