4 Особливі точки кривих

Крива γ задається **параметрично** радіус-вектором $\bar{r}(t) \in C^{\infty}$. Нехай в точці t_0 похідна $\bar{r}'(t_0) = 0$. Це може бути особлива точка або ж в ній «невдала» параметризація. Щоб це з'ясувати беремо похідні вищого порядку від $\bar{r}(t)$ поки не отримаємо $\bar{r}^{(p)}(t_0) \neq 0$, але на цьому не зупиняємось і шукаємо наступну похідну $\bar{r}^{(q)}(t_0) \nparallel \bar{r}^{(p)}(t_0)$. Далі робимо висновок:

1. Якщо p — непарне, то $\bar{r}(t_0)$ — регулярна точка кривої γ та $\bar{r}^{(p)}(t_0)$ — напрямний вектор дотичної, при цьому:
   (a) Якщо q — парне, то $\bar{r}(t_0)$ — «звичайна» точка.
   (b) Якщо q — непарне, то $\bar{r}(t_0)$ — точка перегину.
2. Якщо p — парне, то $\bar{r}(t_0)$ — точка повернення (касп) кривої γ та $\bar{r}^{(p)}(t_0)$ — напрямний вектор півдотичної, при цьому:
   (a) Якщо q — парне, то $\bar{r}(t_0)$ — першого роду (гілки по різні боки)
   (b) Якщо q — непарне, то $\bar{r}(t_0)$ — другого роду (гілки в один бік)

Для **неявно** заданої кривої γ рівнянням $F(x,y) = 0$ точка (x_0, y_0) може бути особливою лише коли $F'_x(x_0, y_0) = 0$ та $F'_y(x_0, y_0) = 0$. Якщо другі похідні одночасно не нульові, то вони визначають криву другого порядку, і точка (x_0, y_0) буде особливою в залежності від знаку $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$:

$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 > 0$ — *ізольована* точка.

$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 < 0$ — точка самоперетину або *вузлова*.

$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$ — точка *загострення* (повернення) або точка *самодотику* різних видів.

1. Знайдіть особливі точки та випишіть рівняння дотичних до наступних кривих
   (a) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ (астроїда);
   (b) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ (циклоїда);
   (c) $x = \frac{t^2}{1-t}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2}$;
   (d) $x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2}$;
   (e) $x = t^4, \quad y = t^2 - t^5$;
2. Дослідіть та побудуйте криві
   (a) $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at}{1+t^3}$ (декартів лист);
   (b) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}$;
   (c) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{(1-t^2)}{1+t^2}$
3. Знайдіть особливі точки кривих:
   (a) $x^3 - 2x^2 - y^2 + x = 0$;
   (b) $(2a - x)y^2 - x^3, \quad a > 0$;
   (c) $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$;
   (d) $x^3 - 27(x - y)^2 = 0$;
   (e) $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0$;
   (f) $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$;
   (g) $x^6 - x^4 + y^2 = 0$;
   (h) $x^3 - x^2 + xy^2 - y^2 = 0$;
4. При яких a та b крива $y^2 = x^3 + ax + b$ має особливу точку?

5 Довжина дуги

Довжина відрізка кривої γ, яка задається радіус-вектором $\bar{r}(t) = \{x^i\}$ буде

$$s[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |\bar{r}'| ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i}\, dt,$$

де t_1 і t_2 відповідають початку та кінцю відрізка кривої.

1. Обчислити довжину дуги між двома довільними точками наступних ліній:
   (a) $y = x^{2/3}$;
   (b) $y = x^2$;
   (c) $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$;
   (d) $x = a\big(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t\big), \quad y = a\sin t$.

2. Обчислити довжину дуги на заданому проміжку наступних ліній:
   (a) $y = \ln\cos x, \quad x \in [0, \pi/3]$;
   (b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad x \in [1, 4]$;
   (c) $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t, \quad y = 2\operatorname{ch} t, \quad t \in [0, 2]$;
   (d) $x = 8at^3, \quad y = 3a(2t^2 - t^4), \quad t \in [0, \sqrt{2}]$.

3. Знайти довжину гвинтової лінії
   $$x = \cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$
   від точки перетину з площиною (x, y) до довільної точки M.

4. Знайти довжину одного витка лінії
   $$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a\cos(t/2)$$
   між двома її точками перетину з площиною (x, z).

5. Знайти довжину дуги лінії
   $$x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$$
   між площинами
   $$y = \frac{a}{3}, \quad y = 9a.$$

6. Знайти вираз для довжини дуги кривої, заданої в полярних координатах.

7. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$.

8. Знайти довжину всієї лінії
   (a) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
   (b) $\rho = a\cos^4(\varphi/4)$.

9. Знайти вираз диференціала довжини дуги лінії в сферичних координатах.

10. Знайти вираз диференціала довжини дуги лінії в циліндричних координатах.

11. Скласти параметричне рівняння кола, взявши за параметр довжину дуги.

12. Скласти параметричне рівняння ланцюгової лінії
    $$y = a\operatorname{ch}(x/a)$$
    прийнявши за параметр довжину дуги, починаючи від вершини у бік додатних абсцис.

13. Написати параметричне рівняння гвинтової лінії, прийнявши за параметр довжину дуги.

6 Кривина кривої

Для натуральної параметризації $k = |\bar{r}''(s)|$, та $k = \frac{|[\bar{r}'(t),\ \bar{r}''(t)]|}{|\bar{r}'(t)|^3}$, для довільної вектор-функції $\bar{r}(t)$. В координатах

$$k = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Якщо крива пласка, то $k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$ для параметричного задання. Для неявного $F(x, y) = 0$:

$$k = \frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}.$$

Або в загальному вигляді $k = div\left(\frac{grad\,F}{|grad\,F|}\right)$.

1. Знайти кривину наступних ліній:
   (a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$;
   (b) $y^2 = 2px$;
   (c) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t$;
   (d) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$;
   (e) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$
   (f) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t$;
   (g) $y^2 = x, \quad x^2 = z$;
   (h) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$.
2. Знайти кривину лінії, яка задана рівнянням
   (a) $\rho = \rho(\varphi)$;
   (b) $F(x, y) = 0$.
3. Знайти кривину наступних ліній:
   (a) $\rho = ae^{h\varphi}$;
   (b) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$
   (c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
   (d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
4. Обчислити кривину кривої $(x - y)^2 - x^5 = 0$ в точці $A(1, 0)$.