14 Способи завдання поверхонь

1. Для того щоб в кожній точці деякої області задання параметрів u й v вектор $\vec{r}(u,v)$ був ортогональним до векторів $\partial_u\vec{r}$ й $\partial_v\vec{r}$, необхідно і достатньо, щоб $|\vec{r}(u,v)| = const$. Доведіть.

2. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ — вектор-функція класу C^1. Для того щоб вектор $\vec{r}(u,v)$ мав постійний напрямок, необхідно і достатньо, щоб в області зміни параметрів u й v вектор $\vec{r}(u,v)$ був колінеарним вектору $\partial_u\vec{r}$ і вектору $\partial_v\vec{r}$. Доведіть.

3. Для того щоб образ гладкої вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, задовільняв умові $\partial_u\vec{r} \nparallel \partial_v\vec{r}$, належав деякій площині, необхідно і достатньо, щоб вектори $\partial_u\vec{r}$ й $\partial_v\vec{r}$ були паралельні цій площині. Доведіть.

4. В площині xOz задана лінія $x = f(u), z = g(u)$, яка не перетинає вісь Oz. Знайдіть параметризацію поверхні при обертанні цієї кривої навколо вісі Oz.

5. Напишіть рівняння катеноїда, який утворюється при обертанні ланцюгової лінії $x = a\operatorname{ch}(\frac{u}{a}), y = 0, z = u$ навколо вісі Oz.

6. Запишіть рівняння псевдосфери, яка утворюється при обертанні трактриси $x = a\sin u, y = 0, z = a(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}) + \cos u)$ навколо вісі Oz.

7. Запишіть рівняння циліндричної поверхні, для якої крива $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ є напрямною, а твірні паралельні вектору $\vec{e}$.

8. Напишіть параметричне рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні вектору $\vec{a} = \{1,2,3\}$, а напрямна задана рівняннями $x = u, y = u^2, z = u^3$.

9. Напишіть неявне рівняння циліндричної поверхні з напрямною кривою $x = \cos u, y = \sin u, z = 0$ і прямолінійними твірними, паралельними вектору $\vec{a} = \{-1,3,-2\}$.

10. Дана поверхня
$$x = 3u + v^2 + 1, y = 2u + v^2 - 1, z = -u + 2v :$$
    (a) покажіть, що ця поверхня циліндрична;
    (b) напишіть рівняння якої-небудь її твірної;
    (c) знайдіть прямолінійну твірну, яка проходить через точку $M(u = 2,\ v = 3)$.

11. Задана точка $M(a,b,c)$ і лінія L.
$$x = f(u),\ y = \varphi(u),\ z = \psi(u).$$
Напишіть в параметричному і неявному вигляді рівняння конуса з вершиною в M і з напрямною лінією L.

12. Складіть рівняння конуса, який утворюється прямими, що проходять через точку $M(a,b,c)$ й перетинає параболу
$$y^2 = 2px\ ,\ z = 0.$$

13. Складіть рівняння конуса, який має вершину у точці $M(-1,0,0)$ і описаний навколо параболоїда $2y^2 + z^2 = 4x$.

14. Напишіть параметричне рівняння фігури, яка утворена дотичними до $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$.

15. Коло радіусу a рухається так, що його центр креслить лінію $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, а площина кола, є нормальною площиною до цієї лінії в кожній точці. Складіть рівняння поверхні описаної колом (така поверхня називається трубчастою).

16. Поверхня, яка дозволяє параметризацію $\vec{r} = \vec{r}_1(u) + \vec{r}_2(v)$, де $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — гладкі векторфункції, називається поверхнею переносу. Покажіть, що поверхні переносу може бути отримана рухом деякої лінії.

17. Покажіть, що еліптичний і гіперболічний параболоїди є поверхнями переносу.

18. Лінійчатою називається поверхня, що задається параметричним рівнянням

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u),$$

де $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ — вектор-функція, що задає деяку криву, $\vec{a} = \vec{a}(u)$ — вектор-функція, що задає розподіл прямолінійних твірних лінійчатої поверхні. Складіть рівняння лінійчатої поверхні, твірні якої паралельні площині $y - z = 0$ і перетинають параболи $y^2 = 2px$, $z = 0$ й $z^2 = -2px$, $y = 0$.

19. Складіть рівняння лінійчатої поверхні, утвореної прямими, які перетинають криву $\vec{\rho} = \{u, u^2, u^3\}$, і паралельні площині xOy й перетинають вісь Oz.

15 Дотична площина, нормаль до поверхні

Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ векторне рівняння поверхні. Оскільки $\operatorname{rg} d\vec{r} = 2$ для всіх (u^1, u^2), то в кожній точці поверхні вектори

$$\partial_1 \vec{r} = \frac{\partial}{\partial u^1}\vec{r} \quad \text{і} \quad \partial_2 \vec{r} = \frac{\partial}{\partial u^2}\vec{r}$$

лінійно незалежні і утворюють базис дотичної площини поверхні у відповідній точці. Вектор

$$\vec{N} = \partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}$$

ортогональний до дотичної площини й називається вектором нормалі.

Рівняння дотичної площини та нормалі поверхні має вигляд:

$$\begin{gathered}\left(\vec{R} - \vec{r}(u^1, u^2), \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}\right) = 0;\\ \vec{R}(t) = \vec{r}(u^1, u^2) + t \cdot \partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}\end{gathered}$$

Якщо поверхня задана неявно у вигляді $f(x, y, z) = c$, то поле нормалей поверхні становить поле градієнта функції f, тобто $\vec{N} = \nabla f$.

1. На поверхні $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$ дана точка $M(u = 1, v = \pi/2)$:
   (a) напишіть рівняння дотичних прямих і нормальних площин до ліній $u = 1$, $v = \pi/2$ в точці M;
   (b) покажіть, що дотична в точці M до лінії $u = \sin v$ є дотичною до лінії $u = 1$ в цій же точці.

2. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ в точці $M(u = 2, v = 1)$.

3. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M(1,3,4)$ поверхні $x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2v$.

4. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до прямого гелікоїда

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av.$$

Дослідіть поведінку нормалі при її зміщенні уздовж координатних ліній.

5. Покажіть, що дотична площину в довільній точці поверхні $z = f(x - az, y - bz)$ паралельна фіксованому напрямку.

6. Доведіть, що дотична площину до трубчастої поверхні паралельна фіксованому напрямку.

7. Покажіть, що дотичні площини поверхні

$$z = x\varphi(y/x)$$

проходять через початок координат.

8. Нехай поверхня є частина фігури, утвореної дотичними до лінії $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Напишіть рівняння дотичної площини в довільній точці поверхні. Дослідіть її поведінку при зсуві точки дотику вздовж прямолінійних твірних поверхні.

9. Покажіть, що дотична площина, проведена в будь-якій точці лінії $v = c$ на поверхні $x = u\cos v, y = u\sin v, z = f(v) + au$, проходить через фіксовану пряму.

10. Поверхня утворена дотичними та кривою L. Доведіть, що ця поверхня у всіх точках однієї й тієї ж дотичної до кривої L має одну і ту ж саму дотичну площину.

11. Поверхня утворена головними нормалями кривої L. Складіть рівняння дотичній площині та нормалі в довільній точці поверхні.

12. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, утвореної бінормаль кривої L.

13. Доведіть, що нормаль поверхні обертання збігається з головною нормаллю меридіана і перетинає вісь обертання.

14. Доведіть, що якщо всі нормалі поверхні перетинають одну і ту ж пряму, то поверхня буде поверхнею обертання.

15. Лінійчата поверхня називається розгорнутою, якщо у всіх точках довільної твірної дотична площина до поверхні одна й та ж.

    Доведіть, що лінійчата поверхня

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$$

є розгорнутою тоді й тільки тоді, коли $(\rho', \alpha, a') = 0$.

16. Доведіть, що будь-яка розгортається поверхня може бути розбита на наступні частини: 1) частину площині; 2) частину циліндра; 3) частину конуса; 4) частину фігури, утвореної дотичними до деякої неплоскою кривої.

17. Знайдіть поверхню, знаючи, що всі її нормалі перетинаються в одній точці.