10 Формули Френе

Вектори $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$ утворюють ортонормований базис в кожній точці кривої. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= \quad k\nu \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau \quad + \varkappa\beta \quad = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{bmatrix}. \\ \frac{d\beta}{ds} &= \quad -\varkappa\nu \end{aligned}$$

Формули можна переписати в іншому вигляді, з вектором Дарбу $\omega = \varkappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}$:

$$\frac{d\tau}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\tau}], \qquad \frac{d\nu}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\nu}], \qquad \frac{d\beta}{ds} = [\vec{\omega}, \vec{\beta}]$$

1. Виконайте перевірку, що для кривої $\vec{r} = \vec{r}(s)$ виконуються наступні співвідношення:

$$\vec{r}'^2 = 1, \qquad \vec{r}''^2 = k^2, \qquad |\vec{r}'''|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + k'^2,$$

$$\langle \vec{r}', \vec{r}'' \rangle = 0, \quad \langle \vec{r}', \vec{r}''' \rangle = -k^2, \quad \langle \vec{r}'', \vec{r}''' \rangle = kk'$$

2. Доведіть:
   (a) $(\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\beta}\,') = -\varkappa$;
   (b) $(\vec{\beta}\,', \vec{\beta}\,'', \vec{\beta}\,''') = k_2^5\left(\frac{k}{\varkappa}\right)'$.
   (c) $(\vec{\tau}\,', \vec{\tau}\,'', \vec{\tau}\,''') = -k^5\left(\frac{\varkappa}{k}\right)'$.

3. Доведіть, що у точці M_0 кривина лінії L дорівнює кривині проекції L^* лінії L на її стичну площину у точці M_0.

4. Довести, що формули Френе

$$\vec{\tau}\,' = k\vec{\nu}\,, \quad \vec{\nu}\,' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}\,, \quad \vec{\beta}\,' = -\varkappa\vec{\nu}$$

   можна записати у вигляді

$$\vec{\tau}\,' = \vec{\omega} \times \vec{\tau}\,, \quad \vec{\nu}\,' = \vec{\omega} \times \vec{\nu}\,, \quad \vec{\beta}\,' = \vec{\omega} \times \vec{\beta}$$

   Знайти вектор $\vec{\omega}$ (вектор Дарбу) з'ясувати його кінематичний зміст.

5. Кривою Бертрана називається лінія, головні нормалі якої є одночасно головними нормалями іншої лінії, відмінній від першої. Довести, що лінії Бертрана характеризуються виразом:

$$\lambda k + \mu\varkappa = 1,$$

   де λ і μ — деякі константи.

6. Покажіть, що кут між дотичними у відповідних точках пари ліній Бертрана постійний.

7. Довести, що відстань між двома відповідними точками пари ліній Бертрана постійна.

8. Нехай S — площа між кривою і січної, проведеної паралельно дотичній на відстані h. Перевірте, що

$$\lim_{h\to 0} \frac{S^2}{h^3} = \frac{32}{9k},$$

   де k — кривина кривої у точці дотику.

9. Нехай γ — регулярна крива класу C^3. Якщо у точці $P \in \gamma$ скрут $\varkappa \neq 0$, то стична площина кривої у точці P перетинає γ. Довести.

11 Натуральне рівняння

Якщо на інтервалі задані функції кривини $k = k(s) > 0$ та скруту $\varkappa = \varkappa(s)$, то існує єдина, з точністю до руху, крива з такими кривиною та скрутом. Тому рівняння $k = k(s) > 0$ та $\varkappa = \varkappa(s)$ є рівняннями кривої. Вони називаються *натуральними* рівннями кривої.

Для того, щоб отримати натуральне рівняння кривої заданої параметрично потрібно обчислити довжину кривої, кривину та скрут та отримати вирази від довжини кривої.

З іншого боку, з натурального рівняння кривої можна отримати параметричне. Оскільки, $k = \frac{d\varphi(s)}{ds}$, то $\varphi(s) = \int k(s)\, ds$. Звідки $\varphi(s) = A(s) + \varphi_0$. Дотичний вектор $\tau(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$. Інтегруємо і знаходимо $\vec{r}(s) = \int(\cos(A(s)+\varphi_0), \sin(A(s)+\varphi_0))ds$.

Якщо натуральному рівнянні є кривина та кут φ, тоді $ds = \frac{d\varphi}{k} = Rd\varphi$ підставляється в рівняння дотичного вектора.

1. Знайти натуральне рівняння для наступних кривих:

   (a) $y = x^{3/2}$

   (b) $y = \ln x$

   (c) $x = a(\cos t + \sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$;

   (d) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at$;

   (e) $x = ct, \quad y = c\sqrt{2}\ln t, \quad z = ct^{-1}$

2. Знайти всі плоскі криві з даними натуральним рівнянням $k = k(s)$.

3. Знайти плоскі криві, задані наступними натуральними рівняннями:

   (a) $k = a$;

   (b) $R = a\, s$;

   (c) $k^2 = \frac{1}{2s}$.

4. Скласти параметричні рівняння ліній, для яких:

   (a) $R = b\, e^{\alpha}$;

   (b) $R = b\, \alpha$;

   (c) $s = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

   (d) $s = b\cos\alpha$