

12 Обгортка сім'ї кривих

Обгортка або Обвідна сімейства кривих, це крива, що в кожній своїй точці є дотичною до деякої кривої сімейства. Якщо сімейство кривих задано рівнянням $F(x, y, \alpha) = 0$. Тоді обгортку сімейства кривих визначається системою

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ F_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Зауважимо, що будь яка гладка крива, що не має прямолінійних ділянок, буде обгорткою своїх дотичних.

1. Дослідити сімейства кривих (α — параметр) і зробити малюнок:

(a) $\alpha^2 x^2 + y^2 = \alpha x$;

(b) $x^2 + 2\alpha y = 2xy$.

2. Знайти обгортку сімейства ліній (α — параметр сімейства):

(a) $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$;

(b) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - h = 0$;

(c) $y^2 - (x - \alpha)^3 = 0$;

(d) $y^3 - (x - \alpha)^2 = 0$;

(e) $3(y - \alpha)^2 - 2(x - \alpha)^3 = 0$.

3. Знайти обгортку сімейства прямих, що утворюють з осями координат трикутники постійної площі S .

4. Знайти рівняння обгортки сімейства прямих, на яких лежить відрізок постійної довжини a , якщо його кінці ковзають по осях прямокутної системи координат.

5. Пряма обертається з постійною кутовою швидкістю навколо точки, рівномірно рухається по другій прямій. Знайти обгортку цього сімейства прямих.

6. Знайти умови, яким повинні задовольняти точки обгортки сімейства ліній

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

де α і β пов'язані співвідношенням $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

7. Знайти обгортку сімейства ліній:

(a) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, де $p + q = 1$;

(b) $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$, де $\lambda + \mu = \lambda \mu$;

(c) $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, де $a + b = \text{const}$;

(d) $bx + ay = ap$, де $a + b = \text{const}$.

13 Еволюта та евольвента

Еволютою кривої γ називається обгортка її нормалей. Рівняння еволюти: $\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k}\vec{\nu}$ або

$$\begin{cases} X &= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \\ Y &= y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$

Початкова крива γ називається евольвентою своєї еволюти. Отже, евольвента — це ортогональна траєкторія сімейства дотичних до кривої γ . Зауважимо, що еволюта у кривої одна, а евольвент, тобто ортогональних траєкторій дотичних, — нескінченно багато. Вони задаються рівняннями: $\vec{\rho} = \vec{r} + (Const - s(t)) \frac{\vec{r}'}{|r'|}$ або

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ Y(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \end{cases}$$

1. Скласти рівняння і накреслити графіки еволут наступних ліній:
 - (a) $x = a \cos t, \quad y = b \sin t$;
 - (b) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$;
 - (c) $y = x^2$;
 - (d) $y = \ln x$.
2. Скласти рівняння евольвент кола $x^2 + y^2 = a^2$ та зробіть малюнок.
3. Скласти рівняння евольвенти ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, що проходить через її вершину, і зробити малюнок.
4. Скласти рівняння евольвент параболи $x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2$ і зробити малюнок.
5. Другою еволютою кривої називається еволюта її еволюти. Знайти кривину другої еволюти.