

16 Перша квадратична форма

Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — дотичні вектори, записані у вигляді $\vec{a} = a^1 \partial_1 \vec{r} + a^2 \partial_2 \vec{r}$. Якщо $\vec{b} = b^1 \partial_1 \vec{r} + b^2 \partial_2 \vec{r}$, тоді їх скалярний добуток, як добуток векторів у R^3 , запишеться у вигляді білінійної форми на дотичних векторах до поверхні:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^1 b^1 \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle + (a^1 b^2 + a^2 b^1) \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle + a^2 b^2 \langle \partial_2 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle.$$

При $\vec{a} = \vec{b}$ ця форма приймає вигляд квадратичної та називається першою квадратичною формою поверхні.

Функція $g_{ik} = \langle \vec{r}_i, \vec{r}_k \rangle$ називається коефіцієнтом першої квадратичної форми, а матриця $G = (g_{ik})$ — матрицею першої квадратичної форми поверхні.

1. Знайдіть I квадратичну форму поверхні обертання 2-го порядку.
2. Знайдіть першу квадратичну форму прямого гелікоїду

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$$

3. Обчисліть першу квадратичну форму поверхонь:

- (a) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}, \quad \vec{e} = \text{const};$
- (b) $\vec{r} = v \vec{\rho}(s);$
- (c) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{e}(s), |\vec{e}(s)| = 1;$
- (d) $\vec{r} = \rho(s) + \vec{v}(s) \cos \phi + \beta(s) \sin \phi;$
- (e) $\vec{r} = (a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v;$
- (f) $\vec{r} = \{v \cos u, v \sin u, ku\};$
- (g) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{v}(s);$
- (h) $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + \lambda \vec{\beta}(s).$

4. Покажіть, що при відповідному виборі криволінійних координат обертання на поверхні обертання її перша квадратична форма може бути приведена до вигляду

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2.$$

5. Знайдіть рівняння ліній, що перетинають меридіани поверхні обертання під постійним кутом α (локсодроми). Знайдіть рівняння локсодром на сфері.
6. Якщо сімейство ліній на поверхні задано диференціальним рівнянням $A(u, v)du + B(u, v)dv = 0$, то рівняння ортогональних траєкторій, тобто ліній, що перетинають задані лінії під прямим кутом, має вигляд

$$(BE - AF)du + (BF - AG)dv = 0.$$

Доведіть. Знайдіть ортогональні траєкторії прямолінійних твірних конуса.

7. Складіть диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сімейства ліній $\varphi(u, v) = \text{const}$ на поверхні.

- (a) Знайдіть ортогональні траєкторії сімейства ліній $u + v = \text{const}$, що лежать на сфері $r(u, v) = \{R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u\};$

- (b) знайдіть ортогональні траєкторії сімейства ліній $u = Ce^v$, що лежать на косому гелікоїді $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u + v$;
- (c) на круговому конусі $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$ розглядається сімейство ліній $v = u^2 + \alpha$, де α — параметр. Знайдіть сімейство їх ортогональних траєкторій.
8. (a) Виведіть умову ортогональності двох сімейств ліній на поверхні, що визначаються диференціальним рівнянням

$$P(u, v)du^2 + Q(u, v)dudv + R(u, v)dv^2 = 0.$$

- (b) Доведіть, що на прямому гелікоїду

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

диференціальне рівняння $du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$ задає ортогональну мережу.

9. (a) Доведіть, що лінії, які в кожній своїй точці ділять навпіл кути між координатними лініями, задаються диференціальним рівнянням

$$\sqrt{E}du \pm \sqrt{G}dv = 0.$$

- (b) Знайдіть рівняння ліній на прямому гелікоїді $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, ділять навпіл кути між координатними лініями.
- (c) Знайдіть рівняння ліній на сфері $x = a \cos u \sin v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a \cos v$, ділять кути між паралелями та меридіанами навпіл.

10. Знайдіть периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника $u = \pm av^2/2$, $v = 1$, розташованого на поверхні, у якої

$$ds^2 = du^2 + sh^2udv^2$$

11. Знайдіть кут між лініями $v = u + 1$ і $v = 3 - u$ на поверхні $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.
12. Знайдіть площу чотирикутника на прямому гелікоїді $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, обмеженого лініями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.