



Mathematica для математиков.

Представлен параграф 3.9 «Решение прикладных задач» главы 3 «Реализация основных понятий математического анализа» нашего пособия «Mathematica для математиков».

Примеры, приводимые в пособии, проверялись в версии пакета *Mathematica* 9.0. В предыдущих версиях некоторые примеры работать не будут.

Оглавление

3.9 Решение прикладных задач.	1
3.9.1 Физические приложения кратных интегралов.	1
3.9.2 Примеры решения задач распространения тепла	6
3.9.3 Одномерные колебания	18
3.9.4 Примеры решения краевых задач для уравнение Лапласа	27
Литература.	33

3.9 Решение прикладных задач.

Приложения математического анализа неисчислимы. Здесь мы выбрали несколько тем, которые демонстрируют возможности описанных в данной главе функций системы.

3.9.1 Физические приложения кратных интегралов.

Центр тяжести тела. Пусть $\rho = \rho(x, y)$ представляет плотность материала двумерного тела (масса единицы площади в точке x, y). Тогда масса тела, занимающего область D на плоскости, вычисляется по формуле

$$M = \iint_D \rho(x, y) dxdy \quad (1)$$

Положение (x_c, y_c) центра тяжести тела определяется по формулам

$$x_c = \frac{1}{M} \iint_D x \rho(x, y) dxdy, \quad y_c = \frac{1}{M} \iint_D y \rho(x, y) dxdy \quad (2)$$

Когда говорят о центре тяжести фигуры, то подразумевают, что плотность $\rho(x, y) = 1$.

Пример. Найти центр тяжести первого квадранта эллипса. Имеем
 $\text{Clear}[a, b];$

$\text{opt} = \text{Sequence}[\{x, 0, a\}, \{y, 0, b\}, \text{Assumptions} \rightarrow a > 0 \ \&\& \ b > 0];$

$$\text{rg} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \ \&\& \ x \geq 0 \ \&\& \ y \geq 0;$$

$M = \text{Integrate}[\text{Boole}[\text{rg}], \text{opt}];$

$Mx = \text{Integrate}[x \text{Boole}[\text{rg}], \text{opt}];$

$My = \text{Integrate}[y \text{Boole}[\text{rg}], \text{opt}];$

$$\{xc, yc\} = \{Mx, My\}/M$$

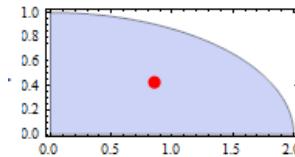
$$\left\{ \frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right\}$$

$$a = 2; b = 1;$$

$rg = \text{RegionPlot}[\text{rg}, \{x, 0, a\}, \{y, 0, b\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}];$

$pt = \text{Graphics}[\{\text{Red}, \text{PointSize}[0.05], \text{Point}[\{xc, yc\}]\}];$

$\text{Show}[rg, pt]$



□

Пример. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной ветвью циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью x .

В формуле Грина $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$ положим

$Q = x^2/2$, $P = 0$. Тогда она принимает вид $\iint_D x dx dy = \oint_L \frac{x^2}{2} dy$, где L – контур,

составленный из циклоиды и отрезка $[0, 2\pi]$ оси Ox , на котором $dy = 0$. Поэтому под контуром L можно понимать только дугу циклоиды. Аналогично,

полагая $Q = 0$, $P = -y^2/2$, получаем $\iint_D y dx dy = -\oint_L \frac{y^2}{2} dx$, где L – контур,

составленный из циклоиды и отрезка $[0, 2\pi]$ оси Ox , на котором $y = 0$ и, поэтому под контуром L можно понимать только одну дугу циклоиды. В

результате формулы (2) принимают вид $x_c = \frac{1}{2M} \oint_L x^2 dy$ и $y_c = -\frac{1}{2M} \oint_L y^2 dx$,

где M определяется как и раньше по (1). Заменяя x и y их параметрическим представлением, приходим к необходимым формулам вычисления центра тяжести нашей фигуры.

$a = .; x = a(t - \text{Sin}[t]); y = a(1 - \text{Cos}[t]);$

$M = -\text{Integrate}[x D[y, t], \{t, 0, 2\pi\}];$

$Mx = -\text{Integrate}[x^2 D[y, t], \{t, 0, 2\pi\}]/2;$

$My = -\text{Integrate}[-y^2 D[x, t], \{t, 0, 2\pi\}]/2;$

$$\{xc, yc\} = \{Mx, My\}/M$$

$$\{a\pi, \frac{5a}{6}\}$$

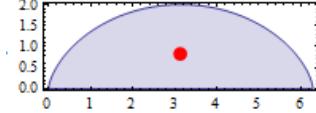
Обратите внимание на минусы, которые необходимо поставить перед выражениями для M , Mx и My , поскольку циклоида обходит область в направлении по часовой стрелки, т.е. в отрицательном направлении.

$$a = 1;$$

rg = ParametricPlot[{vx, vy}, {t, 0, 2π}, {v, 0, 1}, Mesh → None];

pt = Graphics[{Red, PointSize[0.05], Point[{xc, yc}]}];

Show[rg, pt]



□

Положение центра тяжести трехмерного тела определяется по формулам

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dxdydz, \quad z_c = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dxdydz,$$

где $M = \iiint_V \rho dxdydz$ представляет массу тела.

Пример. Найдем центр массы полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ($z \geq 0$) плотности $\rho = 1$.

В силу симметрии $\iiint_V x dxdydz = 0$ и $\iiint_V y dxdydz = 0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} Mz &= \text{Integrate}[z \text{Boole}[x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ \&&} z \geq 0], \\ &\quad \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 1\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \text{Integrate}[\text{Boole}[x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ \&&} z \geq 0], \\ &\quad \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}, \{z, 0, 1\}] \end{aligned}$$

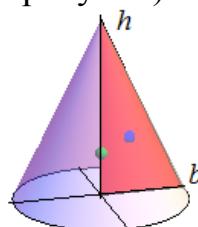
$$zc = Mz/M$$

$$\frac{3}{8}$$

Т.о. центр массы единичного полушара находится в точке $\left(0, 0, \frac{3}{8}\right)$.

□

Пример. Определить положение центра тяжести плоского треугольника, и конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг одного из катетов на оси Oz . Вершина треугольника находится в точке $(0, 0, h)$, а длина катета основания равна b (см. следующий рисунок)



Вычисляем положение центра тяжести треугольника

Clear[*h, b, x, y, z*];

brg = **Boole**[$y \leq h \left(1 - \frac{x}{b}\right)$ $\&& x \geq 0$ $\&& y \geq 0$];

opt = **Sequence**[{*x, 0, b*}, {*y, 0, h*}, **Assumptions** $\rightarrow b > 0$ $\&& h > 0$];

M = **Integrate**[**brg**, **opt**];

Mx = **Integrate**[*x* * **brg**, **opt**];

My = **Integrate**[*y* * **brg**, **opt**];

{**xc, zc**} = {**Mx, My**}/**M**

$$\left\{ \frac{b}{3}, \frac{h}{3} \right\}$$

Вычисляем положение центра тяжести конуса. В силу симметрии его центр тяжести лежит на оси Oz .

crg = **Boole**[$0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}\right)$];

opt = **Sequence**[{*x, -∞, ∞*}, {*y, -∞, ∞*}, {*z, 0, h*},

Assumptions $\rightarrow b > 0$ $\&& h > 0$];

MC = **Integrate**[**crg**, **opt**];

MCz = **Integrate**[*z* * **crg**, **opt**];

Zc = **MCz**/**MC**

$$\frac{h}{4}$$

Как видим вертикальная координата центра тяжести конуса отличается от вертикальной координаты центра тяжести треугольника.

Нарисуем наши фигуры и положения их центров тяжести (см. предыдущий рисунок)

h = 2; *b* = 1;

ps = **Plot3D**[$h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}\right)$, {*x, -b, b*}, {*y, -b, b*},

RegionFunction \rightarrow **Function**[{*x, y, z*}, $x^2 + y^2 \leq b^2$],

BoxRatios \rightarrow {2*b*, 2*b*, *h*}, **PlotStyle** \rightarrow **Opacity**[0.5], **Mesh** \rightarrow None];

pt = **Graphics3D**[{**Red**, **Polygon**[{{0, 0, 0}, {*b, 0, 0*}, {0, 0, *h*}]}],

Blue, **Sphere**[{**xc, 0, zc**}, 0.07],

Green, **Sphere**[{0, 0, **Zc**}, 0.07]]];

Show[**ps, pt**, **Boxed** \rightarrow False, **AxesOrigin** \rightarrow {0, 0, 0}, **Ticks** \rightarrow None]

□

Механическая работа.

Работа при перемещении тела в силовом поле $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ вдоль кривой L выражается криволинейным интегралом

$$A = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

При движении в плоскости $z=0$ третье слагаемое в криволинейном интеграле отсутствует. Если траектория движения L задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула принимает вид

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt,$$

где t_0 и t_1 определяют положение начальной и конечной точек кривой.

Пример. Найти работу поля $\mathbf{F} = (x, y, x+y)$ при перемещении тела из начала координат $O(0,0)$ в точку $A(1,1)$ по кривой L_1 (отрезок прямой $y=x$) и по кривой L_2 (отрезок параболы $y^2 = x$).

y1[x_] = x ;

y2[x_] = \sqrt{x} ;

Work = **Integrate**[$x * \#$, $\{x, 0, 1\}$] + **Integrate**[$(x + \#)D[\#, x]$, $\{x, 0, 1\}$] &;

Work[y1[x]]

Work[y2[x]]

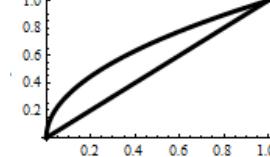
4

—
3

37

—
30

Plot[{**y1[x]**, **y2[x]**}, $\{x, 0, 1\}$, **PlotStyle** \rightarrow {{**Black**, **Thickness**[0.02]}}]



□

Момент инерции.

Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение ее массы на квадрат расстояния точки до этой оси.

Для двумерных тел плотностью $\rho(x, y)$ момент инерции относительно осей Ох и Оу вычисляется по формулам

$$Ix = \iint_D \rho(x, y) y^2 dx dy, \quad Iy = \iint_D \rho(x, y) x^2 dx dy$$

При вычислении моментов инерции геометрических фигур полагаем $\rho = 1$.

Пример. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Основание треугольника примем за ось Ox , а его высоту – за ось Oy . Абсциссы точек пересечения боковых сторон с осью Ox обозначим b_1 и b_2 ($b = b_2 - b_1$). Имеем

Clear[b1, b2, b, h];

$$\text{Ix0} = \text{Integrate}[y^2 \text{Boole}[\frac{x}{b1} + \frac{y}{h} \leq 1 \ \& \ \frac{x}{b2} + \frac{y}{h} \leq 1 \ \& \ y \geq 0], \{x, -\infty, \infty\}, \{y, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow h > 0 \ \& \ b1 < 0 \ \& \ b2 > 0];$$

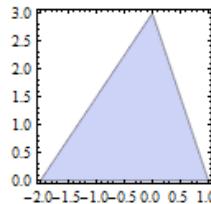
$$\text{Ix} = \text{Simplify}[\text{Ix0}] /. (b2 - b1) \rightarrow b$$

$$bh^3$$

$$\frac{12}{12}$$

$$b1 = -2; b2 = 1; h = 3;$$

$$\text{RegionPlot}[\frac{x}{b1} + \frac{y}{h} \leq 1 \ \& \ \frac{x}{b2} + \frac{y}{h} \leq 1 \ \& \ y \geq 0, \{x, b1, b2\}, \{y, 0, h\}]$$



Пример. Найти момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно его главных осей.

Clear[x, y, a, b];

$$\text{Ix} = \text{Integrate}[y^2 \text{Boole}[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1], \{x, -\infty, \infty\}, \{y, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow a > 0 \ \& \ b > 0]$$

$$\text{Iy} = \text{Integrate}[x^2 \text{Boole}[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1], \{x, -\infty, \infty\}, \{y, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow a > 0 \ \& \ b > 0]$$

$$\frac{1}{4} a b^3 \pi$$

$$\frac{1}{4} a^3 b \pi$$

□

3.9.2 Примеры решения задач распространения тепла

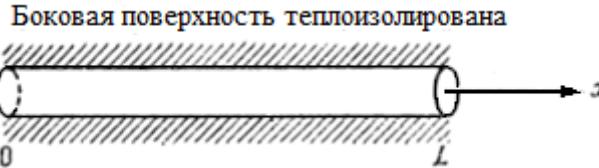
Задача о распространении тепла в тонком однородном неограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована (тепло может распространяться только вдоль оси x), математически формулируется следующим образом [3, 7]: найти ограниченную функцию $u(x, t)$ ($t > 0, -\infty < x < \infty$), удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0, -\infty < x < \infty) \quad (1)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2)$$

где $u(x,t)$ температура сечения x стержня в момент времени t (стержень тонкий, это значит, что температура точек любого поперечного сечения x одинакова).



Известно, что общее решение этой задачи представляется интегралом Пуассона следующего вида

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (3)$$

Если в этом интеграле сделать замену $\tau = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, то мы получим

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\tau) e^{-\tau^2} d\tau \quad (4)$$

Пример. Бесконечный стержень. Начальная температура всюду ноль, кроме отрезка $[-1,1]$, где она равна единице, т.е. $u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$. В

этом примере интеграл (4) вычисляется символьно и выражается через интеграл ошибок.

$a = .$;

$\varphi[x_] = \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq -1\}, \{1, x < 1\}\}, 0];$

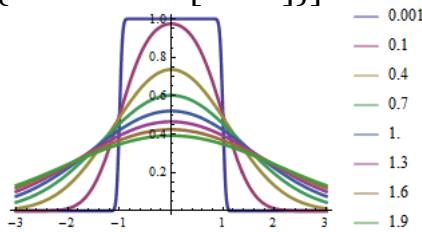
$u[x_, t_] = \text{FullSimplify}[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Integrate}[\varphi[x + 2a\sqrt{t}\tau] \text{Exp}[-\tau^2], \{\tau, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow t > 0 \ \& \ a > 0]]$

$$\frac{1}{2} \left(\text{Erf} \left[\frac{1-x}{2a\sqrt{t}} \right] + \text{Erf} \left[\frac{1+x}{2a\sqrt{t}} \right] \right)$$

На следующем рисунке представлены графики температуры $u(x,t)$ в различные моменты времени (коэффициент теплопроводности $a^2 = 1$).

$T = \text{Join}[\{0.001\}, \text{Table}[t, \{t, 0.1, 2, 0.3\}]]$; $a = 1$;

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[u[x, t], \{t, T\}]], \{x, -3, 3\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{T\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$



□

Рассмотрим задачу о распространении тепла в полуограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, а конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, т.е. $u(0,t)=0$ ($t \geq 0$). Решение этой задачи может быть получено методом продолжения, когда начальная температура $\varphi(x)$, заданная на положительной полуоси Ox , продолжается на отрицательную полуось нечетным образом. Можно показать [3], что решение в форме интеграла Пуассона (3) с любой нечетной функцией $\varphi(\xi)$ будет представлять решение задачи (1), (2), которое обращается в ноль при $x=0$. Оно, тем самым, при положительных x будет давать решение поставленной задачи для полубесконечного стержня.

Пример. Полубесконечный стержень. Начальная температура всюду равна 1, температура на левом конце равна нулю, т.е. $u(x,0)=1$ ($x \geq 0$), $u(0,t)=0$ ($t \geq 0$).

Вначале строим нечетную функцию $\varphi(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ и подставляем ее в

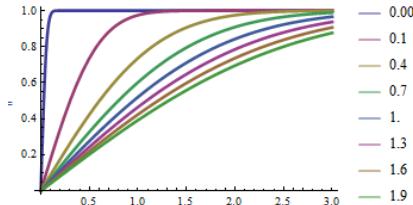
интеграл (4), который выражается интегралом ошибок. Затем строим графики функции $u(x,t)$ ($x \geq 0$) в некоторые фиксированные моменты времени.

```

 $\varphi[x_]:=$  Piecewise[{{{-1, x <= 0}}, 1];  $a = .$ ;
 $u[x_, t_]:=$  FullSimplify[ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  Integrate[ $\varphi[x + 2a\sqrt{t}\tau]$  Exp[- $\tau^2$ ],
 $\{\tau, -\infty, \infty\}$ , Assumptions  $\rightarrow$   $t > 0 \& \& a > 0$ ];
 $T =$  Join[{0.001}, Table[t, {t, 0.1, 2, 0.3}]];  $a = 1$ ;
Plot[Evaluate[Table[u[x, t], {t, T}]], {x, 0, 3}, PlotLegends  $\rightarrow$  {T},
PlotStyle  $\rightarrow$  {Thickness[0.01]}]

```

$$\operatorname{Erf}\left[\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right]$$



Результирующая последовательность графиков иллюстрирует процесс остывания полубесконечного стержня, левая граница которого поддерживается при нулевой температуре.

□

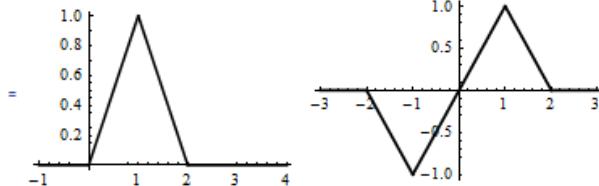
Пример. Полубесконечный стержень. Начальная температура везде 0, кроме отрезка у границы, где она имеет треугольную форму. Температура левого конца равна нулю, т.е. $u(0,t)=0$ ($t \geq 0$).

В следующем коде мы строим график функции $\varphi(x)$, которая представляет начальную температуру (следующий рисунок слева) и график функции $\Phi(x)$, которая является ее нечетным продолжением (следующий рисунок справа).

```

 $\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq 0\}, \{x, x < 1\}, \{2 - x, x < 2\}\}, 0];$ 
 $\text{Plot}[\varphi[x], \{x, -1, 4\}] \quad (* \text{график слева} *)$ 
 $\Phi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq -2\}, \{-2 - x, x < -1\}, \{x, x < 1\},$ 
 $\{2 - x, x < 2\}\}, 0];$ 
 $\text{Plot}[\Phi[x], \{x, -3, 3\}] \quad (* \text{график справа} *)$ 

```



Функцию $\Phi(x)$ используем в интеграле (4) для построения решения задачи. Интеграл вычисляется явно, но из – за длины мы не приводим полный вид его выражения.

$a = .;$

```

 $u[x, t] = \text{FullSimplify}[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Integrate}[\Phi[x + 2a\sqrt{t}\tau] \text{Exp}[-\tau^2],$ 
 $\{\tau, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow t > 0 \ \&& \ a > 0]]$ 
 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(2+x)^2}{4a^2 t}} (2a(-1 + e^{\frac{x}{a^2 t}})(1 + e^{\frac{x}{a^2 t}} - 2e^{\frac{3+2x}{4a^2 t}})\sqrt{t} + \dots)$ 

```

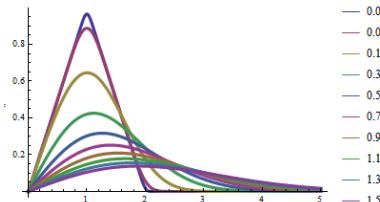
$T = \text{Join}[\{0.001, 0.01\}, \text{Table}[t, \{t, 0.1, 1.5, 0.2\}]];$

$a = 1;$

```

 $\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[u[x, t], \{t, T\}]], \{x, 0, 5\},$ 
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{T\}]$ 

```



□

Пусть начальная температура полубесконечного стержня равна 0 ($u(x, 0) = 0$), а на его левом конце задана температура $u(0, t) = \psi(t)$. Решение этой задачи имеет вид ([2], ф.28 стр. 541)

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)}} d\tau$$

Сделав замену переменной интегрирования $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t - \tau}}$, выражение для функции u приведем к следующему удобному для вычислений виду

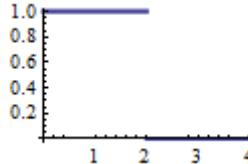
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \psi(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}) e^{-\xi^2} d\xi \quad (5)$$

При вычислениях интегралов по этой формуле следует обращать внимание на особенность решения при $t=0$. Но формула «работоспособна» для любых $t > \tau > 0$, где τ может быть сколь угодно малым положительным числом.

Пример. Полубесконечный стержень. Начальная температура всюду 0, температура на левом конце равна $u(0, t) = \psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$.

Вначале создаем функцию $\psi(t)$, представляющую граничный режим.

$\psi[t] = \text{Piecewise}[\{\{0, t < 0\}, \{1, t \leq 2\}\}, 0]; a = .;$
 $\text{Plot}[\psi[t], \{t, 0, 4\}]$



Теперь строим решение, используя интеграл (5).

$u[x, t] = \text{FullSimplify}[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Integrate}[\psi[t - \frac{x^2}{4a^2 \xi^2}] \text{Exp}[-\xi^2], \{\xi, \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \infty\},$
 $\text{Assumptions} \rightarrow t > 0 \& \& a > 0 \& \& x > 0]$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\text{Erf}[\frac{x}{2a\sqrt{-2+t}}] - \text{Erf}[\frac{x}{2a\sqrt{t}}]) & a > 0 \& \& t > 2 \& \& x > 0 \\ \frac{1}{2} \text{Erfc}[\frac{x}{2a\sqrt{t}}] & \text{True} \end{cases}$$

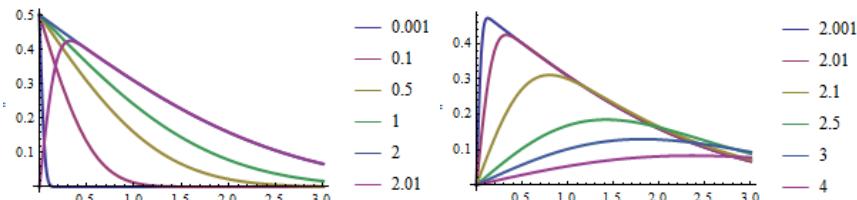
Решение получено в форме кусочной функции. Теперь построим графики решения для моментов времени $t \leq 2$ и для моментов $t > 2$.

$T = \{0.001, 0.1, 0.5, 1, 2, 2.01\}; a = 1;$

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[u[x, t], \{t, T\}]], \{x, 0, 3\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{T\},$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$ (* левый рисунок *)

$T = \{2.001, 2.01, 2.1, 2.5, 3, 4\};$

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{Table}[u[x, t], \{t, T\}]], \{x, 0, 3\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \{T\},$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$ (* правый рисунок *)



Скачкообразное изменение граничной температуры в момент времени $t=2$ меняет качественную картину распределения температуры у торца стержня после этого момента.

□

Пример. Полубесконечный стержень. Начальная температура всюду 0, температура на левом конце периодически меняется по треугольному закону.

Определим периодическую пилообразную непрерывную кусочно-линейную функцию

$$stx(x, w) = \left| x - w \left[\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \right] \right| \text{ или } stc(x, w) = \frac{w}{2\pi} \arccos \left(\cos \frac{2\pi x}{w} \right), \quad (6)$$

где w является периодом этой функции, а квадратные скобки $[x]$ обозначают функцию взятия наибольшего целого, не превосходящего x ,

$$stc[x, w] = \frac{w}{2\pi} \text{ArcCos} \left[\text{Cos} \left[\frac{2\pi x}{w} \right] \right];$$

Plot[stc[x, 2], {x, -2, 6}, AspectRatio → Automatic]



Используем ее в качестве граничного значения $u(0, t) = \psi(t) = stc(t, 2)$. Поскольку аналитически интеграл (5) не вычисляется, будем его считать численно.

a = 1; $\psi[t] := stc[t, 2];$

$$u[x, t] := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{NIntegrate} \left[\psi[t - \frac{x^2}{4a^2 \xi^2}] \text{Exp}[-\xi^2], \{\xi, \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \infty\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4 \right];$$

AccuracyGoal → 4, PrecisionGoal → 4];

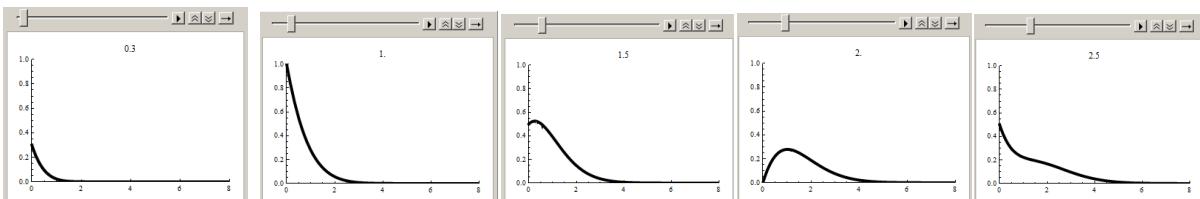
Для построения анимации используем функцию **ListAnimate**. Вначале создаем список графиков **lt**, которые будут представлять кадры анимации. Имейте ввиду, что создание списка **lt** займет некоторое время.

lt = Table[Plot[u[x, t], {x, 0, 8}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.01]}], {t, 0.1, 8, 0.1}];

Теперь строим анимацию.

ListAnimate[lt, AnimationRunning → False]

На следующем рисунке представлено несколько кадров анимации – графиков распределения температуры в полубесконечном стержне в моменты времени $t = 0.3, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$



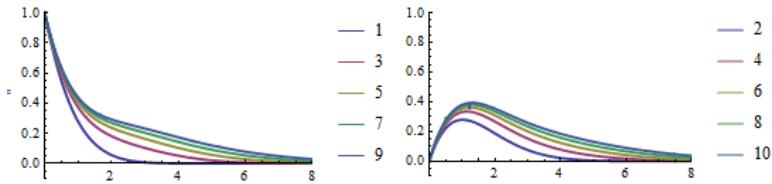
Графики распределения температуры внутри стержня через интервалы времени $\Delta t = 2$ имеют похожую форму. На следующем рисунке слева приведены графики температуры в моменты $t = 1, 3, 5, 7, 9$ и на рисунке справа – в моменты $t = 2, 4, 6, 8, 10$.

Plot[{u[x, 1], u[x, 3], u[x, 5], u[x, 7], u[x, 9]}, {x, 0, 8},

PlotRange → {{0, 8}, {-0.1, 1}}, PlotLegends → {1, 3, 5, 7, 9}]

Plot[{u[x, 2], u[x, 4], u[x, 6], u[x, 8], u[x, 10]}, {x, 0, 8},

PlotRange → {{0, 8}, {-0.1, 1}}, PlotLegends → {2, 4, 6, 8, 10}]



Графики в более поздние моменты времени имеют более высокий профиль. \square

Решение уравнения теплопроводности для стержня конечной длины l , когда начальная температура задана функцией $\varphi(\xi)$, а концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, можно находить по формуле [5]

$$u(x, t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \varphi(\xi) \left(\Theta_3\left(\pi \frac{\xi - x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) - \Theta_3\left(\pi \frac{\xi + x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) \right) d\xi, \quad (7)$$

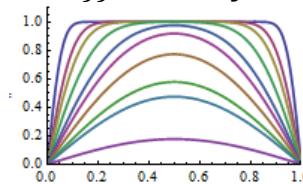
где $\Theta_3(z, q)$ является тета функция 3-го порядка ([4] стр.334). В пакете *Mathematica* она реализуется функцией `EllipticTheta[3, z, q]`.

Пример. Конечный стержень длины l . Температура концов ноль. Начальная температура единица. Вычисления интеграла по формуле (7) реализуем численно.

$l = 1; a = 1; \varphi[x_] := 1;$

$$\begin{aligned} \theta3m[\tau, x, t] &:= \text{EllipticTheta}[3, \pi \frac{\tau - x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}] \\ \theta3p[\tau, x, t] &:= \text{EllipticTheta}[3, \pi \frac{\tau + x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}] \\ u[x, t] &:= \frac{1}{2l} \text{NIntegrate}[\varphi[\tau] (\theta3m[\tau, x, t] - \theta3p[\tau, x, t]), \{\tau, 0, l\}, \\ &\quad \text{AccuracyGoal} \rightarrow 6, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 6] \end{aligned}$$

$\text{Plot}[\{u[x, 0.001], u[x, 0.003], u[x, 0.005], u[x, 0.01], u[x, 0.02],$
 $u[x, 0.03], u[x, 0.05], u[x, 0.08], u[x, 0.1], u[x, 0.2]\}, \{x, 0, l\},$
 $\text{PlotRange} \rightarrow \{[0, 1], [0, 1.1]\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$



Для решения уравнения теплопроводности на конечном отрезке можно использовать классический метод Фурье [3]. Для рассмотренной нами задачи, когда начальная температура постоянна $\varphi(x) = u_0$, а на обеих границах поддерживается нулевая температура, решение Фурье имеет вид ([6], стр. 54)

$$u = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2}\right)$$

Построим манипулятор с графиками температуры в стержне в различные моменты времени.

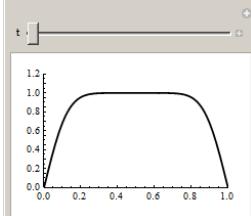
$$u0 = 1; L = 1; a = 1;$$

$$u[t, x] := \frac{4 u0}{\pi} *$$

$$\text{Sum}\left[\frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right] \exp\left[-\frac{a(2n+1)^2\pi^2 t}{L^2}\right], \{n, 0, 30\}\right]$$

Manipulate[

$$\text{Plot}[u[t, x], \{x, 0, L\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{0, L\}, \{0, 1.1\}\}], \{t, 0.0001, 0.5\}]$$



Обратите внимание, что для ускорения вычислений мы использовали частичную сумму ряда, представляющего решение (суммировали до $n=30$). □

Пример. Конечный стержень длины l . Начальная температура равна нулю. На границах поддерживаются постоянные температуры u_1 и u_2 .

Для поставленной задачи решение Фурье имеет вид ([7], стр. 98, 101, 106)

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u_2 - u_1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2 t}{l^2}\right)$$

Представим решение в различные моменты времени, используя манипулятор.

$$L = 1; a = 1; w1 = 1; w2 = 3;$$

$$T = \text{Sequence}[\text{Join}[\{0.001\}, \text{Table}[0.01 * i, \{i, 50\}]]];$$

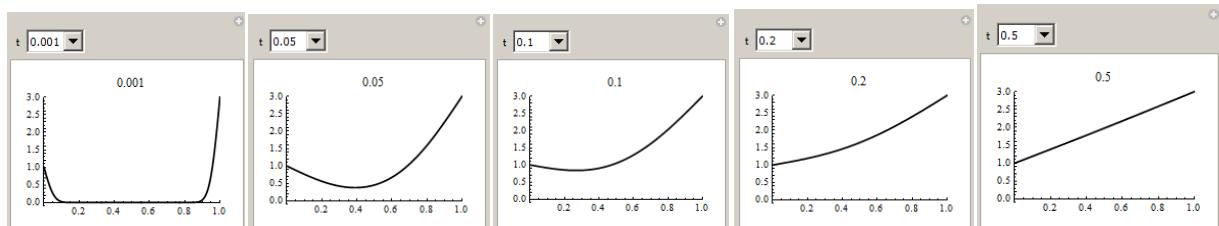
DynamicModule[{u},

$$u[t, x] := w1 + (w2 - w1) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n w2 - w1}{n} \sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right] \exp\left[-\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}\right];$$

Manipulate[Plot[u[t, x], {x, 0, L}],

PlotRange -> \{\{0, L\}, \{-0.1, w2\}\}, PlotLabel -> t], \{t, T\}]

На следующем рисунке представлен манипулятор с графиками решения в моменты времени $t = 0.001, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$.



Для ускорения вычислений мы использовали частичную сумму ряда с максимальным значением $n=50$.

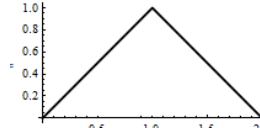
В моменты времени $t \geq 0.4$ графики распределения температуры практически не изменяются и совпадают с последним графиком. Это значит,

что в стержне установилась температура $u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x$ и начиная с момента $t=0.4$ влияние начального условия пренебрежимо мало. \square

Пример. Конечный стержень длины l . Температура концов ноль. Начальная температура имеет форму треугольника $\varphi(x) = 1 - |x - 1|$.

$$\varphi_0[x] = 1 - \text{Abs}[x - 1];$$

Plot[\varphi_0[x], {x, 0, 2}, **AspectRatio** \rightarrow Automatic]



В этом примере мы используем решение для бесконечного стержня (4), используя метод продолжения. Нам надо построить нечетное периодическое продолжение начальной функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0, 2]$ на всю вещественную ось. Для этого используем функцию $stc(x, w)$, определяемую формулой (6). Если L длина отрезка, то соответствующее продолжение будет иметь вид $\varphi(x) = (-1)^{\lfloor x/L \rfloor} stc(x, L)$.

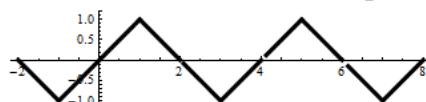
$$stc[x, w] = \text{Abs} \left[x - w \text{Floor} \left[\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \right] \right];$$

Plot[stc[x, 2], {x, -2, 6}, **AspectRatio** \rightarrow Automatic]



$$\varphi[x] = (-1)^{\text{Floor}[x/2]} stc[x, 2];$$

Plot[\varphi[x], {x, -2, 8}, **AspectRatio** \rightarrow Automatic]



Подставив полученную функцию в (4), мы получим решение для конечного отрезка. Строим решение

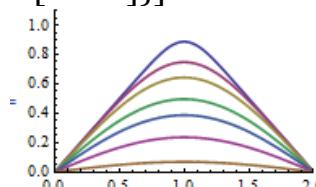
$$a = 1;$$

$$u[x, t] := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{NIntegrate}[\varphi[x + 2 a \sqrt{t} \tau] \text{Exp}[-\tau^2], \{\tau, -\infty, \infty\},$$

AccuracyGoal \rightarrow 4, **PrecisionGoal** \rightarrow 4,
Method \rightarrow "ClenshawCurtisRule"]

и его графики в разные моменты времени

Plot[\{u[x, 0.01], u[x, 0.05], u[x, 0.1], u[x, 0.2], u[x, 0.3],
u[x, 0.5], u[x, 1]\}, {x, 0, 2}, **PlotRange** \rightarrow {{0, 2}, {0, 1.1}},
PlotStyle \rightarrow {Thickness[0.01]}]



В работе [7] стр. 103 приводится решение в рядах для области $-l \leq x \leq l$ с начальной температурой $u_0(l - |x|/l)$ и нулевой температурой концов

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \exp \left(-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{4l^2} \right)$$

Используем его для сравнения с решением, полученным выше.

u0 = 1; L = 1; a = 1;

u[x_, t_] :=

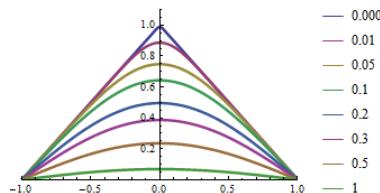
$$\frac{8 u_0}{\pi^2} \text{Sum} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} \text{Cos} \left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right] \text{Exp} \left[-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{4L^2} \right], \{n, 0, 30\} \right]$$

T = {0.0001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1};

Plot[Evaluate[Table[u[x, t], {t, T}]], {x, -1, 1},

PlotRange → {{-1, 1}, {0, 1.1}}, PlotStyle → {Thickness[0.01]},

PlotLegends → T]



Для ускорения вычислений мы использовали частичную сумму ряда, представляющего решение (суммировали до $n=30$).

Когда решение в виде ряда известно, то вычисления происходят значительно быстрее.

□

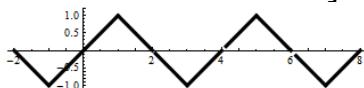
Пример. Конечный стержень длины L . Температура левого конца ноль. Правый конец теплоизолирован. Начальная температура линейная функция. Условие теплоизолированности правого конца математически формулируются как $\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$. Линейность начальной функции означает, что $u(x, 0) = k x$.

Продолжим начальную функцию четно относительно точки $x=L$ на отрезок $[L, 2L]$, затем полученную функцию с отрезка $[0, 2L]$ продолжим нечетно на отрезок $[-2L, 0]$, и затем с отрезка $[-2L, 2L]$ продолжим периодически на всю ось. Описанное построение в п. 3.4.5 (пример 5.5) мы назвали четно – нечетным периодическим продолжением функции. Если полученную функцию $\Phi(x)$ подставить в (4), то получим решение нашей краевой задачи.

Пусть $k=1$. Четно – нечетное продолжение линейной функции $y = x$ с отрезка $[0, L]$ на всю ось имеет вид $\varphi(x) = (-1)^{\lfloor x/L \rfloor} \text{stc}(x, L)$, совпадающий с функцией $\varphi(x)$ из предыдущего примера.

φ[x_] = (-1)^Floor[x/2]stc[x, 2];

Plot[φ[x], {x, -2, 8}, AspectRatio → Automatic]



Эта функция имеет тот же вид, что и в предыдущем примере, только решение теперь надо рассматривать на отрезке $[0,1]$, а не $[0,2]$. Имеем

$a = 1$;

$$u[x, t] := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{NIntegrate}[\varphi[x + 2a\sqrt{t}\tau] \text{Exp}[-\tau^2], \{\tau, -\infty, \infty\}],$$

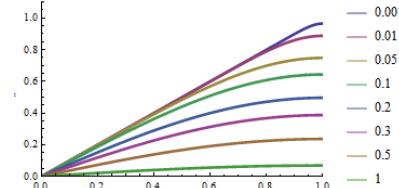
AccuracyGoal $\rightarrow 4$, **PrecisionGoal** $\rightarrow 4$, **Method** \rightarrow "ClenshawCurtisRule"]

$T = \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1\}$;

Plot[$\{u[x, 0.001], u[x, 0.01], u[x, 0.05], u[x, 0.1], u[x, 0.2], u[x, 0.3],$

$u[x, 0.5], u[x, 1]\}, \{x, 0, 1\}$, **PlotRange** $\rightarrow \{\{0, 1\}, \{0, 1.1\}\}$,

PlotStyle $\rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}$, **PlotLegends** $\rightarrow T$]



Касательная к графику решения на правой границе в любой момент времени горизонтальна, т.е. $u'_x(L, t) = 0$. Это означает, что тепловой поток равен нулю.

□

Пример. Конечный стержень длины l . Начальная температура ноль. Температура левого конца равна 1, правого – ноль. В соответствии с формулой (7) функция вида

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2l} \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \left(\Theta_3\left(\pi \frac{\xi - x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) - \Theta_3\left(\pi \frac{\xi + x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) \right) d\xi$$

представляет решение уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями и начальной температурой $u(x, 0) = 1 - x/l$. Тогда функция

$u(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \tilde{u}(x, t)$ будет представлять решение нашей задачи, поскольку она

удовлетворяет уравнению теплопроводности, на левом конце принимает значение 1, на правом $x=l$ – принимает значение 0, и значение функции $u(x, t)$ при $t=0$ для всех $0 < x < l$ будет 0. Т.о. общее решение нашей задачи будет иметь вид

$$u(x, t) = 1 - \frac{x}{l} - \frac{1}{2l} \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \left(\Theta_3\left(\pi \frac{\xi - x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) - \Theta_3\left(\pi \frac{\xi + x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right) \right) d\xi$$

Построим графики распределения температуры в стержне для этой задачи.

$$l = 1; a = 1; \varphi[x] := 1 - \frac{x}{l};$$

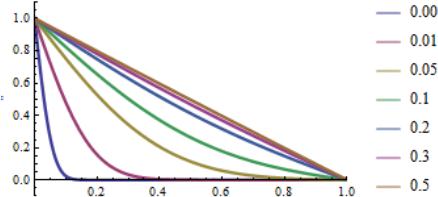
$$\theta3m[\tau, x, t] := \text{EllipticTheta}\left[3, \pi \frac{\tau - x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right]$$

$$\theta3p[\tau, x, t] := \text{EllipticTheta}\left[3, \pi \frac{\tau + x}{2l}, e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right]$$

$$u[x, t] := 1 - \frac{x}{l} - \frac{1}{2l} \text{NIntegrate}[\varphi[\tau] (\theta 3 m[\tau, x, t] - \theta 3 p[\tau, x, t]), \{\tau, 0, l\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 6, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 6]$$

$$T = \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5\};$$

$$\text{Plot}[\{u[x, 0.001], u[x, 0.01], u[x, 0.05], u[x, 0.1], u[x, 0.2], u[x, 0.3], u[x, 0.5]\}, \{x, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{0, 1\}, \{-0.1, 1.1\}\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow T]$$



В моменты времени $t \geq 0.5$ графики распределения температуры практически не изменяются и совпадают с последним графиком. Это значит, что в стержне установилась температура $u(x, t) = 1 - x$ и начиная с момента $t=0.5$ влияние начального условия пренебрежимо мало. \square

Решение задачи распространения тепла в неограниченном во всех направлениях двумерном теле, имеющего в нулевой момент времени температуру $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, дается следующей формулой.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta$$

Если начальная температура такова, что может быть представлена в виде $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, то этот интеграл преобразуется в произведение двух интегралов

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\eta) e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\eta$$

Если в них сделать замену $\tau = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$ и $\nu = \frac{\eta - y}{2a\sqrt{t}}$, то мы получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x + 2a\sqrt{t}\tau) e^{-\tau^2} d\tau \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y + 2a\sqrt{t}\nu) e^{-\nu^2} d\nu \quad (8)$$

Пример. Бесконечная плоскость. Начальная температура равна нулю везде, кроме области квадрата $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, в которой она равна единице.

Поскольку $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$, где $\varphi_i(u) = \begin{cases} 1, & -1 \leq u \leq 1 \\ 0, & |u| > 1 \end{cases}$ ($i = 1, 2$), то

решение может быть представлено в форме (8). Имеем

$$\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq -1\}, \{1, x < 1\}\}, 0];$$

$$a = .;$$

$$u[x, t] = \text{FullSimplify}[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Integrate}[\varphi[x + 2a\sqrt{t}\tau] \text{Exp}[-\tau^2], \{\tau, -\infty, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow t > 0 \text{ \&& } a > 0]]$$

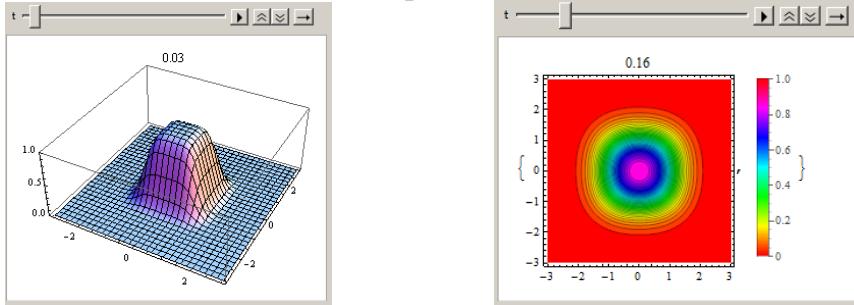
$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{Erf} \left[\frac{1-x}{2a\sqrt{t}} \right] + \operatorname{Erf} \left[\frac{1+x}{2a\sqrt{t}} \right] \right)$$

Теперь построим анимацию решения. Вначале представим решение как поверхность (панель анимации показана на следующем рисунке слева).

```
a = 1; U[x_, y_, t_] := u[x, t] * u[y, t];
T = Sequence[Join[{0.001}, Table[0.01 * i, {i, 80}]]];
Animate[Plot3D[Evaluate[U[x, y, t]], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  PlotPoints -> 31, PlotRange -> {0, 1}, Mesh -> Full,
  PlotLabel -> t], {t, T}, AnimationRunning -> False]
```

Во второй панели анимации представим решение контурным графиком (панель анимации показана на следующем рисунке справа).

```
Animate[{ContourPlot[U[x, y, t], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Contours -> 31,
  ColorFunction -> Hue, ColorFunctionScaling -> False,
  PlotPoints -> 31, PlotRange -> Full, PlotLabel -> t],
  BarLegend[{(Hue[#]&), {0, 1}}]}, {t, T}, AnimationRunning -> False]
```



□

3.9.3 Одномерные колебания

Поперечные колебания струны, продольные колебания упругого стержня и многие другие явления описываются одномерным волновым уравнением

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

Для однозначного определения решения необходимо задать начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, t) = \psi(x) \quad (2)$$

и граничные условия, если у колеблющегося объекта имеются границы.

Известно общее решение Даламбера задачи (1), (2) для неограниченной прямой [2]

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3)$$

($-\infty < x < \infty, t \geq 0$). Формула (3) при любых функциях $\varphi(x), \psi(x)$ и $f(x, t)$ дает решение уравнения (1).

Основная идея построения интегрального решения первой краевой задачи для одномерного волнового уравнения (1) на конечном отрезке $[0, L]$ при начальных условиях (2) и нулевых граничных условиях $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$ $t \geq 0$ состоит в следующем. В соответствии с методом продолжения выполняется нечетное периодическое продолжение начальных

функций $\varphi(x), \psi(x)$ и $f(x, t)$ на всю ось Ox [8]. Подстановка продолженных таким образом функций в (3) дает функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения колебаний (1), удовлетворяющую на отрезке $[0, L]$ начальным условиям (2) и обращающуюся в ноль на концах этого отрезка. Известно [8, 9], что результирующая формула может быть представлена в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left((-1)^{\left[\frac{x+at}{L} \right]} \varphi(stc(x+at, 2L)) + (-1)^{\left[\frac{x-at}{L} \right]} \varphi(stc(x-at, 2L)) \right) + \\ + \frac{1}{2a} \int_{stc(x-at, 2L)}^{stc(x+at, 2L)} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{stc(x-a(t-\tau), 2L)}^{stc(x+a(t-\tau), 2L)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (0 \leq x \leq L, t \geq 0) \quad (4)$$

где квадратные скобки $[z]$ используются для обозначения целой части числа z , а функция $stc(x, w)$ представляет периодическую пилообразную непрерывную кусочно-линейную функцию, определяемую формулой (2.6). Приведем ее здесь еще раз.

$$stx(x, w) = \left| x - w \left[\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \right] \right| \quad \text{или} \quad stc(x, w) = \frac{w}{2\pi} \arccos \left(\cos \frac{2\pi x}{w} \right), \quad (5)$$

В части 2 п.3.4.5 мы рассмотрели несколько примеров, в которых полагали начальную скорость равной нулю $u'_t(x, t) = \psi(x) = 0$ и $f(x, t) = 0$. Если положить начальное смещение и внешнее усилие равными нулю $\varphi(x) = 0$ и $f(x, t) = 0$, то решение примет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{stc(x-at, 2L)}^{stc(x+at, 2L)} \psi(\alpha) d\alpha \quad (0 \leq x \leq L, t \geq 0). \quad (6)$$

Во всех примерах этого пункта будем полагать скорость распространения колебаний равной единице $a = 1$.

Пример. Конечная струна длины $L=1$, закрепленная на концах. Начальное смещение ноль. Начальная скорость в форме ступеньки. Струна возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщающего ей начальное распределение скоростей

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < c - \delta \\ v_0, & c - \delta \leq x \leq c + \delta, \\ 0, & c + \delta < x \leq L \end{cases}$$

где c – координата середины точки удара, δ – полуширина ступеньки.

Пусть начальная скорость всюду ноль, кроме отрезка $[0.4, 0.6]$, где она равна единице, т.е. $u'_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & x < 0.4 \vee x > 0.6 \end{cases}$. Решение будем строить, используя формулу (6). Определим функцию $stc(x, w)$.

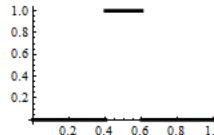
$$stc[x, w] = \text{Abs} \left[x - w \text{Floor} \left[\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \right] \right];$$

Plot[stc[x, 2], {x, -2, 6}, AspectRatio → Automatic]



Создадим функцию начальной скорости $\psi(x)$.

$\psi[x_] = \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq 0.4\}, \{1, x < 0.6\}\}, 0]$;
 $\text{Plot}[\psi[x], \{x, 0, 1\}]$

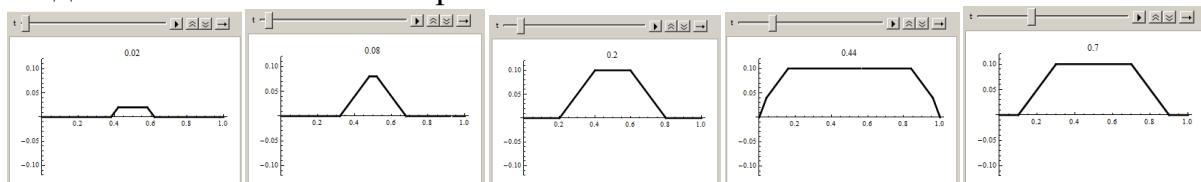


Создаем функцию решения и строим анимацию.

$a = .; v[x_, t_] = \frac{1}{2a} \text{Simplify}[\text{Integrate}[\psi[\tau], \{\tau, \alpha, \beta\}],$
 $\text{Assumptions} \rightarrow \alpha > 0 \ \&\& \ \beta > 0]$
 $u[x_, t_] = v[x, t] /. \{\alpha \rightarrow \text{stc}[x - at, 2L], \beta \rightarrow \text{stc}[x + at, 2L]\};$
 $a = 1; L = 1; T = \text{Range}[0, 1.98, 0.02];$
 $\text{Animate}[$

$\text{Plot}[u[x, t], \{x, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-0.12, 0.12\}, \text{PlotLabel} \rightarrow t],$
 $\{t, T\}, \text{AnimationRunning} \rightarrow \text{False}]$

На следующем рисунке показаны профили струны в некоторые последовательные моменты времени.

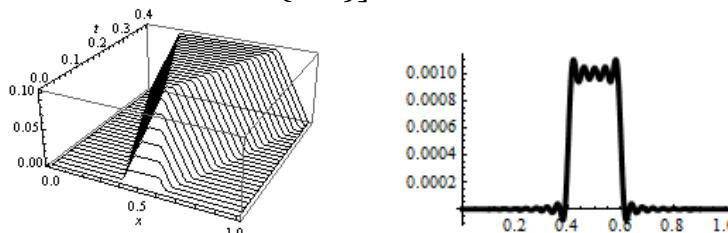


Для этой краевой задачи в литературе приводится решение в виде ряда Фурье ([2], стр. 156-157)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 L}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{L} \sin \frac{k\pi \delta}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi at}{L}$$

Вод код для построения формы струны с помощью ряда.

$a = 1; L = 1; v0 = 1; \delta = 0.1; c = 0.5;$
 $uf[x_, t_] = \frac{4v0L}{\pi^2 a} \text{Sum}[\frac{1}{k^2} \text{Sin}[\frac{k\pi c}{L}] \text{Sin}[\frac{k\pi \delta}{L}] \text{Sin}[\frac{k\pi x}{L}] \text{Sin}[\frac{k\pi at}{L}], \{k, 1, 50\}]$
 $\text{Plot3D}[uf[x, t], \{x, 0, L\}, \{t, 0, 0.4\}, \text{Mesh} \rightarrow \{0, 25\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 40,$
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \text{None}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, t\}]$



На предыдущем рисунке слева представлены профили струны в дискретные моменты времени $0 \leq t \leq 0.4$ (период колебаний равен 2). Как видим, решения полученные обоими способами, совпадают. Но во втором решении мы ограничили сумму 50 – ю слагаемыми, и поэтому оно является приближенным.

Если построить график решения в близкий к нулевому момент времени, то осцилляции, создаваемые частичной суммой ряда Фурье, будут заметны.

Plot[uf[x, 0.001], {x, 0, 1}] (* предыдущий рисунок справа *)

Это связано с тем, что точное (обобщенное) решение принадлежит классу C^0 , а не C^∞ , которому принадлежит частичная сумма ряда Фурье.

□

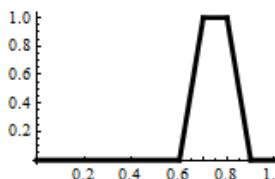
Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальное смещение ноль. Внешнее усилие ноль. Начальная скорость в форме трапеции.

Создаем функцию $\psi(x)$.

Clear[$\alpha, \beta, a, L, x, w, \psi, v, u$];

$\psi[x_] = 10 \text{ Piecewise}[\{\{0, x \leq 0.6\}, \{x - 0.6, x < 0.7\}, \{0.1, x \leq 0.8\}, \{0.9 - x, x \leq 0.9\}\}, 0];$

Plot[$\psi[x]$, {x, 0, 1}]



Поскольку функция **Integrate** умеет работать с кусочными функциями, то при построении решения будем использовать ее (а не **NIntegrate**).

$v[x_, t_] = \frac{1}{2a} \text{Simplify}[\text{Integrate}[\psi[\tau], \{\tau, \alpha, \beta\}],$

Assumptions :> $\alpha > 0 \ \&& \ \beta > 0$];

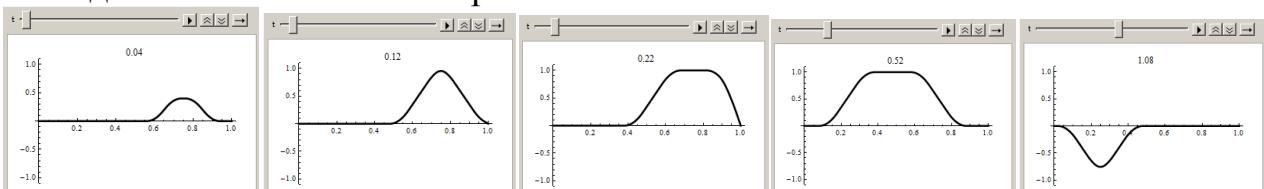
$u[x_, t_] = v[x, t] /. \{\alpha \rightarrow \text{stc}[x - at, 2L], \beta \rightarrow \text{stc}[x + at, 2L]\};$

$a = 1; L = 1; T = \text{Range}[0, 1.98, 0.02];$

Animate[

Plot[$u[x, t]$, {x, 0, 1}, PlotRange \rightarrow {-0.12, 0.12}, PlotLabel \rightarrow t],
{ t, T }, AnimationRunning \rightarrow False]

На следующем рисунке показана панель анимации в некоторые последовательные моменты времени.



Здесь мы использовали код, создающий функцию **stc**, из предыдущего примера. Заметим, что при создании функции решения $u(x, t)$ можно было бы использовать функцию **NIntegrate**, например так

$u[x_, t_] := (\alpha = \text{stc}[x - at, 2L]; \beta = \text{stc}[x + at, 2L];$

$\frac{1}{2a} \text{NIntegrate}[\psi[\tau], \{\tau, \alpha, \beta\}]);$

Однако в этом случае вычисления будут выполняться значительно дольше. □

При решении одномерного волнового уравнения на конечном отрезке часто используется метод разделения переменных. Рассмотрим, к каким формулам приводит этот метод при решении 1 – й краевой задачи для конечной струны.

Пусть $f(x,t)=0$, начальные условия имеют вид (2)

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u'_t(x,t)=\psi(x) \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2)$$

границные условия равны 0 ($u(0,t)=u(L,t)=0$) и согласованы с начальными условиями, т.е. $\varphi(0)=\varphi(L)=0$. Разложим функции $\varphi(x), \psi(x)$ на отрезке $[0,L]$ в ряд по синусам.

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n \pi x}{L}, \text{ где } \alpha_n=\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n \pi x}{L} d x$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n \pi x}{L}, \text{ где } \beta_n=\frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n \pi x}{L} d x$$

Тогда функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}+\frac{\beta_n L}{n \pi a} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{n \pi a t}{L} \quad (7)$$

будет представлять решение уравнения (1), удовлетворять начальным условиям (2) и нулевым граничным условиям. То, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и нулевым граничным условиям следует из того, что каждое слагаемое в (7) удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Выполнение начальных условий проверяется подстановкой $t=0$ в выражение (7) и в ее производную по t . Действительно, из (7) при $t=0$ сразу получаем

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n \pi x}{L}=\varphi(x). \text{ Далее из (7) имеем}$$

$$u'_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n L}{n \pi a} \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}\left(\frac{n \pi a}{L}\right) \bigg|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n \pi x}{L}=\psi(x)$$

Таким образом, алгоритм решения уравнения колебаний конечной струны с закрепленными концами и нулевым внешним усилием состоит в следующем. Надо разложить начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ на отрезке $[0,L]$ в ряд по синусам и, зная коэффициенты α_n, β_n построить ряд (7). Напишем общую процедуру решения уравнения колебаний конечной струны с закрепленными концами, реализующую формулу (7). Имеем

Clear[solFourier]

solFourier = Function[{ $x, t, a, L, \varphi, \psi, n$ }, Block[{ $f\varphi, f\psi, g\varphi, g\psi$ },

$f\varphi = Chop[N[FourierSinSeries[\varphi[x], x, n,$

FourierParameters $\rightarrow \{1, \pi/L\}$]]];

$f\psi = Chop[N[FourierSinSeries[\psi[x], x, n,$

FourierParameters $\rightarrow \{1, \pi/L\}$]]];

$g\varphi = f\varphi/. \{Sin[w_] \rightarrow Sin[w]Cos[\frac{w}{x}at]\};$

$g\psi = f\psi/. \{Sin[w_] \rightarrow Sin[w]Sin[\frac{w}{x}at]/(w/x)\};$

$g\varphi + g\psi\}];$

Функция **solFourier** возвращает выражение частичной суммы (7), приближающей решение $u(x,t)$. Она принимает следующие аргументы:

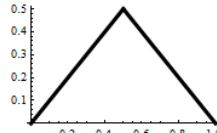
идентификаторы/имена переменных x и t , значение параметра a из уравнения (1), длину отрезка L , функции начального смещения ϕ и начальной скорости ψ (не выражения), количество членов n частичной суммы Фурье. Протестируем созданную функцию.

Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальная скорость 0. Начальное смещение в форме треугольника.

Создаем функцию смещения $\phi(x)$.

$\phi[x] = \text{Piecewise}[\{\{x, x \leq 0.5\}, 1 - x\};$

$\text{Plot}[\phi[x], \{x, 0, 1\}]$

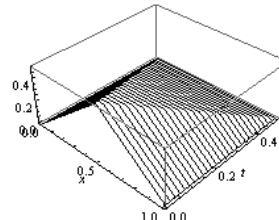


Создаем функцию решения $u(x,t)$ и строим график

$u[x, t] = \text{solFourier}[x, t, 1, 1, \phi, 0\&, 50];$

$\text{Plot3D}[u[x, t], \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 0.5\}, \text{Mesh} \rightarrow \{0, 25\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 40,$

$\text{PlotStyle} \rightarrow \text{None}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, t\}]$



Обратите внимание на то, как мы задаем нулевую скорость – в виде чистой функции 0&.

Сравните с решением этой задачи в п.3.4.5 (пример 5.4) предыдущей части. Решения идентичны, если не обращать внимание на то, что частичная сумма представляет приближенное решение. Выбор количества членов ряда равное 50 делает погрешность вычислений малой.

□

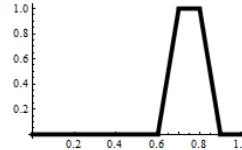
Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальное смещение ноль.

Начальная скорость в форме трапеции.

$\psi[x] = 10 \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq 0.6\}, \{x - 0.6, x < 0.7\}, \{0.1, x \leq 0.8\},$

$\{0.9 - x, x \leq 0.9\}\}, 0];$

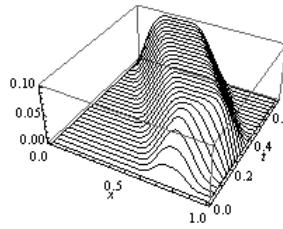
$\text{Plot}[\psi[x], \{x, 0, 1\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Black}, \text{Thickness}[0.02]\}]$



$u[x, t] = \text{solFourier}[x, t, 1, 1, 0\&, \psi, 50];$

$\text{Plot3D}[u[x, t], \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 0.7\}, \text{Mesh} \rightarrow \{0, 25\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 40,$

$\text{PlotStyle} \rightarrow \text{None}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, t\}]$

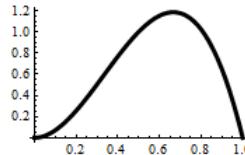


Сравните с решением этой задачи, полученной нами в этом пункте ранее. Решения идентичны. □

Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальная скорость 0. Начальное смещение в форме кубической параболы.

$$\varphi[x] = 8x^2(1-x);$$

Plot[\varphi[x], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.02]}]



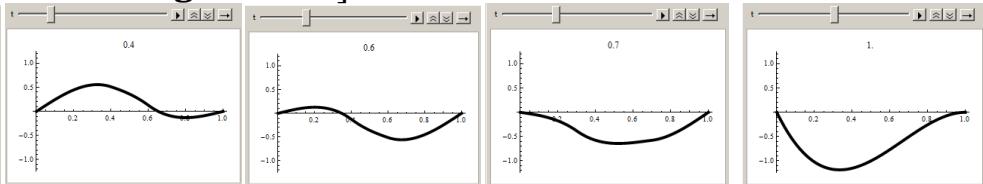
L = 1; u[x, t_] = solFourier[x, t, 1, L, \varphi, 0&, 50];

T = Range[0, 1.975, .025];

Animate[Plot[u[x, t], {x, 0, L}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.015]},

PlotRange → {-1.25, 1.25}, PlotLabel → t],

{t, T}, AnimationRunning → False]



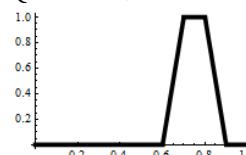
На рисунке показана панель анимации в моменты времени $t = 0.25, 0.4, 0.6, 0.7, 1.0$. □

Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальная скорость 0. Начальное смещение в форме трапеции.

$$\varphi[x] = 10 \text{Piecewise}[\{\{0, x \leq 0.6\}, \{x - 0.6, x < 0.7\}, \{0.1, x \leq 0.8\},$$

$$\{0.9 - x, x \leq 0.9\}\}, 0];$$

Plot[\varphi[x], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.02]}]



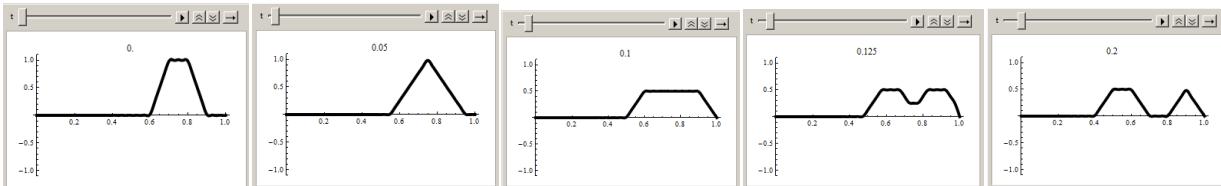
L = 1; u[x, t_] = solFourier[x, t, 1, L, \varphi, 0&, 50];

T = Range[0, 1.975, .025];

Animate[Plot[u[x, t], {x, 0, L}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.015]},

PlotRange → {-1.1, 1.1}, PlotLabel → t],

{t, T}, AnimationRunning → False]



На рисунке показана панель анимации в моменты времени $t = 0, 0.05, 0.1, 0.125, 0.2$. Обратите внимание на кадр в момент времени $t=0$. На графике видна некоторая рябь, что вызвано недостаточной точностью приближения решения частичной суммой с 50 – ю членами.

□

Выше мы рассмотрели несколько примеров, в которых полагали внешнее усилие равным нулю $f(x,t)=0$. Если положить начальное смещение и скорость равным нулю $\varphi(x)=0$ и $\psi(x)=0$, то для конечного отрезка решение (4) примет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{\text{stc}(x-a(t-\tau),2L)}^{\text{stc}(x+a(t-\tau),2L)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0) \quad (8)$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример. *Конечная струна, закрепленная на концах. Начальное смещение и скорость 0. Внешнее усилие постоянно.*

Струна находится в состоянии равновесия и в нулевой момент времени к ней прикладывается единичная сила, т.е. $\varphi(x)=0, \psi(x)=0, f(x,t)=1$. Начинается колебательный процесс. Решение может быть представлено по формуле (8). Внутренний интеграл вычисляется тривиально и задача сводится к однократному интегралу. Первообразную функции stc можно представить в символьном виде. Однако *Mathematica* это не умеет делать. Поэтому мы будем использовать численное интегрирование.

$a = 1; L = 1;$

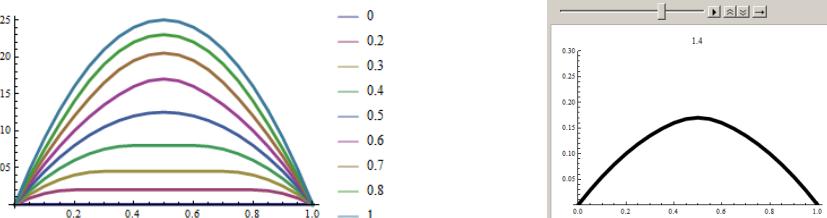
$u[x_, t_] := \frac{1}{2a} \text{NIntegrate}[\text{stc}[x + a(t - \tau), 2L] - \text{stc}[x - a(t - \tau), 2L],$
 $\{\tau, 0, t\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4]$

Численное интегрирование кусочных функций выполняется довольно долго. Для ускорения работы мы вычислим значения функции $u(x,t)$ в дискретном наборе точек и построим график решения в виде ломаной с небольшим шагом между точками по оси x . Графики решения в моменты времени $t = 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0$ показаны на следующем рисунке слева.

$T = \text{Join}[\{0\}, \text{Range}[0.2, 0.8, 0.1], \{1\}];$

$U = \text{Table}[\{x, u[x, t]\}, \{t, T\}, \{x, 0, 1, 0.05\}];$

$\text{ListLinePlot}[U, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}, \text{PlotLegends} \rightarrow T]$



Для построения анимации добавим следующий код.

```

T = Range[0, 2, 0.05];
U = Table[{x, u[x, t]}, {t, T}, {x, 0, 1, 0.05}];
tp = Table[ListLinePlot[U[[i]], PlotRange -> {0., 0.3},
  PlotStyle -> {Black, Thickness[0.015]}, PlotLabel -> T[[i]]],
{i, Length[T] - 1}];
ListAnimate[tp, AnimationRunning -> False]

```

Один из кадров анимации показан на предыдущем рисунке справа.

□

Пример. Конечная струна, закрепленная на концах. Начальное смещение и скорость 0. Внешнее усилие не зависит от времени и имеет форму ступеньки.

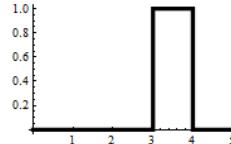
Струна длиной $L=5$ находится в состоянии равновесия $\varphi(x)=0, \psi(x)=0$ и в нулевой момент времени к ней прикладывается ступенчатая сила $f(x, t) = \begin{cases} 1, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 3 \vee x > 4 \end{cases} \forall t > 0$. Начинается колебательный процесс. Решение

строим по формуле (8), используя численное интегрирование.

```

Clear[\alpha, \beta]; \alpha = 1; L = 5;
stc[x_, w_] = Abs[x - w Floor[x/w + 1/2]];
f[x_] = UnitBox[x - 3.5];
Plot[f[x], {x, 0, 5}] (* график внешнего усилия *)

```



$F[\alpha, \beta] = \text{Integrate}[f[t], \{t, \alpha, \beta\}]$

$\text{Assumptions} \rightarrow \alpha \geq 0 \ \&& \ \beta \geq 0 \ \&& \ \alpha < \beta$

$G[x, t, \tau] = F[\text{stc}[x - a(t - \tau), 2L], \text{stc}[x + a(t - \tau), 2L]]$

$u[x, t] := \frac{1}{2a} \text{NIntegrate}[G[x, t, \tau], \{\tau, 0, t\}]$

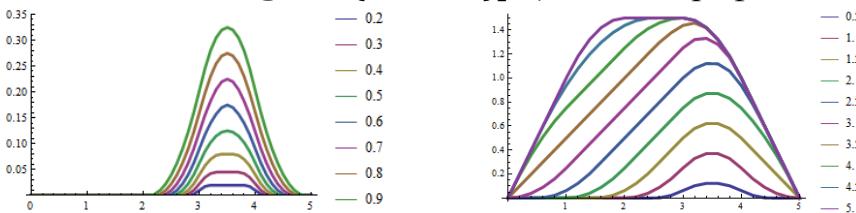
$\text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4$];

$T1 = \text{Range}[0.2, 0.9, 0.1]$;

$U1 = \text{Table}[\{x, u[x, t]\}, \{t, T1\}, \{x, 0, L, 0.1\}]$;

$\text{ListLinePlot}[U1, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$

$\text{PlotLegends} \rightarrow T1, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 0.35\}$ (* левый график на след. рис. *)



$T2 = \text{Range}[0.5, 5, 0.5]$;

$U2 = \text{Table}[\{x, u[x, t]\}, \{t, T2\}, \{x, 0, L, 0.2\}]$;

$\text{ListLinePlot}[U2, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}]$

$\text{PlotLegends} \rightarrow T2$ (* правый график на предыдущем рисунке *)

На левом графике показаны профили струны в начальные моменты времени $t = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$; на правом – в моменты времени $t = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$.

3.9.4 Примеры решения краевых задач для уравнение Лапласа

Много прикладных задач сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Для однозначного определения решения к уравнению следует добавить граничные условия и условия убывания на бесконечности, если область неограничена. К уравнению Лапласа приводятся задачи исследования движения идеальной жидкости, электростатики, задачи стационарной теплопроводности, статического прогиба мембран и многие другие. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа называются гармоническими.

Решение уравнения Лапласа является сложной задачей и явных формульных решений известно очень мало. Здесь мы рассмотрим несколько примеров для которых решение уравнения Лапласа можно представить в интегральной форме.

Гармоническая функция в верхней полуплоскости определяется по формуле

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (1)$$

где $u(\xi)$ граничное значение функции. Если это граничное значение финитное (имеет конечный носитель – интервал на котором функция отлична от нуля), то интеграл можно вычислять по этому интервалу. Формулу (1) нельзя использовать при значении $y=0$, т.е. на границе области.

Пример. Гармоническая функция в верхней полуплоскости. Граничное значение в форме треугольника.

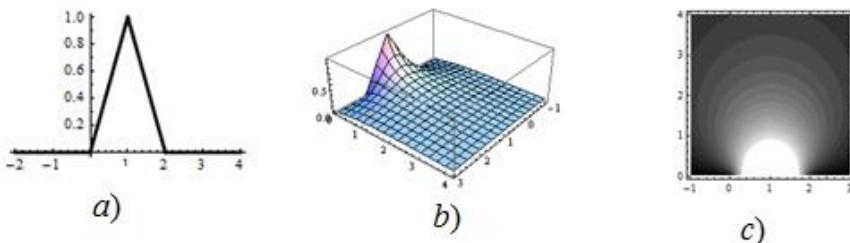
$\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x < 0\}, \{x, x < 1\}, \{2 - x, x < 2\}\}, 0]$;

$\text{Plot}[\varphi[x], \{x, -2, 4\}]$ (* следующий рисунок a *)

$$u[x, y] := \frac{1}{\pi} (\text{NIntegrate}[\frac{\xi y}{(x - \xi)^2 + y^2}, \{\xi, 0, 1\}, \text{WorkingPrecision} \rightarrow 5] + \text{NIntegrate}[\frac{(2 - \xi)y}{(x - \xi)^2 + y^2}, \{\xi, 1, 2\}, \text{WorkingPrecision} \rightarrow 5]);$$

$\text{Plot3D}[u[x, y], \{x, -1, 3\}, \{y, 0.01, 4\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotPoints} \rightarrow 40]$

$\text{ContourPlot}[u[x, y], \{x, -1, 3\}, \{y, 0.01, 4\}, \text{ContourLines} \rightarrow \text{False}, \text{PlotPoints} \rightarrow 25, \text{Contours} \rightarrow 20, \text{ColorFunction} \rightarrow \text{GrayLevel}]$



a) граничная функция $u(\xi)$; b) график/поверхность функции $u(x, y)$;

c) контурный график функции $u(x, y)$.

Пример. Гармоническая функция в верхней полуплоскости. Границное значение в форме одной волны синусоиды.

$\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x < 0\}, \{\text{Sin}[\pi x], x < 2\}\}, 0]$;

$\text{Plot}[\varphi[x], \{x, -2, 4\}]$

$u[x, y] := \frac{1}{\pi} \text{NIntegrate}[\frac{\varphi[\xi]y}{(x - \xi)^2 + y^2}, \{\xi, 0, 2\}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100,$

$\text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{Method} \rightarrow \text{"TrapezoidalRule"}$]

Поскольку численное интегрирование нашей функции выполняется довольно долго, то для ускорения работы мы вычислим значения функции $u(x, y)$ в дискретном наборе точек, который мы выбираем, а не в наборе точек, который выбирают сами графические функции. Для построения графиков решения по дискретному набору точек в пакете *Mathematica* имеются подходящие функции.

$X = \text{Range}[-1, 3, 0.05];$

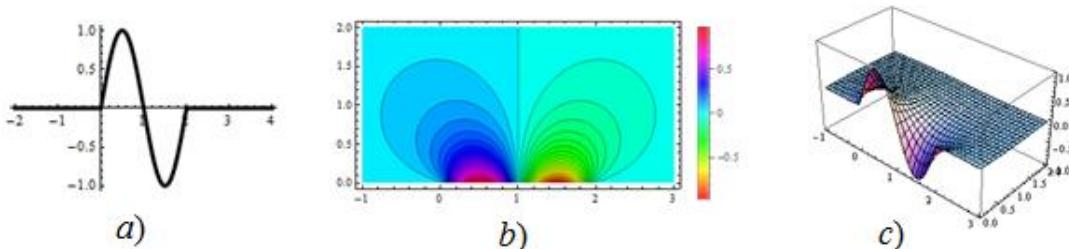
$Y = \text{Join}[\{0.01\}, \text{Range}[0.05, 2, 0.05]];$

$W = \text{Flatten}[\text{Table}[\{x, y, u[x, y]\}, \{y, Y\}, \{x, X\}], 1];$

$\text{ListContourPlot}[W, \text{Contours} \rightarrow 40, \text{ColorFunction} \rightarrow \text{Hue},$

$\text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}, \text{PlotLegends} \rightarrow \text{Automatic}]$

$\text{ListPlot3D}[W, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{4, 2, 2\}, \text{Mesh} \rightarrow \{41, 16, 0\}]$



a) граничная функция $u(x, 0)$; b) контурный график функции $u(x, y)$;
c) график/поверхность функции $u(x, y)$.

□

Используя метод продолжения, можно получить решение уравнения Лапласа в первом квадранте (в области $x \geq 0, y \geq 0$). Пусть граничные значения в 1-ом квадранте имеют вид $u(x, 0) = \varphi(x), x \geq 0, u(0, y) = \psi(y), y \geq 0$. Решение уравнения Лапласа в 1-ом квадранте имеет вид

$$u(x, y) = \frac{4xy}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\varphi(\xi)\xi}{((x - \xi)^2 + y^2)((x + \xi)^2 + y^2)} + \frac{\psi(\xi)\xi}{((y - \xi)^2 + x^2)((y + \xi)^2 + x^2)} \right) d\xi$$

Пример. Гармоническая функция в первом квадранте. Границное значение в форме прямоугольных столбиков на обеих полуосах X и Y .

$\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x < 0\}, \{1, x < 1\}\}, 0]$;

$\text{Plot}[\varphi[x], \{x, -2, 4\}]$

$u[x, y] := \frac{4xy}{\pi} (\text{NIntegrate}[\frac{\xi \varphi[\xi]}{((x - \xi)^2 + y^2)((x + \xi)^2 + y^2)}, \{\xi, 0, 1\}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4] +$

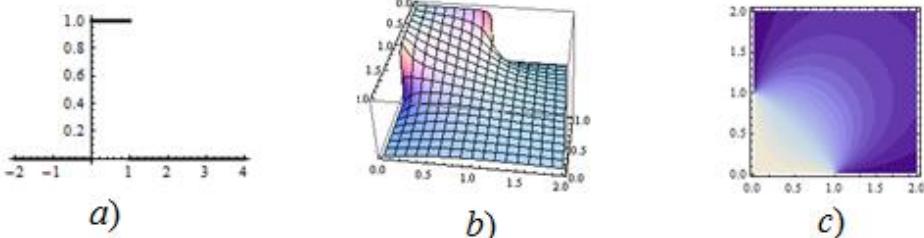
```


$$\text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \varphi[\xi]}{((y - \xi)^2 + x^2)((y + \xi)^2 + x^2)}, \{\xi, 0, 1\}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4\right]$$


```

```
Plot3D[u[x, y], {x, 0.01, 2}, {y, 0.01, 2}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 40]
```

```
ContourPlot[u[x, y], {x, 0.01, 2}, {y, 0.01, 2}, ContourLines -> False, PlotPoints -> 25, Contours -> 20]
```



a) граничная функция $u(\tau, 0) = u(0, \tau)$; b) график/поверхность функции $u(x, y)$;
c) контурный график функции $u(x, y)$.

□

Пример. Гармоническая функция в первом квадранте. Граничное значение в форме треугольников на обеих полуосах X и Y .

```
 $\varphi[x] = \text{Piecewise}[\{\{0, x < 0\}, \{x, x < 1\}, \{2 - x, x < 2\}\}, 0]$ ;
```

```
Plot[ $\varphi[x]$ , {x, -2, 4}]
```

```


$$u[x, y] := \frac{4xy}{\pi} \left( \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \varphi[\xi]}{((x - \xi)^2 + y^2)((x + \xi)^2 + y^2)}, \{\xi, 0, 2\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12\right] + \text{NIntegrate}\left[\frac{\xi \varphi[\xi]}{((y - \xi)^2 + x^2)((y + \xi)^2 + x^2)}, \{\xi, 0, 2\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4, \text{MaxRecursion} \rightarrow 12\right] \right)$$


```

Ускорим построение графиков вычислением значений функции в некотором наборе точек.

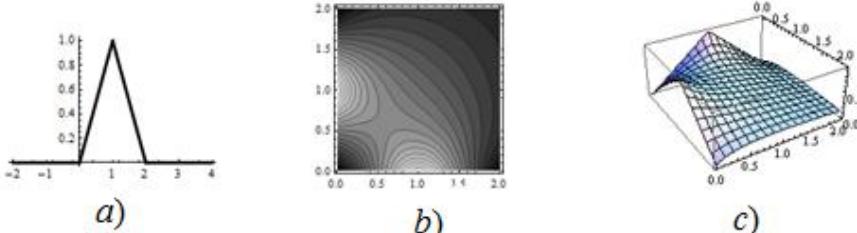
```
X = Join[{0.01}, Range[0.05, 2, 0.05]];
```

```
Y = Join[{0.01}, Range[0.05, 2, 0.05]];
```

```
W = Flatten[Table[{x, y, u[x, y]}, {y, Y}, {x, X}], 1];
```

```
ListContourPlot[W, Contours -> 20, ColorFunction -> GrayLevel]
```

```
ListPlot3D[W]
```



a) граничная функция $u(\tau, 0) = u(0, \tau)$; b) контурный график функции $u(x, y)$;
c) график/поверхность функции $u(x, y)$.

□

Гармоническая в круге радиуса R функция вычисляется по формуле Пуассона

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta \quad (2)$$

где $f(\theta)$ граничное значение функции, а r, φ - полярные координаты точки внутри круга.

Пример. Стационарное распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра. Температура на поверхности имеет вид косинусоиды.

Ось цилиндра направим вдоль оси Oz. Температура точек u внутри цилиндра не зависит от z и будет удовлетворять двумерному уравнению Лапласа внутри круга радиуса R . Если использовать полярные координаты, то граничное условие для функции температуры $u(r, \varphi)$ будет иметь вид $u(R, \theta) = f(\theta)$. Сама функция $u(r, \varphi)$ будет определяться формулой (2).

Пусть $f(\theta) = \cos 3\theta$. Тогда

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

Сделаем замену $\theta - \varphi = t$ и, учитывая периодичность (не нужно менять пределы интегрирования), получим

$$u(r, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t + 3\varphi)}{R^2 - 2Rr \cos t + r^2} dt$$

Тогда

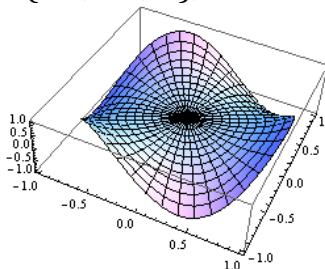
$R = .$;

$$u[r, \varphi] = \text{Simplify}\left[\frac{R^2 - r^2}{2\pi} \text{Integrate}\left[\frac{\text{Cos}[3t + 3\varphi]}{R^2 - 2Rr \text{Cos}[t] + r^2}, \{t, 0, 2\pi\}, \text{Assumptions} \rightarrow (0 < r < R \ \& \ \varphi \in \text{Reals} \ \& \ R > 0)\right]\right]$$

$$\frac{r^3 \text{Cos}[3\varphi]}{R^3}$$

$R = 1$;

RevolutionPlot3D[$u[r, \varphi], \{r, 0, 1\}, \{\varphi, 0, 2\pi\}$,
 $\text{Mesh} \rightarrow \{11, 41, 0\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$



Замечание. Если замену $\theta - \varphi = t$ не делать, то *Mathematica* 9 возвращает неверный результат! Попробуйте.

$$\begin{aligned} & \text{Simplify}\left[\frac{R^2 - r^2}{2\pi} \text{Integrate}\left[\frac{\text{Cos}[3t]}{R^2 - 2Rr\text{Cos}[t - \varphi] + r^2}, \{t, 0, 2\pi\}\right], \right. \\ & \quad \left. \text{Assumptions} \rightarrow (0 < r < R \ \& \ \varphi \in \text{Reals} \ \& \ R > 0)\right] \\ & \frac{(r^6 - R^6)\text{Cos}[3\varphi]}{2r^3R^3} \end{aligned}$$

□

Пример. Стационарное распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра. Температура на поверхности кусочно постоянна.

Пусть на поверхности бесконечного кругового цилиндра радиуса R поддерживается следующая температура: $u = T$ при $0 < \varphi < \pi$; $u = 0$ при $\pi < \varphi < 2\pi$; (для любых z и t). Внутри цилиндра температура установилась и ее требуется найти. Задача сводится к решению двумерного уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ с граничным условием $u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$. Решение дается

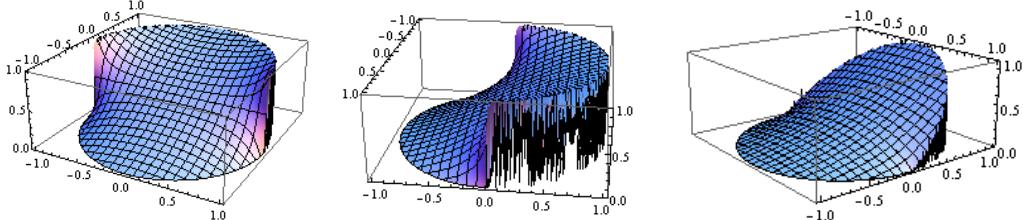
интегралом Пуассона (2). Подставляя в него $f(\theta) = 0$ при $\pi < \theta < 2\pi$ и T при $0 < \theta < \pi$, получим

$$u(x, y) = T \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta) + x^2 + y^2} d\theta$$

Обратите внимание на замену $r\cos(\theta - \varphi) = x\cos\theta + y\sin\theta$, которую мы сделали в интеграле. Имеем

$$R = 1; T = 1;$$

$$\begin{aligned} u[x, y] &:= T \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi} * \\ & \quad \text{NIntegrate}\left[\left(\frac{1}{R^2 - 2R(x\text{Cos}[\theta] + y\text{Sin}[\theta]) + x^2 + y^2}\right), \right. \\ & \quad \left. \{\theta, 0, \pi\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4\right]; \\ U[x, y] &:= \text{If}[x^2 + y^2 < R^2, u[x, y], 0]; \\ \text{Plot3D}[U[x, y], \{x, -R, R\}, \{y, -R, R\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, T\}, \\ & \quad \text{PlotPoints} \rightarrow 40, \text{Mesh} \rightarrow 21, \\ & \quad \text{RegionFunction} \rightarrow \text{Function}[\{x, y, z\}, x^2 + y^2 < R^2]] \end{aligned}$$



Если покрутить график, то вы заметите «рябь» у контура круга (рисунок в середине). Это вызвано тем, что интеграл Пуассона дает решение краевой задачи *внутри* круга, а граничное значение $f(\theta)$ он только приближает. Использовать его для вычисления значения функции $u(r, \varphi)$ на границе нельзя. В точках границы погрешность численного интегрирования вызывает «рябь». Даже если граничная функция $f(\theta)$ будет непрерывной, то «рябь» остается.

Пусть, например, граничное значение имеет вид $f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta, & 0 \leq \theta < \pi \\ 0, & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$. Тогда

для построения графика решения в предыдущем коде надо изменить строку, определяющую функцию $u(x, y)$

$$u[x, y] := \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi} \text{NIntegrate}\left[\frac{\text{Sin}[\theta]}{R^2 - 2R(x\text{Cos}[\theta] + y\text{Sin}[\theta]) + x^2 + y^2}, \{\theta, 0, \pi\}, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 4, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 4\right];$$

График решения показан на предыдущем рисунке справа..

□

Пример. Тонкая мембрана натянута на проволочный каркас, проектирующийся на плоскость Oxy в окружность радиуса R с центром в начале координат. Уравнение контура мембраны в цилиндрических координатах имеет вид: $u(R, \theta) = f(\theta) = h \cos 2\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). Известно, что форма поверхности $z = u(x, y)$, по которой расположится пленка, удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию $u(R, \theta) = f(\theta)$. Найдем эту форму, используя интеграл Пуассона (2). Прежде, чем вычислять интеграл, сделаем в нем замену $\theta - \varphi = t$ и учтем периодичность подынтегральной функции (не нужно менять пределы интегрирования). Имеем

$$R = .; h = .;$$

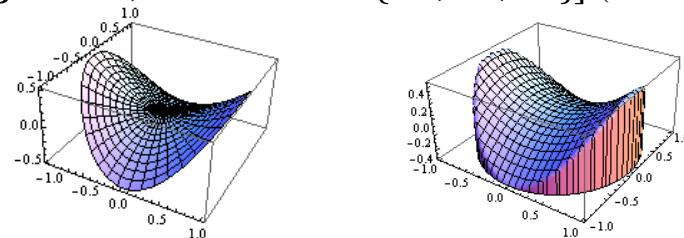
$$u[r, \varphi] = \text{Simplify}\left[h \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \text{Integrate}\left[\frac{\text{Cos}[2t + 2\varphi]}{R^2 - 2Rr\text{Cos}[t] + r^2}, \{t, 0, 2\pi\}, \text{Assumptions} \rightarrow (0 < r < R \ \&\ \varphi \in \text{Reals} \ \&\ R > 0)\right]\right]$$

$$\frac{h r^2 \text{Cos}[2\varphi]}{R^2}$$

$$R = 1; h = 0.5;$$

$$\text{RevolutionPlot3D}[u[r, \varphi], \{r, 0, 1\}, \{\varphi, 0, 2\pi\}, \text{Mesh} \rightarrow \{11, 41, 0\},$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{2R, 2R, 2h\}] \text{ (* след. рисунок слева *)}$$



Делая замену $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, переходим к представлению формы мембраны в декартовых координатах.

$$U[x, y] = h \frac{x^2 - y^2}{R^2};$$

**RegionPlot3D[z < U[x, y] && x^2 + y^2 < R^2,
 $\{x, -R, R\}, \{y, -R, R\}, \{z, -h, h\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotPoints} \rightarrow 41,$
 $\text{Mesh} \rightarrow \{21, 21, 0\}, \text{BoxRatios} \rightarrow \{2R, 2R, 2h\}]$ (* пред. рисунок справа *)**

Литература.

1. Очан Ю.С. Методы математической физики.
2. Н.С. Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов Основные дифференциальные уравнения математической физики. ГИФМЛ.М. 1962, 767с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736с.
4. Э.Т.Уиттакер, Дж.Н.Ватсон Курс современного анализа. Ч.2. ГИФМЛ. М. 1963г. 515с.
5. В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин и др. Под. ред. С.Г. Михлина. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576с.
7. Карслу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964.– 487 с.
8. Доля П.Г. Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики.// Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2006.- № 733. Сер. "Математическое моделирование.
9. Dolya P.G. Solution of the initial value problem for the inhomogeneous equation of vibrations of a finite string with homogeneous boundary conditions // Kharkiv: Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. Lapunov memorial conference., Book of abstracts, – p. 38-39, 2007