Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

**И. П. Ильинская, А. И. Ильинский**

# Дискретная математика

## Сборник задач

### Комбинаторика, графы, вероятность

Учебно-методическое пособие

Харьков – 2008

УДК 519.1/2(075.8)
ББК 22.17я73
И 46

*Утверждено ученым советом механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В.Н.Каразина (протокол № 1 от 1 февраля 2008 г.)*

**Рецензенты:** доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и информатики ХНУ им. В.Н.Каразина **Янцевич А.А.**; кандидат физико-математических наук, доцент ХНУ им. В.Н.Каразина **Куринной Г.Ч.**

И46 **Ильинская И. П., Ильинский А. И.**
**Дискретная математика. Сборник задач.** *Комбинаторика, графы, вероятность*: Учебно-методическое пособие. — Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. – 104 с.

Сборник задач содержит более 600 задач по разделам: перечислительная комбинаторика, теория графов, дискретная теория вероятностей. Приведены также основные определения и теоремы, использующиеся при решении задач, даны образцы решения типовых задач. К ряду задач даны указания или ответы. Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, аспирантов и преподавателей, изучающих или преподающих курсы дискретной математики и теории вероятностей.

УДК 519.1/2(075.8)
ББК 22.17я73

# Содержание

# Введение

Сборник задач предназначен для студентов высших учебных заведений, изучающих курсы дискретной математики и теории вероятностей. Сборник содержит более 600 задач по разделам: перечислительная комбинаторика, теория графов, дискретная теория вероятностей. В пункте 1 приведены основные обозначения, определения и формулировки теорем, которые используются при решении задач. В пункте 2 приведены образцы решений задач на разные темы. В пунктах 3 — 22 содержатся задачи по комбинаторике, в пунктах 23 — 25 — по теории графов, в пунктах 26 — 39 — по дискретной теории вероятностей. В большинстве случаев в одном пункте помещены задачи одного типа, что отражается в названии пункта. Однако в пунктах 13 и 27 задачи не классифицированы по методу решения, и студент должен сам определить, к какому разделу относится та или иная задача.

Студентам, впервые приступающим к изучению курсов дискретной математики и (или) теории вероятностей, дадим некоторых практические рекомендации при работе с задачником. При изучении темы „Комбинаторика“ необходимо сначала научиться решать простейшие задачи из пунктов 3 — 10 и лишь после этого приступать к решению задач из пунктов 11, 13. Пункты 12, 15, 16, 19 — 22 не связаны между собой и могут изучаться в любой последовательности. При решении некоторых задач из пунктов 17, 18 используется материал пункта 14. Пункты 23 — 25 по теории графов и пункты 26 — 39 по теории вероятностей рекомендуется изучать в указанном порядке.

Знаком $^\circ$ отмечены наиболее простые, на наш взгляд, задачи, а знаком $^*$ — более сложные. К ряду задач даны указания или ответы.

# 1 Определения и обозначения

## Комбинаторика

**1.1.** Число элементов конечного множества $A$ обозначается $|A|$.
**1.2.** *Правило дополнения.* Если $A \subset X$, то $|X \setminus A| = |X| - |A|$.
**1.3.** *Правило сложения*: если $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.
**1.4.** *Формула включения-исключения*: для конечных множеств $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо равенство

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| .$$

**1.5.** *Правило умножения*: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, где $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ — декартово произведение множеств $A$ и $B$. Удобна следующая интуитивная формулировка этого правила: если первое действие можно выполнить $m$ способами, а второе действие — $n$ способами, то два действия в указанном порядке можно выполнить $mn$ способами.
**1.6.** *Принцип ящиков Дирихле.* При любом размещении $n + 1$ шаров по $n$ ящикам хотя бы в одном ящике окажется больше одного шара.
**1.7.** *Выборка с возвращением* объема $k$ из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ — это вектор длины $k$, координатами которого являются числа из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (возможно, некоторые из координат вектора одинаковы). Количество таких выборок равно $n^k$.
**1.8.** *Выборка без возвращения* объема $k$ из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ — это вектор длины $k$, координатами которого являются числа из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем все координаты разные. Число таких выборок обозначается $A_n^k$ или $(n)_k$ и равно $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$, если $k \leqslant n$, и нулю, если $k > n$.
**1.9.** *Перестановка* множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ — это выборка без возвращения объема $n$ из этого множества. Количество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots \ldots, n\}$ равно $n!$.

**1.10.** Пусть $n$ — натуральное, а $k$ — целое число, $0 \leqslant k \leqslant n$. *Сочетанием* из $n$ по $k$ называется всякое $k$-элементное подмножество (неупорядоченное!) $n$-элементного множества. Число сочетаний из $n$ по $k$ обозначается $C_n^k$ или $\binom{n}{k}$ и равно $n!/(k!(n-k)!)$. Для целых $k < 0$ и $k > n$ полагаем по определению $C_n^k = 0$.

Тождественно по переменным $x$ и $y$ выполняется равенство $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$ (*формула бинома Ньютона*).

**1.11.** *Разбиением множества на части* называется представление его в виде объединения попарно непересекающихся множеств (порядок множеств учитывается). Число способов, которыми можно разбить $n$-элементное множество на $k$ занумерованных частей таких, что $j$-я часть содержит $n_j$ элементов ($j = 1, \ldots, k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$), равно $n!/(n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!)$.

**1.12.** Последовательность, состоящая из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, в которой элемент $a_1$ повторяется $k_1$ раз, элемент $a_2$ — $k_2$ раз, …, элемент $a_m$ — $k_m$ раз, называется *перестановкой с повторениями* длины $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$. Количество таких перестановок равно $\dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$.

**1.13.** Число способов размещения *ш различимых* шаров по *я* различимым ящикам равно $я^{ш}$. (Ящики предполагаются настолько большими, что все *ш* шаров могут поместиться в любом из них.)

**1.14.** Число способов размещения *ш неразличимых* шаров по *я* различимым ящикам равно $C_{ш+я-1}^{ш}$. (Ящики предполагаются настолько большими, что все *ш* шаров могут поместиться в любом из них. Неразличимость шаров понимается в том смысле, что распределение их по ящикам вполне определяется последовательностью чисел $k_1, k_2, \ldots, k_я$, где $k_j$ — число шаров, попавших в ящик с номером $j$.)

**1.15.** *Разложением* натурального числа $n$ называется представление его в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых.

**1.16.** *Разбиением* натурального числа $n$ называется представление его в виде суммы натуральных слагаемых, следующих в порядке невозрастания.

**1.17.** Разбиение называется *самосопряженным*, если соответствующая ему диаграмма Юнга симметрична относительно биссектрисы четвертого координатного угла.

**1.18.** *Числами Фибоначчи* называются элементы $f_n$ последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемой следующим образом: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Согласно *формуле Бинэ*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - (-1)^n \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right).$$

**1.19.** Последовательностью *типа Фибоначчи* называется всякая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. (*Не* требуется, чтобы $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.)

**1.20.** *Числами Каталана* называются элементы $c_n$ последовательности $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемой равенствами $c_0 = 1$, $c_n = c_{n-1}c_0 + c_{n-2}c_1 + \ldots + c_{n-j}c_{j-1} + \ldots + c_0c_{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Следующая формула выражает $c_n$ через $n$: $c_n = (n+1)^{-1}C_{2n}^n$.

**1.21.** *Производящей функцией* последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

**1.22.** *Сверткой* последовательностей $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется последовательность $c = a * b = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемая формулой $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \geqslant 0$. Производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.

**1.23.** *Экспоненциальной производящей функцией* последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/n!$.

**1.24.** Пусть $D = \{1, 2, \ldots, n\}$, $g$ — подстановка множества $D$, $b_j(g)$ — число циклов длины $j$ в разложении подстановки $g$ в произведение независимых циклов. Вектор $(b_1(g), b_2(g), \ldots, b_n(g))$ называется *типом* подстановки $g$.

**1.25.** Пусть $D = \{1, 2, \ldots, n\}$, $G$ — группа подстановок множества $D$. *Цикловым индексом* группы $G$ называется полином $n = |D|$ переменных

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1(g)} x_2^{b_2(g)} \ldots x_n^{b_n(g)},$$

где $(b_1(g), b_2(g), \ldots, b_n(g))$ — тип подстановки $g$.

**1.26.** Пусть $D$ и $G$ такие же, как в предыдущем пункте, $K$ — конечное множество. Функции $f_1, f_2 : D \to K$ называются *неэквивалентными*

относительно действия группы $G$, если ни для какого $g \in G$ не выполняется равенство $f_1(d) = f_2(g(d))$ при всех $d \in D$.
**1.27.** (Теорема Пойа.) Число всех неэквивалентных относительно действия группы $G$ на множестве $D$ функций $f : D \to K$ равно числу $P_G(|K|, |K|, \ldots, |K|)$, где $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — цикловой индекс группы $G$.
**1.28.** Для $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, *числом Стирлинга второго рода* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называется количество способов разбиения $n$-элементного множества на $k$ непустых подмножеств. (Порядок следования подмножеств не учитывается.) *Числом Стирлинга первого рода* $\left[ {n \atop k} \right]$ называется количество способов представления $n$-элементного множества в виде $k$ циклов.
**1.29.** Для $q \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, *$q$-биномиальным коэффициентом Гаусса* называется выражение

$$\left[ {n \atop k} \right]_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}\,,$$

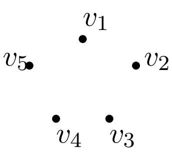
где $[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [n]_q$ и $[k]_q = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{k-1}$.

## Графы

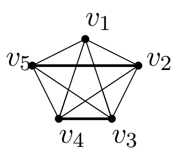
**1.30.** *Графом* $G = (V, R)$ с множеством вершин $V$ и множеством ребер $R$ называется пара $(V, R)$, где $V$ — конечное множество, а $R \subset \mathbb{C}_V^2$. (Здесь $\mathbb{C}_V^2$ — множество всех двухэлементных подмножеств множества $V$.) Граф удобно представлять как множество точек на плоскости или в пространстве, некоторые пары которых соединены дугами.
**1.31.** Вершина $v$ и ребро $e = \{w_1, w_2\}$ графа $G = (V, R)$ называются *инцидентными*, если $w_1 = v$ или $w_2 = v$.
**1.32.** *Матрицей смежности* графа $G = (V, R)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, называется $n \times n$-матрица $S_G = \|s_{ij}\|$ такая, что $s_{ij} = 1$, если $\{v_i, v_j\} \in R$, и $s_{ij} = 0$, если $\{v_i, v_j\} \notin R$.
**1.33.** *Матрицей инцидентности* графа $G = (V, R)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $R = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$, называется $n \times r$-матрица $I_G = \|i_{jk}\|$ такая, что $i_{jk} = 1$, если вершина $v_j$ и ребро $e_k$ инцидентны, и $i_{jk} = 0$ в противном случае.
**1.34.** Обозначения некоторых графов:
$K_n$ — *полный* граф на $n$ вершинах ($|V| = n$, $R = \mathbb{C}_V^2$),

$N_n$ — *вполне несвязный* граф на $n$ вершинах ($|V| = n$, $R = \varnothing$),
$L_n$ — *линейный* граф на $n$ вершинах ($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$, $R = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$),
$C_n$ — *циклический* граф на $n$ вершинах ($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$, $R = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$),
$W_n$ — *колесо* на $n$ вершинах ($V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $R = \{\{v_k, v_{k+1} : k = 1, 2, \ldots, n-2\} \cup \{\{v_n, v_k\} : k = 1, 2, \ldots, n-1\}$).

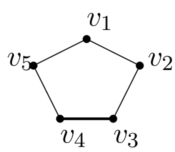
$N_5$



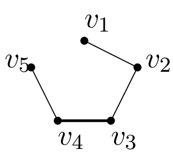

$K_5$



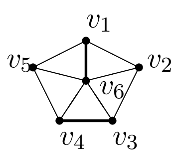

$C_5$



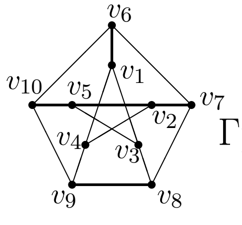

$L_5$




$W_6$




**1.35.** *Графом Петерсена* называется граф $G = (V, R)$ такой, что $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\}$, $R = \{\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_5, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_9\}, \{v_5, v_{10}\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_8, v_9\}, \{v_9, v_{10}\}, \{v_{10}, v_6\}\}$.

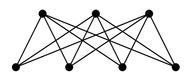



Граф Петерсена

**1.36.** Пусть $G = (V, R)$ — граф. Граф $\overline{G} = (V, \mathbb{C}_V^2 \setminus R)$ называется *дополнительным* к графу $G$. То есть множество вершин у графа $\overline{G}$ такое же, как у $G$, а ребрами соединены те и только те пары вершин, которые не были соединены ребрами в $G$.

**1.37.** *Степень вершины* $v$ в графе $G = (V, R)$ — это число $\deg_G v = |\{w \in V : \{v, w\} \in R\}|$ („число ребер, выходящих из вершины $v$“).

**1.38.** Граф $G = (V, R)$ называется *двудольным*, если множество его вершин $V$ можно разбить на два непустых подмножества $V_1$ и $V_2$ (доли) таких, что если $\{v, w\} \in R$, то либо $v \in V_1$, $w \in V_2$, либо $v \in V_2$, $w \in V_1$. Если к тому же для всех $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ выполняется $\{v_1, v_2\} \in R$, то граф $G$ называется *полным двудольным* графом с долями $V_1$ и $V_2$. Если $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$, то полный двудольный граф с долями $V_1$ и $V_2$ обозначается $K_{m,n}$. То есть в полном двудольном графе каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, а внутри долей ребер нет.



$K_{3,4}$

**1.39.** Граф $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{R})$ называется реберным графом графа $G = (V, R)$, если между множествами $\tilde{V}$ и $R$ существует биективное соответствие $\varphi : \tilde{V} \to R$ такое, что $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\} \in \tilde{R} \Leftrightarrow \varphi(\tilde{v}_1)$ и $\varphi(\tilde{v}_2)$ — смежные ребра графа $G$ (то есть имеют общую вершину). Если граф $G$ изображен на плоскости в виде конечного множества точек в качестве его вершин, некоторые пары которых соединены гладкими дугами, рассматриваемыми в качестве ребер графа, то реберный граф $\tilde{G}$ графа $G$ строится так: на каждом ребре графа $G$ выбирается точка (вершина графа $\tilde{G}$), а ребрами в графе $\tilde{G}$ соединяются те из выбранных точек, которые лежат на смежных ребрах графа $G$.

**1.40.** Графы $G_j = (V_j, R_j)$ $(j = 1, 2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $\varphi : V_1 \to V_2$, что справедливы две следующие импликации: 1) $\{v, w\} \in R_1 \Longrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in R_2$, 2) $\{v, w\} \notin R_1 \Longrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \notin R_2$.

**1.41.** Графы $G_j = (V_j, R_j)$ $(j = 1, 2)$ называются *гомеоморфными*, если один из них может быть получен из другого путем удаления некоторых вершин степени 2 и добавления в некоторые ребра вершин степени 2.

**1.42.** *Объединение* графов $G_1 = (V_1, R_1)$ и $G_2 = (V_2, R_2)$ — это граф $G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, R_1 \cup R_2)$ (в предположении $V_1 \cap V_2 = \varnothing$). То есть объединение $G_1 \cup G_2$ двух графов состоит из всех вершин обоих графов и из всех их ребер.

**1.43.** *Сумма* графов $G_1 = (V_1, R_1)$ и $G_2 = (V_2, R_2)$ — это граф $G_1 + G_2 := (V_1 \cup V_2, R_1 \cup R_2 \cup \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$ (в предположении $V_1 \cap V_2 = \varnothing$). То есть множество вершин суммы $G_1 + G_2$ двух графов состоит из всех вершин обоих графов, а множество ребер — из всех ребер обоих графов и ребер, соединяющих каждую вершину одного графа с каждой вершиной другого.

**1.44.** *Произведение* графов $G_1 = (V_1, R_1)$ и $G_2 = (V_2, R_2)$ — это граф $G_1 \cdot G_2 = (V, R)$, в котором $V = V_1 \times V_2$ и $\{(v_1, v_2), (w_1, w_2)\} \in R$ тогда и только тогда, когда либо $v_1 = w_1$ и $\{v_2, w_2\} \in R_2$, либо $v_2 = w_2$ и $\{v_1, w_1\} \in R_1$. Таким образом, множество вершин произведения $G_1 \cdot G_2$— это множество пар $(v_1, v_2)$, где $v_1$— вершина графа $G_1$, $v_2$ — вершина графа $G_2$. В графе $G_1 \cdot G_2$ вершины $(v_1, v_2)$ и $(w_1, w_2)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $v_1$ и $w_1$ — это одна и та же вершина графа $G_1$, а вершины $v_2$ и $w_2$ в графе $G_2$ соединены ребром, либо, наоборот, когда $v_2$ и $w_2$ — это одна и та же вершина графа $G_2$, а вершины $v_1$ и $w_1$ в графе $G_1$ соединены ребром.

**1.45.** Пусть $K$ — конечное множество. *Правильным раскрашиванием* графа $G = (V, R)$ называется функция $\varphi : V \to K$ такая, что если $\{v_1, v_2\} \in R$, то $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$. ($K$ — множество имеющихся в наличии красок.) То есть каждая вершина графа раскрашивается некоторой краской, причем любые две вершины, соединенные ребром, должны быть покрашены в разный цвет.

**1.46.** *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа $G$ называется число $\chi(G) = \min\limits_{\varphi} |\{\varphi(v) : v \in V\}|$. Здесь $|\{\varphi(v) : v \in V\}|$ — число красок, использованных при правильном раскрашивании графа $G$, а минимум берется по всем правильным раскрашиваниям графа. Таким образом, хроматическое число — это наименьшее число красок, с помощью которых граф можно правильно раскрасить.

**1.47.** Граф называется *критическим*, если удаление любой из его вершин вместе с выходящими из нее ребрами приводит к графу с меньшим хроматическим числом.

**1.48.** *Элементарное стягивание* по данному ребру $\{v, w\}$ графа $G$ — это такое преобразование этого графа, при котором вершины $v$ и $w$ отождествляются (так что соединяющее их ребро пропадает), а возникающие, возможно, при этом кратные ребра также отождествляются. Формально, результат стягивания графа $G = (V, R)$ по ребру $\{v, w\}$ — это граф $G_0 = (V_0, R_0)$, в котором $V_0 = (V \setminus (\{v\} \cup \{w\})) \cup \{v_0\}$, где $v_0 \notin V$, а $R_0$ состоит из всех ребер $\{v', v''\}$, принадлежащих $R$, в которых оба $v'$ и $v''$ не равны ни $v$, ни $w$, а также из пар вида $\{v_0, u\}$, если $\{v, u\}$ или $\{w, u\}$ принадлежит $R$.

**1.49.** *Хроматический многочлен* $P_G(k)$ графа $G$ — это число правильных раскрашиваний графа не более, чем $k$ красками. (При подсчете раскрашиваний вершины графа считаются различимыми.) Хроматический многочлен полного графа $K_n$ равен $k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$. Хроматический многочлен произвольного графа можно искать с помощью следующего алгоритма. Пусть граф $G$ не является полным, $v$ и $w$ — две его несмежные вершины. Обозначим $G'$ граф, полученный из $G$ добавлением в множество $R$ ребра $\{v, w\}$, а $G''$ — граф, получающийся из графа $G'$ элементарным стягиванием по ребру $\{v, w\}$. Тогда $P_G(k) = P_{G'}(k) + P_{G''}(k)$.

**1.50.** *Путь* $l$ в графе $G$ — это конечная последовательность ребер графа вида $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_n, v_{n+1}\}$. Число $n$ называется *длиной* пути. Говорят, что путь $l$ *соединяет* вершины $v_1$ и $v_{n+1}$ графа $G$. Если $v_{n+1} = v_1$, путь называется *замкнутым*.

**1.51.** Граф $G = (V, R)$ называется *связным*, если всякие две его вершины могут быть соединены путем.

**1.52.** *Компонентой* графа называется всякий максимальный связный подграф графа.

**1.53.** Ребро графа называется *мостом*, если удаление его увеличивает число компонент графа.

**1.54.** Граф $G = (V, R)$ называется *эйлеровым*, если существует замкнутый путь, проходящий по каждому ребру точно один раз. Другими словами, если существует замкнутый путь, длина которого равна $|R|$, и каждое ребро графа является звеном этого пути. Такой путь называется *эйлеровой цепью*. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна (*теорема Эйлера*).

**1.55.** Эйлеров граф называется *произвольно вычерчиваемым* из вершины $v$, если выходя из вершины $v$ и идя по ребрам графа произвольным образом пока есть возможность, не проходя при этом дважды по одному

ребру, мы всегда получим эйлерову цепь.
**1.56.** Граф $G = (V, R)$ называется *гамильтоновым*, если существует замкнутый путь, проходящий через каждую его вершину точно один раз. Такой путь называется *гамильтоновым циклом*. Известно следующее достаточное условие гамильтоновости графа (*теорема Дирака*): если $|V| > 2$ и $\deg v \geqslant |V|/2$ для всякой вершины $v$ графа $G = (V, R)$, то граф $G$ гамильтонов.
**1.57.** Пусть $V$ — конечное множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, $R$ — конечное множество гладких дуг, каждая из которых соединяет какую-нибудь пару различных точек множества $V$ (не обязательно ка́ждая пара различных точек соединена дугой), причем никакая из точек множества не является внутренней точкой никакой из дуг и любые две дуги не имеют общих внутренних точек. Пара $G = (V, R)$ называется *плоским графом* с множеством вершин $V$ и множеством ребер $R$.
**1.58.** *Планарным* называется граф, изоморфный плоскому графу. Граф является планарным тогда и только тогда, когда в нем нет подграфа, гомеоморфного либо графу $K_5$, либо графу $K_{3,3}$ (*критерий Понтрягина–Куратовского*). Если $G = (V, R)$ — связный планарный граф, то $|R| \leqslant 3|V| - 6$.

## Вероятность

**1.59.** *Дискретным вероятностным пространством* называется пара $(\Omega, p)$, где $\Omega$ — произвольное конечное или счетное множество, называемое *пространством элементарных исходов* или *выборочным пространством*, а $p$ — функция на пространстве $\Omega$, удовлетворяющая условиям: i) $p(\omega) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$, ii) $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$, называемая *вероятностью*. Всякая точка $\omega$ называется элементарным исходом, а число $p(\omega)$ — вероятностью элементарного исхода $\omega$.
**1.60.** *Случайным событием* $A$ в дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, p)$ называется всякое подмножество пространства элементарных исходов $\Omega$. В частности, пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием, а $\Omega$ — *достоверным* событием. *Вероятностью случайного события* $A$ называется число $P(A) := \sum\limits_{\omega\in A} p(\omega)$.

1) Для любых событий $A$ и $B$ имеет место равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

В частности, если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*свойство аддитивности вероятности*).

2) Если $B \subset A$, то $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$ , в частности, $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

3) Вероятности невозможного и достоверного событий равны 0 и 1 соответственно: $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

**1.61.** Говорят, что на пространстве элементарных исходов задано *равномерное распределение вероятностей*, если вероятности всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$ одинаковы. Тогда для всякого случайного события $A$ имеет место равенство $P(A) = |A|/|\Omega|$.

**1.62.** Пусть $A$ и $B$ — два случайных события одного и того же вероятностного пространства $(\Omega, p)$. Они называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$.

**1.63.** Пусть $A$ и $B$ — два случайных события одного и того же вероятностного пространства $(\Omega, p)$, причем $P(B) \neq 0$. *Условной вероятностью* события $A$ при условии, что событие $B$ произошло, называется число $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$. В силу этого определения имеет место следующая *теорема умножения вероятностей*: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

**1.64.** Случайные события $A$ и $B$ называются *независимыми*, если выполняется равенство $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

**1.65.** Случайные события $A_1, A_2, \dots A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого $m \leqslant n$ и любых номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ выполняется равенство $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_m})$.

**1.66.** *Полной группой событий* называется всякое разбиение пространства элементарных исходов $\Omega$, то есть такое не более, чем счетное, семейство попарно несовместных случайных событий $\{A_k\}_{k=1}^N$, что $\bigcup_{k=1}^N A_k = \Omega$.

**1.67.** Пусть $\{A_k\}_{k=1}^N$ — полная группа событий вероятностного пространства $(\Omega, p)$, $B \subset \Omega$. Тогда имеют место следующие формула полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

и формула Байеса

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)}\,.$$

**1.68.** *Случайной величиной* на вероятностном пространстве называется всякая функция на выборочном пространстве с вещественными значениями $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$.

**1.69.** *Индикатором* случайного события $A$ в вероятностном пространстве $(\Omega, p)$ называется случайная величина $I_A$, определяемая равенствами: $I_A = 1$ для всех $\omega \in \Omega$, $I_A = 0$ для всех $\omega \notin \Omega$.

**1.70.** *Таблицей распределения* случайной величины $\xi$ называется таблица вида

| $\xi$ | $a_1$ | $\ldots$ | $a_k$ | $\ldots$ | $a_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $\ldots$ | $f_k$ | $\ldots$ | $f_m$ |

,

где $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m$ — множество значений случайной величины $\xi$ (оно конечно или счетно, поскольку $\Omega$ не более, чем счетно), $f_k = P(\xi = a_k)$ — вероятность того, что случайная величина $\xi$ принимает значение $a_k$. В верхней строке таблицы все $a_j$ разные, имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} f_k = 1$.

**1.71.** Говорят, что случайная величина $\xi$ имеет *биномиальное* распределение с параметрами $n$ и $p$, где $n$ — натуральное, а $0 < p < 1$, если $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

**1.72.** Говорят, что случайная величина $\xi$ имеет *геометрическое* распределение с параметром $q$, где $0 < q < 1$, если $P(\xi = k) = (1-q)q^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

**1.73.** Говорят, что случайная величина $\xi$ имеет *пуассоновское* распределение с параметром $\lambda$, где $\lambda > 0$, если $P(\xi = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

**1.74.** Случайные величины называются *одинаково распределенными*, если их таблицы распределения одинаковы.

**1.75.** *Таблицей совместного распределения* двух случайных величин $\xi$ и

$\eta$ называется таблица вида

| $\xi, \eta$ | $b_1$ | $\dots$ | $b_j$ | $\dots$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $h_{11}$ | $\cdots$ | $h_{1j}$ | $\cdots$ | $h_{1n}$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a_i$ | $h_{i1}$ | $\cdots$ | $h_{ij}$ | $\cdots$ | $h_{in}$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a_m$ | $h_{m1}$ | $\cdots$ | $h_{mj}$ | $\cdots$ | $h_{mn}$ |

где $h_{ij} = P(\xi = a_i, \eta = b_j)$. Пусть таблицы распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$ таковы:

| $\xi$ | $a_1$ | $\dots$ | $a_i$ | $\dots$ | $a_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $\dots$ | $f_i$ | $\dots$ | $f_m$ |

,

| $\eta$ | $b_1$ | $\dots$ | $a_j$ | $\dots$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $g_1$ | $\dots$ | $g_j$ | $\dots$ | $g_n$ |

.

Тогда имеют место равенства $f_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}$, $g_j = \sum_{i=1}^{m} h_{ij}$.

**1.76.** *Математическим ожиданием* (*средним*) случайной величины $\xi$ называется число $M\xi := \sum\limits_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega)$. Имеет место формула $M\xi := \sum\limits_{k=1}^{m} a_k f_k$, если таблица распределения случайной величины такова, как указано в пункте 1.70. Для всех функций $\varphi : R \to R$ имеет место формула $M\varphi(\xi) := \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi(a_k) f_k$.

Отметим следующие свойства среднего:

1) $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$, $M(c\xi) = cM(\xi)$ для любого $c \in R$ (*свойство линейности*),

2) M(c)=c (если случайная величина принимает во всех точках пространства одно и то же значение, то ее среднее равно этому значению).

**1.77.** *Моментом порядка* $k$ случайной величины $\xi$ называется число $M\xi^k$.

**1.78.** *Дисперсией* случайной величины $\xi$ называется неотрицательное число $D\xi = M[(\xi - M\xi)^2]$. Дисперсия величины $\xi$ выражается через ее моменты по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Имеет место формула $D\xi = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k^2 f_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k f_k\right)^2$, если таблица распределения случайной величины такова, как указано в пункте 1.70. Отметим следующие свойства дисперсии:

1) $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$, $\quad D(\xi + c) = D(\xi)$, $\quad D(c) = 0$ для любого $c \in R$,

2) $D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, для любых случайных величин $\xi$ и $\eta$, где $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ — ковариация случайных величин $\xi$ и $\eta$ (см. 1.79). Если $\xi$ и $\eta$ независимы, то $D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

**1.79.** *Ковариацией* двух случайных величин $\xi$ и $\eta$ называется число $\mathrm{cov}(\xi,\eta) := M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$. Имеет место равенство $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$.

*Коэффициентом корреляции* случайных величин $\xi$ и $\eta$ называется число $\rho(\xi,\eta) := \mathrm{cov}(\xi,\eta)/(\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta})$. Имеет место неравенство $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$. Если $|\rho(\xi,\eta)| = 1$, то $\xi(\omega) = a\eta(\omega) + b$ для некоторых постоянных $a$ и $b$ и всех $\omega$, имеющих ненулевую вероятность.

**1.80.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ на одном и том же вероятностном пространстве называются *независимыми*, если для любых значений $a$ и $b$ величин $\xi$ и $\eta$ соответственно выполняются равенства $P(\xi = a, \eta = b) = P(\xi = a)P(\eta = b)$. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на одном и том же вероятностном пространстве называются *независимыми в совокупности*, если для любых значений $a, b, \ldots, x$ величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответственно выполняются равенства $P(\xi_1 = a, \xi_2 = b, \ldots, \xi_n = x) =$
$= P(\xi_1 = a)P(\xi_2 = b) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n = x)$.

**1.81.** (*Свойство мультипликативности среднего*) Если случайные величины $\xi$ и $\eta$ на одном и том же вероятностном пространстве независимы и обладают конечными средними, то их произведение также обладает конечным средним, равным произведению средних случайных величин $\xi$ и $\eta$: $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

**1.82.** Пусть $(\Omega_0, p_0)$ — вероятностное пространство, соответствующее случайному эксперименту $\mathcal{E}$ с двумя исходами, условно называемыми „успехом“ ($у$) и „неудачей“ ($н$):

$$\Omega_0 = \{у,н\}\,,\ p_0(у) = p\,,\ p_0(н) = q\,,\ p > 0\,,\ q > 0\,,\ p + q = 1\,.$$

Схеме повторного выполнения ($n$ раз) эксперимента $\mathcal{E}$ соответствует вероятностное пространство $\mathcal{B}(n,p) = (\Omega_n, p_n)$ такое, что $\Omega_n$ является $n$-кратной декартовой степенью множества $\Omega_0$ (то есть элементарными исходами являются все последовательности $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ длины $n$, составленные из букв $у$ и $н$), а вероятность $p_n$ дается формулой

$$p_n((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)) = p_0(\varepsilon_1) \cdot p_0(\varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot p_0(\varepsilon_n)\,.$$

Работая с вероятностным пространством $\mathcal{B}(n,p)$, говорят, что рассматривается *схема Бернулли $n$ независимых испытаний с вероятностью успеха в одном испытании $p$*.

**1.83.** Случайная величина $S_n$ на пространстве $\mathcal{B}(n,p)$, равная числу успехов в $n$ испытаниях, имеет биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$. Таким образом (1.71), $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ (*формула Бернулли*).

Имеют место следующие предельные теоремы для схемы Бернулли.

1) (*Теорема Муавра–Лапласа*) Для всех $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ при $n \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$P(np + a\sqrt{npq} < S_n < np + b\sqrt{npq}) \to \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-x^2/2} dx\,.$$

2) (*Теорема Пуассона*) Пусть $\lambda$ — фиксированное положительное число, $S_n$ — число успехов в $n$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $\lambda/n$. Тогда для любого целого неотрицательного $k$ выполняется

$$P(S_n = k) \to e^{-\lambda}\lambda^k/k! \ \ (n \to \infty)\,.$$

**1.84.** Если $\eta_j$, $j = 1, 2, \ldots$, и $\eta$ — случайные величины, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, p)$, то говорят, что последовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится по вероятности* к случайной величине $\eta$ (пишут: $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$), если для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ выполняется предельное соотношение $P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

**1.85.** Последовательность случайных величин $\xi_i$ $i = 1, 2, \ldots$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, p)$, *удовлетворяет слабому закону больших чисел*, если существует постоянная $c$ такая, что $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n \xrightarrow{P} c$ при $n \to \infty$.

**1.86.** Пусть $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве и принимающих значения из множества $J \subset \mathbf{Z}$. Говорят, что эта последовательность образует *цепь Маркова* на множестве состояний $\{E_j\}_{j\in J}$, если для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любых $j_0, j_1, \ldots, j_{n+1} \in J$ выполняется условие

$$P(\xi_{n+1} = j_{n+1} | \xi_0 = j_0, \xi_1 = j_1, \ldots, \xi_n = j_n) = P(\xi_{n+1} = j_{n+1} | \xi_n = j_n)\,.$$

**1.87.** Обозначим $p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i)$, $i, j \in J$. Если величины $p_{ij}$ не зависят от $n$, то цепь Маркова называется *однородной*. Выполняется равенство $\sum_{j \in J} p_{ij} = 1$ для всех $i \in J$. Матрица $\mathsf{P} = \|p_{ij}\|$ называется *матрицей перехода* для цепи Маркова.
**1.88.** Обозначим $\gamma_j = P(\xi_0 = j)$. Вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{|J|})$ называется *вектором начальных состояний*. Справедливо равенство

$$P(\xi_0 = j_0, \xi_1 = j_1, \xi_2 = j_2, \ldots, \xi_n = j_n) = \gamma_{j_0} p_{j_0 j_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} .$$

**1.89.** Обозначим $p_{ij}(n) = P(\xi_{m+n} = j | \xi_m = i)$, $i, j \in J$. Матрица $\mathsf{P}(n) = \|p_{ij}(n)\|$ называется *матрицей перехода за* $n$ *шагов* и вычисляется по формуле $\mathsf{P}(n) = \mathsf{P}^n$.
**1.90.** Состояние $E_j$ называется *достижимым* из состояния $E_i$, если выполняется неравенство $p_{ij}(n) > 0$ для некоторого натурального $n$.
**1.91.** Состояние $E_i$ называется *существенным*, если для каждого состояния $E_j$, достижимого из $E_i$, $E_i$ достижимо из $E_j$. В противном случае состояние $E_i$ называется *несущественным*.
**1.92.** Состояние $E_j$ называется *поглощающим*, если $p_{jj} = 1$.
**1.93.** (*Свойство эргодичности марковских цепей*) Если при некотором $n_0$ все элементы $p_{ij}(n_0)$ матрицы $\mathsf{P}^{n_0}$ (строго) положительны, то для всех $i, j \in J$ существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j .$$

Вектор предельных вероятностей $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{|J|})$ является *стационарным* в том смысле, что он удовлетворяет системе

$$\sum_{k \in J} \pi_k = 1 , \quad \sum_{k \in J} \pi_k p_{kj} = \pi_j , \quad j \in J .$$

# 2 Решение типовых задач

**2.1.** Сколько 4-значных чисел можно составить с помощью цифр числа 1231534?

*Решение.* Пусть $A$ — искомое множество чисел, $A_1 = \{$в числе 4 разные цифры$\}$, $A_2 = \{$в числе две повторяющиеся цифры и две другие разные$\}$, $A_3 = \{$в числе две пары одинаковых цифр$\} = \{$в числе две 1 и две 3$\}$.

Так как число 1231534 содержит пять разных цифр, то $|A_1| = A_5^4 = 120$ в силу 1.8. Подсчитаем $|A_2|$. Повторяющуюся цифру можно выбрать двумя способами (1 или 3), расставить две одинаковые цифры на четырех местах можно $C_4^2 = 6$ способами. Выбрать две другие разные цифры из оставшихся четырех различных цифр $(2, 3, 4, 5$ или $1, 2, 4, 5)$ можно $C_4^2$ способами, а расставить их на двух оставшихся местах можно двумя способами. По правилу умножения $|A_2| = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 144$. Для подсчета $|A_3|$ нужно только указать места, на которых будут стоять, например, единицы. Поэтому $|A_3| = C_4^2$. Тогда по правилу сложения $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 270$.

**2.2.** Сколькими способами могут выпасть 3 игральные кости? (Рассмотрите варианты: а) кости различимы, б) кости неразличимы.) В каком числе случаев выпадет:
1) точно одна „шестерка“, 2) хотя бы одна „шестерка“, 3) не меньше двух „шестерок“?

*Решение.* Обозначим $X = \{$все возможные способы выпадения трех костей$\}$, $A = \{$выпала точно одна „шестерка“$\}$, $B = \{$выпала хотя бы одна „шестерка“$\}$, $C = \{$выпало не меньше двух „шестерок“$\}$.

Сначала рассмотрим случай различимых костей. Согласно 1.7 $|X| = 6^3 = 216$. Вычислим $|A|$. Укажем тремя способами номер кости, на которой выпала „шестерка“. Тогда на двух оставшихся костях грани с номерами от 1 до 5 могут выпасть $5^2$ способами в силу 1.7. По правилу умножения 1.5 находим, что $|A| = 3 \cdot 5^2 = 75$.

Для вычисления $|B|$ используем правило дополнения 1.2. Обозначим $\overline{B} = \{$не выпала ни одна „шестерка“$\}$. Согласно 1.7 $|\overline{B}| = 5^3$. Тогда $|B| = |X| - |\overline{B}| = 6^3 - 5^3 = 91$.

Обозначим $C_1 = \{$выпало 2 „шестерки“$\}$, $C_2 = \{$выпало 3 „шестерки“$\}$. Тогда $|C_1| = 3 \cdot 5 = 15$, где 3 — число способов указать номер кости, на которой не выпала „шестерка“, а 5 — число способов указать грань, выпавшую на этой кости; $|C_2| = 1$. По правилу сложения $|C| = |C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| = 16$.

Перейдем к случаю неразличимых костей. Рассмотрим 6 ящиков, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 6$, и 3 неразличимых шара. Для каждого $i = 1, 2, 3$ положим в ящик с номером $i$ столько шаров, сколько раз грань с номером $i$ выпала при подбрасывании трех костей. Тогда $|X|$ — это число способов распределить 3 неразличимых шара по шести ящикам. Согласно 1.14 $|X| = C^3_{3+6-1} = C^3_8 = 56$.

Поскольку указать кость, на которой выпала „шестерка“, можно одним способом (кости неразличимы!), то $|A|$ — это число способов распределить 2 неразличимых шара по пяти ящикам (с номерами $1, 2, 3, 4, 5$). Так что $|A| = C^2_{2+5-1} = C^2_6 = 15$.

Сейчас $|\overline{B}|$ — это число способов распределить 3 неразличимых шара по пяти ящикам (с номерами $1, 2, 3, 4, 5$). Значит, $|\overline{B}| = C^3_{3+5-1} = C^3_7 = 35$ и $|B| = |X| - |\overline{B}| = 21$. Для подсчета $|C_1|$ нужно только указать, какая цифра, отличная от „шестерки“, выпадет на одной из костей. Поэтому $|C_1| = 5$, $|C_2| = 1$, $|C| = |C_1| + |C_2| = 6$.

**2.3.** Каким числом способов можно разложить $k$ различных шаров по $n$ занумерованным ящикам так, чтобы не было пустых ящиков.

*Решение.* Обозначим $A$ — искомое множество распределений шаров по ящикам, $\overline{A} = \{$хотя бы один ящик пуст$\}$, $A_i = \{i$–й ящик пуст$\}$. Тогда $\overline{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, и по формуле включения–исключения 1.4

$$|\overline{A}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right| .$$

Пользуясь 1.13, видим, что $|A_i| = (n-1)^k$ $(\forall\ i)$ (число способов разложить $k$ шаров по $n-1$ ящику (без $i$–го ящика)). Аналогично $|A_i \cap A_j| = (n-2)^k$ $(\forall\ i \neq j)$ (число способов разложить $k$ шаров по $n-2$ ящикам (без $i$–го и $j$–го ящиков), $\ldots$ , $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-1}}| = 1$ (все шары в одном ящике), $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 0$ (не может быть так, чтобы ни в одном ящике не было шаров). Согласно 1.10 выбрать $s$ пустых ящиков из $n$ можно $C^s_n$ способами. Поэтому, используя правило дополнения 1.2, находим

$$|A| = n^k - |\overline{A}| = \\ = n^k - C^1_n(n-1)^k + C^2_n(n-2)^k - C^3_n(n-3)^k + \ldots + (-1)^{n-1}C^{n-1}_n .$$

**2.4.** Выразите производящую функцию $B(x)$ последовательности $\{b_n\}$ через производящую функцию $A(x)$ последовательности $\{a_n\}$, если

$$b_0 = a_0\,,\ b_1 = a_1\,,\quad b_n = (-1)^n a_n - 4a_{n-2}\quad (n \geqslant 2)\,.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n = \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}((-1)^n a_n - 4a_{n-2})x^n = \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(-x)^n - 4x^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \\
&= 2a_1 x + \left(a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(-x)^n\right) - 4x^2 A(x) = \\
&= 2A'(0)x + A(-x) - 4x^2 A(x)\,.
\end{aligned}$$

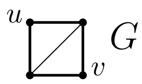
**2.5.** Сколько подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ обладают тем свойством, что в них не входят никакие два последовательных натуральных числа?

*Решение.* Пусть $B_n$ — множество искомых подмножеств, $B_n'$— множество тех из них, которые не содержат число $n$, $B_n''$— множество тех подмножеств из $B_n$, которые содержат число $n$. Ясно, что $B_n = B_n' \cup B_n''$, $B_n' \cap B_n'' = \varnothing$, поэтому $|B_n| = |B_n'| + |B_n''|$. Обозначим $|B_n| = u_n$. Поскольку $B_n' = B_{n-1}$, то $|B_n'| = u_{n-1}$, а в $B_n''$ столько подмножеств, сколько существует подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, не содержащих никаких двух последовательных чисел. Таким образом $|B_n''| = u_{n-2}$. Следовательно, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, то есть последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и последовательность чисел Фибоначчи. Найдем первые два члена последовательности

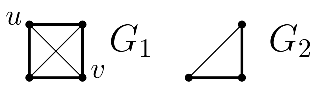
$\{u_n\}$:

$$u_1 = |\{\varnothing, \{1\}\}| = 2\,,$$
$$u_2 = |\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}| = 3\,.$$

Поскольку $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, то $u_n = f_{n+2}$.
**2.6.** Найти хроматический многочлен графа




*Решение.* Обозначим




Граф $G_1$ получается из графа $G$ добавлением ребра $\{u, v\}$, а граф $G_2$ получается из графа $G_1$ элементарным стягиванием по ребру $\{u, v\}$. Тогда согласно 1.49 имеем $P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$. Так как $G_1 = K_4$, $G_2 = K_3$, то снова согласно 1.49 $P_{G_1}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$, $P_{G_2}(k) = k(k-1)(k-2)$. Следовательно, $P_G(k) = k(k-1)(k-2)^2$.
**2.7.** Бросили 2 монеты, а потом из колоды в 36 карт наугад извлекли столько карт, сколько гербов появилось на монетах. Чему равна вероятность появления точно одного туза?

*Решение.* Введем события: $A_i = \{$на монетах выпало $i$ гербов$\} = \{$из колоды извлекли $i$ карт$\}$, $i = 0, 1, 2$, $B = \{$среди извлеченных карт имеется точно один туз$\}$. События $A_0, A_1, A_2$ образуют полную группу событий (см. 1.66). Находим $P(A_0) = 1/4$, $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = 1/4$, $P(B|A_0) = 0$, $P(B|A_1) = 4/36 = 1/9$, $P(B|A_2) = 4 \cdot 32/C_{36}^2 = 64/315$. По формуле полной вероятности (1.67)

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) =$$
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{64}{315} \cdot \frac{1}{4} = \frac{67}{630}\,.$$

**2.8.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 2 белых (б) и 1 черный (ч), 3 б и 1 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящиках №1 и №2 наугад взяли по одному шару и положили их в ящик №3. Затем из ящика №3 наугад извлекли 2 шара. Известно, что среди извлеченных из ящика №3 шаров точно один белый. Найдите вероятность того, что из ящика №1 был извлечен белый шар.

*Решение.* Введем события: $Б_i = \{$из $i$-го ящика извлечен белый шар$\}$, $Ч_i = \{$из $i$-го ящика извлечен черный шар$\}$, $i = 1, 2$. Обозначим $A_1 = Б_1 \cap Б_2$, $A_2 = Б_1 \cap Ч_2$, $A_3 = Ч_1 \cap Б_2$, $A_4 = Ч_1 \cap Ч_2$, $B = \{$из третьего ящика извлечен один белый и один черный шар$\}$. Нужно найти $P(Б_1|B)$.События $A_1, A_2, A_3, A_4$ образуют полную группу событий (1.66). В силу независимости событий $Б_i$ и $Ч_j$ при $i \neq j$ их вероятности равны

$$P(A_1) = P(Б_1)P(Б_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$
$$P(A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \qquad P(A_4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Так как $Б_1 = A_1 \cup A_2$, причем $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $P(Б_1|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$. Условные вероятности $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$ найдем по формуле Байеса (1.67). Имеем

$$P(B|A_1) = P(B|A_4) = \frac{2 \cdot 4}{C_6^2} = \frac{8}{15},$$
$$P(B|A_2) = P(B|A_3) = \frac{3 \cdot 3}{C_6^2} = \frac{9}{15}.$$

Тогда

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(B|A_i)P(A_i)} =$$
$$= \frac{\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{15} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{15} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{12}} = \frac{48}{101}.$$

Аналогично находим $P(A_2|B) = 18/101$. В итоге, $P(Б_1|B) = 66/101$.

**2.9.** Симметричную монету бросают раз $n$ ($n = 2, 3$). Событие $A_n$ состоит в том, что герб выпал не более одного раза, а событие $B_n$ состоит в том, что герб и цена выпали не менее одного раза каждый. Независимы ли события $A_n$ и $B_n$?

*Решение.* При $n = 2$ имеем $\Omega_2 = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$, $A_2 = \{\text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$, $B_2 = \{\text{ГР}, \text{РГ}\}$. Тогда $A_2 \cap B_2 = B_2$ и

$$P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \neq P(A_2 \cap B_2).$$

События $A_2$ и $B_2$ зависимы (см. 1.64).

Для $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\Omega_3 = \{\text{ГГГ}, \text{ГГР}, \text{ГРГ}, \text{РГГ}, \text{ГРР}, \text{РГР}, \text{РРГ}, \text{РРР}\},\\
&A_3 = \{\text{РРР}, \text{ГРР}, \text{РГР}, \text{РРГ}\},\\
&B_3 = \{\text{ГРР}, \text{РГР}, \text{РРГ}, \text{ГГР}, \text{ГРГ}, \text{РГГ}\},\\
&A_3 \cap B_3 = \{\text{ГРР}, \text{РГР}, \text{РРГ}\},\\
&P(A_3) = \frac{1}{2}, \quad P(B_3) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $P(A_3 \cap B_3) = P(A_3)P(B_3)$, и события $A_3$ и $B_3$ независимы.

**2.10.** Найдите коэффициент корреляции между числом появлений 1 и числом появлений 2 при $n$ бросаниях игральной кости.

*Решение.* Введем случайные величины $\xi$ — число появлений 1 при $n$ бросаниях игральной кости, $\eta$ — число появлений 2 при $n$ бросаниях игральной кости, $\xi_i$ — число появлений 1 при $i$-м бросании игральной кости, $\eta_i$ — число появлений 2 при $i$-м бросании игральной кости, $i = 1, 2, \ldots, n$. Случайные величины $\{\xi_i\}_1^n$ независимы (1.80) и случайные величины $\{\eta_i\}_1^n$ независимы. Очевидно, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$. Вычислим математические ожидания и дисперсии введенных случайных величин по формулам из 1.76 и 1.78:

$$\begin{aligned}
&M\xi_i = M\eta_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6},\\
&M\xi = M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{n}{6}, \quad M\eta = \frac{n}{6},\\
&D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36},\\
&D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = \frac{5n}{36}.
\end{aligned}$$

(Последнее равенство имеет место в силу независимости случайных величин $\{\xi_i\}_1^n$.) Аналогично, $D\eta = 5n/36$. Далее,

$$M\xi\eta = M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i \cdot \sum_{i=1}^{n}\eta_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} M\xi_i\eta_j\,.$$

Легко видеть, что $\xi_i\eta_i \equiv 0$, а при $i \neq j$ имеет место следующее: $\xi_i\eta_j = 1$, если при $i$-м подбрасывании кости выпала 1, а при $j$-м — 2, $\xi_i\eta_j = 0$ в остальных случаях.

Поэтому

$$M\xi_i\eta_j = \frac{1}{36}\,, \quad M\xi\eta = \frac{n(n-1)}{36}\,.$$

Тогда согласно 1.79

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi\cdot M\eta = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}\,,$$
$$\varrho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{-n/36}{5n/36} = -\frac{1}{5}\,.$$

**2.11.** Пусть испытание Бернулли состоит в бросании 5 монет. Произведено 10 испытаний. Чему равна вероятность того, что в двух из испытаний выпадет максимальное число гербов, в одном — 4 герба, а в остальных — не более двух гербов в каждом?

*Решение.* Рассмотрим эксперимент $\mathcal{E}_1$, состоящий в бросании пяти монет. Введем случайные события $A = \{$выпало максимальное число гербов, то есть 5$\}$, $B = \{$выпало 4 герба$\}$, $C = \{$выпало не более двух гербов$\}$. Согласно формуле Бернулли (1.83)

$$P(A) = (1/2)^5 = 1/32\,, \quad P(B) = C_5^4\,(1/2)^4\,(1/2) = 5/32\,,$$
$$P(C) = C_5^0\,(1/2)^5 + C_5^1\,(1/2)\,(1/2)^4\,C_5^2\,(1/2)^2\,(1/2)^3 =$$
$$= (1+5+10)/32 = 1/2\,.$$

Теперь рассмотрим эксперимент $\mathcal{E}_2$, состоящий в том, что 10 раз последовательно осуществляется эксперимент $\mathcal{E}_1$, то есть 10 раз бросают по 5 монет. Обозначим $V$ случайное событие, состоящее в том, что в двух из 10 повторений эксперимента $\mathcal{E}_1$ произойдет событие $A$, в одном — $B$, в семи — $C$. Указать 2 повторения эксперимента $\mathcal{E}_1$, в которых произошло событие

$A$, можно $C_{10}^2$ способами, указать эксперимент $\mathcal{E}_1$ (из оставшихся восьми), в котором произошло событие $B$, можно восемью способами. Поэтому

$$P(V) = C_{10}^2 \cdot 8 \cdot (1/32)^2 \cdot (5/32) \cdot (1/2)^7 = 225/2^{19}\,.$$

Так что событие $V$ весьма маловероятное.

# Комбинаторика

## 3 Правила сложения и умножения

**3.1.**$^\circ$ Имеется 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и одну марку для посылки письма?
**3.2.**$^\circ$ На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться в гору и спуститься с нее? А так, чтобы подниматься и спускаться по разным путям?
**3.3.**$^\circ$ Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и одной и той же вертикали?
**3.4.**$^\circ$ На выставке имеется 15 пейзажей, 12 портретов и 10 натюрмортов. Сколькими способами можно выбрать две картины разных жанров, чтобы поместить их на афишу?
**3.5.**$^\circ$ Сколько делителей имеет число 75600, включая 1 и самого себя?
**3.6.**$^\circ$ Сколько диагоналей в выпуклом 17-угольнике?
**3.7.**$^\circ$ Существует ли выпуклый многоугольник с 1) 34, 2) 35 диагоналями?

## 4 Выборки с возвращением

**4.1.**$^\circ$ Сколько существует шестизначных чисел:
1) в десятичной системе счисления, 2) в $d$-ичной системе счисления?
**4.2.**$^\circ$ Шифр в автоматической камере хранения состоит из пяти цифр. Сколько существует разных шифров?

**4.3.**$^\circ$ Автомобильные номера состоят из 2 букв и 5 цифр. Сколько машин можно снабдить различными номерами, если используются 25 букв и все цифры?
**4.4.**$^\circ$ Код замка состоит из трех цифр и двух букв. Сколько существует комбинаций кода, если в кодировании могут участвовать все цифры и 5 букв?
**4.5.** Найдите алгоритм перебора всех выборок с возвращением объема $k$ из генеральной совокупности объема $n$.

## 5 Выборки без возвращения

**5.1.**$^\circ$ Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков (русского, английского, французского, немецкого, итальянского) на любой другой из этих языков?
**5.2.**$^\circ$ Сколькими способами можно выбрать из колоды карт в 52 карты по одной карте каждой масти так, чтобы наименования вынутых карт были разными?
**5.3.**$^\circ$ В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?
**5.4.**$^\circ$ Студенты изучают 10 предметов. В среду у них 3 разные пары. Сколькими способами можно составить расписание занятий на среду?
**5.5.** Найдите алгоритм перебора всех выборок без возвращения объема $k$ из генеральной совокупности объема $n$.

## 6 Перестановки

**6.1.**$^\circ$ Сколькими способами могут разместиться в очереди к кассе 5 человек?
**6.2.**$^\circ$ Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг? Тот же вопрос для случая, когда среди этих книг есть двухтомник по теории вероятностей В.Феллера, книги которого должны стоять рядом.
**6.3.**$^\circ$ $n$ мужчин и $n$ женщин танцуют. Сколькими способами их можно распределить по парам?

**6.4.**$^\circ$ Каждая из двух книжных полок вмещает $n$ книг. Каким числом способов можно на них расставить $2n$ книг, среди которых имеется трехтомник Г.М. Фихтенгольца по математическому анализу, так, чтобы:
1) все три тома „Курса“ Фихтенгольца стояли на одной полке рядом в естественном порядке, 2) на обеих полках были книги этого трехтомника?

**6.5.**$^\circ$ Сколько имеется слагаемых в разложении определителя $\det ||a_{ij}||$ порядка $n$ таких, что: 1) в них не входит множителем $a_{11}$, 2) в них входит множителем $a_{11}$, а $a_{22}$ не входит?

**6.6.** Найдите алгоритм перебора всех перестановок $k$-элементного множества.

## 7 Сочетания

**7.1.**$^\circ$ Для проведения вступительных экзаменов создается комиссия из пяти преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из 13 преподавателей кафедры?

**7.2.**$^\circ$ Каждая из $n$ команд сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего состоялось игр?

**7.3.**$^\circ$ Сколькими способами можно выбрать из 7 прилагательных, 8 существительных и 9 глаголов по три слова каждой части речи?

**7.4.**$^\circ$ Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? А если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов?

**7.5.**$^\circ$ Из 10 студентов первого курса и 15 студентов второго курса надо выбрать команду из пяти человек так, чтобы в нее входили студенты обоих курсов. Сколькими способами это можно сделать?

**7.6.**$^\circ$ Сколькими способами можно выбрать 11 человек из 17 человек $a_1$, $a_2, \ldots, a_{17}$, если два человека $a_1$ и $a_2$ не могут быть выбраны вместе?

**7.7.** Найдите алгоритм перебора всех подмножеств $n$-элементного множества.

**7.8.** Найдите алгоритм перебора всех $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества.

## 8 Перестановки с повторениями. Разбиения множества на части

**8.1.**$^\circ$ Сколькими способами могут быть размещены в ряд $a$ белых, $b$ красных и $c$ зеленых шаров?

**8.2.**$^\circ$ В группе 21 студент. Сколькими способами их можно разбить на подгруппы составом в 1) 6, 7 и 8, 2) 6, 6 и 9, 3) 7, 7 и 7 студентов для проведения лабораторных работ?

**8.3.**$^\circ$ Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски? А если ладьи разного цвета?

**8.4.**$^\circ$ Сколько различных буквенных последовательностей можно получить, переставляя буквы в слове „непрерывность“?

**8.5.**$^\circ$ Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа: 1) 152114223, 2) 6707796?

## 9 Размещения различимых шаров по ящикам

**9.1.**$^\circ$ Нужно послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

**9.2.**$^\circ$ Поезду, в котором находится $n$ пассажиров, предстоит сделать $m$ остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками?

**9.3.** Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и синий переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

## 10 Размещения неразличимых шаров по ящикам. Сочетания с повторениями

**10.1.**$^\circ$ Поезду, в котором находится $n$ пассажиров, предстоит сделать $m$ остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на данной остановке?

**10.2.**$^\circ$ В кондитерском магазине продаются пирожные четырех сортов: "Наполеоны", "Эклеры", песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

**10.3.**$^\circ$ Имеются папки желтого, зеленого, синего и красного цветов. Сколькими способами можно взять 5 папок? (Возможно, что все папки одного цвета.)

**10.4.**$^\circ$ В магазине продаются общие тетради 10 типов. Сколькими способами можно купить в нем: 1) 7 тетрадей, 2) 7 тетрадей разных типов, 3) 7 тетрадей, среди которых имеются тетради не менее, чем 5 типов?

**10.5.**$^\circ$ Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ в:
1) целых неотрицательных числах, 2) целых положительных числах?

**10.6.**$^\circ$ Сколькими способами можно распределить 40 одинаковых книг по 5 библиотекам так, чтобы каждая библиотека получила не менее трех книг?

**10.7.**$^\circ$ Сколько решений имеет уравнение $x_1+x_2+\ldots+x_6 = 73$, в которых $x_1, x_2, x_3$ – целые положительные, а $x_4, x_5, x_6$ – целые неотрицательные числа?

## 11 Формула включения-исключения

**11.1.** В классе 35 учеников. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, а 10 не посещают ни одного кружка.
1) Сколько учащихся посещают математический и физический кружки?
2) Сколько учащихся посещают только математический кружок?

**11.2.** Из 100 человек английский язык знают 27 человек, немецкий — 15, французский — 13, английский и немецкий — 5, английский и французский — 7, немецкий и французский — 6, все три языка знают 2 человека. Сколько человек не знают ни одного иностранного языка?

**11.3.** В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро — французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое — французский и английский. Один человек знает все три эти языка.
1) Сколько человек работают в отделе?

2) Сколько из них знают только английский язык?
3) Сколько из них знают только французский язык?
**11.4.** Каждый из студентов группы занимается хотя бы одним видом спорта. Пятеро занимаются альпинизмом, шестеро – легкой атлетикой, десять человек – борьбой. Известно, что двое занимаются альпинизмом и легкой атлетикой, трое – легкой атлетикой и борьбой, а один человек занимается всеми тремя видами спорта. Сколько студентов в группе? Сколько из них занимается только альпинизмом? Только борьбой?
**11.5.** Каким числом способов можно разместить $ш$ различимых шаров по $я$ различимым ящикам так, чтобы не было пустых ящиков?
**11.6.** Сколько существует перестановок чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, удовлетворяющих следующему условию: каждое число отличается от номера занимаемого им места? Укажите все такие перестановки для $n = 3$ и $n = 4$.
**11.7.*** Сколькими способами можно переставить числа ряда $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ так, чтобы слева от каждого числа $j$ стояло число, отличное от $j - 1$?
**11.8.*** (*Задача о счастливых трамвайных билетах.*) Сколько имеется последовательностей из шести цифр, у которых сумма первых трех членов равна сумме последних трех?

## 12 Принцип ящиков Дирихле

**12.1.** На белой плоскости разлита зеленая краска. Докажите, что для любого наперед заданного положительного числа $\gamma$ найдутся две точки плоскости одинакового цвета, расстояние между которыми равно $\gamma$.
**12.2.** Докажите, что какие бы 5 различных точек целочисленной решетки плоскости ни были взяты, какие-либо две из них обладают тем свойством, что отрезок, соединяющий их, проходит через точку решетки.
**12.3.** На плоскости даны $k$ точек. Некоторые пары точек соединены отрезками прямых. Докажите, что найдутся хотя бы 2 точки, из которых выходит одно и то же количество отрезков.
**12.4.** Докажите, что среди любых $n$ человек найдутся хотя бы 2 человека, у которых одинаковое число знакомых среди этих $n$ человек.
**12.5.** Какое наименьшее число людей надо взять, чтобы быть уверенным в том, что хотя бы 1) двое, 2) трое, 3) $k$ человек из них имеют один и тот же день рождения?

**12.6.** Пусть $m$ и $n$ — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что найдутся натуральные числа $x$ и $y$ такие, что $mx - ny = 1$.
**12.7.** Пусть $m$ и $n$ — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что представление числа $m/n$ в виде десятичной дроби является либо конечной, либо бесконечной периодической дробью с периодом, не превосходящим $n - 1$.
**12.8.** Докажите, что какое бы $(n+1)$-элементное подмножество множества натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ ни было взято, в нем найдутся:
1) 2 числа, одно из которых нацело делится на другое,
2) 2 взаимно простых числа.
**12.9.** Пусть $A$ — произвольное множество $n$ натуральных чисел, среди которых могут быть и одинаковые. Докажите, что в этом множестве есть непустое подмножество, сумма всех чисел которого делится нацело на $n$.
**12.10.** Докажите, что из любых ста натуральных чисел можно выбрать 2 таких, разность которых делится на 99.
**12.11.*** Пусть натуральное число $a$ не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что для любого натурального $n$ существует такая степень $a$, запись которой в десятичной системе счисления заканчивается так: $\underbrace{00\ldots01}_{n}$.
**12.12.*** (Эрдеш, Секереш) Пусть $k$ и $l \in \mathbf{N}$. Докажите, что в любой последовательности $n > (k-1)(l-1)+1$ различных целых чисел найдется либо возрастающая подпоследовательность длины $k$, либо убывающая подпоследовательность длины $l$.

## 13 Комбинации

**13.1.** Сколько существует 5-значных чисел, кратных 5, в десятичной записи которых ни одна цифра не повторяется дважды?
**13.2.** Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5$, если каждая цифра может встречаться в записи числа несколько раз?
**13.3.** Количество цифр в номерах страниц книги равно 1890. Сколько страниц в книге?
**13.4.** Сколько существует 5-значных натуральных чисел, которые:
1) четны, 2) делятся на 5, 3) делятся на 10, 4) делятся на 25?

**13.5.** Каких чисел больше среди первого миллиона натуральных чисел: тех, в записи которых есть 1, или тех, в записи которых 1 нет?

**13.6.** Сколькими способами можно представить число $17^n$ в виде произведения трех натуральных сомножителей, если порядок следования сомножителей учитывается и 1 считается множителем?

**13.7.** Сколькими различными способами число $10^6$ представляется в виде произведения трех натуральных чисел? (Порядок следования сомножителей не учитывается.)

**13.8.** Сколько натуральных делителей имеет число 2530?

**13.9.** Сколько существует 6-значных чисел, у которых: 1) 3 цифры четные, а остальные нечетные, 2) все цифры равны либо 0, либо 1, либо 2, 3) хотя бы одна цифра равна 1, 4) точно одна цифра равна 1, 5) все цифры разные, 6) среди цифр есть точно по одной единице и нулю, 7) среди цифр нет двух нулей, стоящих подряд?

**13.10.** Сколько 4-значных чисел можно составить с помощью цифр числа 1231534?

**13.11.*** Сколько существует чисел, получаемых из числа 1234114234 перестановкой его цифр? А если две одинаковые цифры не должны идти друг за другом?

**13.12.** Сколькими способами можно расположить числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ в виде квадрата так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, каждой строке и обеих диагоналях была одной и той же?

**13.13.** Сколько существует натуральных $n$-значных чисел, цифры которых образуют: 1) неубывающую последовательность, 2) строго возрастающую последовательность, 3) невозрастающую последовательность, 4) строго убывающую последовательность. Сколько существует натуральных $n$-значных чисел, каждые две соседние цифры которых — разные?

**13.14.** Каким числом способов можно разбить ряд чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ на $k$ отрезков так, чтобы в каждом из отрезков было хотя бы одно число?

**13.15.** Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел забирать вещи, то оказалось, что он забыл номер. Он помнит лишь, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое количество номеров придется набрать в наихудшем случае?

**13.16.** Если повернуть лист бумаги на 180 градусов в плоскости стола, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 перейдут друг в друга, а другие теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не меняется при повороте листа бумаги на 180 градусов?

**13.17.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 47\,, \\ \qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 = 16\ : \end{cases}$$

1) в целых неотрицательных числах, 2) в целых положительных числах?

**13.18.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 20\,, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0\ : \end{cases}$$

1) в целых неотрицательных числах, 2) в целых положительных числах, 3) в целых неотрицательных четных числах, 4) в четных положительных числах?

**13.19.** Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 35\,, \\ \qquad\qquad\quad x_1 + x_2 > 3\ : \end{cases}$$

1) в целых неотрицательных числах, 2) в целых положительных числах?

**13.20.** Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 15\,, \\ \qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 \le 3\ : \end{cases}$$

1) в целых неотрицательных числах, 2) в целых положительных числах?

**13.21.** Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39$ в целых числах, удовлетворяющих условиям $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 4$, $x_3 \geqslant 5$, $x_4 \geqslant 6$?

**13.22.** Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$ в целых положительных числах, удовлетворяющих условиям: $x_1$ и $x_2$ – четные, $x_3$ и $x_4$ – нечетные?

**13.23.** Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = d$ в: 1) целых неотрицательных числах, 2) натуральных числах, 3) числах 1 и 2?

**13.24.** Сколько решений имеет неравенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le d$ в: 1) целых неотрицательных числах, 2) натуральных числах, 3) числах 1 и 2?

**13.25.** Сколько существует подстановок порядка 9, представимых в виде произведения независимых циклов длины 4 и 5?

**13.26.** Сколько существует подстановок порядка $n$, разлагающихся в произведение точно двух независимых циклов?

**13.27.** Сколько всего существует перестановок, являющихся степенями перестановки (123)(45678)?

**13.28.** Сколько существует квадратных матриц порядка $n$, элементами которых являются 0 и 1, таких, что:
1) в каждом столбце и каждой строке стоит точно одна единица,
2) сумма элементов каждой строки матрицы не превышает 2,
3) сумма элементов главной диагонали не превосходит 5?

**13.29.** Найдите число векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют условию:
1) $x_i = 0$ или 1 $(i = 1, \ldots, n)$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$,
2) $x_i$ – целые неотрицательные и $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$.

**13.30.** Забор состоит из 20 досок. Каждую из них надо покрасить в один из трех цветов, причем цвет соседних досок должен быть разным. Каким числом способов это можно сделать?

**13.31.** В концерте участвуют 3 певицы и 2 певца, каждый участник с одним номером. Каким числом способов можно составить программу, если концерт должен начинаться и оканчиваться выступлением певицы?

**13.32.** Сколькими способами можно разместить 32 человека в 8 четырехместных каютах?

**13.33.** Число участников теннисного турнира $2n$. Каким числом способов можно разбить участников на $n$ пар для проведения игр первого круга?

**13.34.** Сколькими способами можно распределить $3n$ различных предметов поровну между тремя людьми?

**13.35.** У одного человека 7, у другого – 70 различных книг. Каким числом способов они могут обменять: 1) 1 книгу первого на 1 книгу второго, 2) 1 книгу первого на 10 книг второго?

**13.36.** Сколькими способами можно выбрать 3 спецкурса из 10 возможных, если 1) 3 из них читаются в одно время, а все остальные – в разное, 2) тот, кто посещает спецкурс по римановой геометрии, обязан также посещать спецкурс по дифференциальным уравнениям?

**13.37.** В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 6 мест на каждом. Из 12 пассажиров 4 желают сидеть по направлению движения, 3 — против, остальным безразлично, как сидеть. Сколькими способами пассажиры могут разместиться в купе?

**13.38.** В театре 10 актеров и 9 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 4 женских роли?

**13.39.** Каким числом способов можно сдать двум игрокам по 6 игральных карт из тридцати шести так, чтобы:
1) каждый игрок имел карты одной масти,
2) у одного из них не было пиковых карт, а у другого – бубновых,
3) у обоих было одинаковое число карт красного цвета,
4) у них были все тузы,
5) среди имеющихся у них карт были карты точно трех мастей,
6) среди имеющихся у них карт были карты всех мастей?

**13.40.** Сколькими способами можно вытянуть 6 карт из колоды в 36 игральных карт так, чтобы появились: 1) точно одна масть, 2) карты разных наименований, 3) точно 2 масти, 4) все 4 масти?

**13.41.** Из колоды в 36 карт берут 4 карты. В каком числе случаев будут выполняться условия:
1) все извлеченные карты будут: а) одного цвета, б) одной масти, в) одного названия;
2) среди извлеченных карт: а) не будет ни одного туза, б) будет хотя бы один туз, в) будет точно один туз;
3) наименования всех извлеченных карт будут разными;
4) масть у извлеченных карт — одинаковая, а наименования – разные;
5) среди извлеченных карт будут карты всех четырех мастей;
6) точно две из извлеченных карт будут червовыми, причем одна из карт будет тузом?

**13.42.** За круглым столом с $2n$ занумерованными местами рассаживаются $n$ супружеских пар. Каким числом способов это можно сделать так,

чтобы:
1) мужчины и женщины чередовались,
2) супруги сидели рядом,
3) мужчины и женщины чередовались и супруги сидели рядом,
4) супруги сидели рядом, причем жена — слева от мужа,
5) все женщины занимали $n$ соседних мест,
6) (задача Э. Люка́)** мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

**13.43.** Каким числом способов можно разместить $n$ человек за круглым столом с незанумерованными местами? (Два размещения считаются совпадающими, если в обоих случаях каждый человек имеет одних и тех же соседей.)

**13.44.** Каким числом способов можно разместить $n$ мужчин и $n$ женщин за круглым столом с незанумерованными местами так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? (Два размещения считаются совпадающими, если в обоих случаях каждый человек имеет одних и тех же соседей.)

**13.45.** Сколькими способами можно посадить рядом двух англичан, двух французов и двух немцев так, чтобы никакие два соотечественника не сидели рядом? Рассмотрите этот же вопрос, заменив слово „два“ словом „три“.

**13.46.** Сколькими способами можно рассадить за круглым столом с шестью занумерованными местами 3 супружеские пары так, чтобы выполнялись следующие два условия: а) мужчины и женщины чередуются, б) никакие двое супругов не сидят рядом? Рассмотрите тот же вопрос для 5 супружеских пар.

**13.47.** Каким числом способов можно надеть на 4 пальца одной руки 4 а) одинаковых, б) различных кольца?

**13.48.** У ювелира есть 5 одинаковых рубинов, 6 одинаковых изумрудов и 7 одинаковых сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них 4 камня для броши? Сколько различных браслетов, содержащих все перечисленные камни, он может сделать, считая, что камни в браслете располагаются последовательно?

**13.49.** В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить: 1) 7 открыток, 2) 7 различных открыток?

**13.50.** Имеется $n$ неразличимых предметов и еще $n$ предметов, различающихся между собой и отличных от первых $n$. Каким числом способов из них можно выбрать $n$ предметов? Каким числом способов эти $2n$ предметов можно упорядочить?

**13.51.** Сколькими способами можно наклеить красные и желтые ярлыки на 100 книг? (Рассмотрите два случая: а) все книги одинаковые, б) все книги разные.)

**13.52.** Каким числом способов можно разложить $n$ различимых и $n$ неразличимых шаров по $n$ различным ящикам так, чтобы в каждом ящике лежал один из шаров первого типа?

**13.53.** Сколькими способами можно составить букет из 7 роз, если в продаже имеются розы четырех цветов?

**13.54.** Пусть даны $n$ различных флагов и $k$ мачт, настолько больших, что на одной мачте могут поместиться все флаги. Сколькими способами можно разместить флаги на мачтах? (Важно относительное, а не абсолютное положение флагов на мачтах.) А если на каждую мачту можно поместить только 1 флаг?

**13.55.** Сколько различных буквенных последовательностей можно получить, переставляя буквы в слове „последовательность“? Чему равно число тех из этих последовательностей, в которых никакие две гласные буквы не стоят рядом?

**13.56.** Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз? (Под словом понимается любая последовательность букв.)

**13.57.** Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слово, в которое входят 4 различные согласные и 3 различные гласные? В каком числе таких слов никакие две согласные не стоят рядом?

**13.58.** Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова: 1) „интеграл“, 2) „производная“, 3) „гомоморфизм“? (Под словом понимается *всякая* последовательность букв.)

**13.59.** Сколькими способами можно переставить буквы в слове „гомоморфизм“ так, чтобы одинаковые буквы не стояли рядом?

**13.60.** Сколько можно составить „слов“ не более, чем из 4 букв, используя

10 гласных и 20 согласных букв, если гласные и согласные буквы должны чередоваться?
**13.61.** Сколько разных буквенных последовательностей можно получить, переставляя буквы в слове „монотонность“? Чему равно число тех из этих последовательностей, в которых никакие две буквы „о“ не стоят рядом?
**13.62.** Докажите, что число исходов бросания $n$ различимых монет делит нацело число перестановок $2n$-элементного множества.
**13.63.** Докажите, что число способов упорядочить $3n$-элементное множество кратно числу разложений $n$ различимых шаров по шести ящикам.
**13.64.** Экзаменационный билет состоит из 10 вопросов, 3 из них – по алгебре. Сколькими способами можно составить билет так, чтобы никакие 2 вопроса по алгебре не следовали один за другим?
**13.65.*** Сколько существует $k$-элементных множеств, составленных из элементов данного $n$-элементного множества и удовлетворяющих условию:
1) каждый входящий в него элемент повторяется четное число раз,
2) каждый входящий в него элемент повторяется нечетное число раз,
3) каждый из элементов данного $n$-элементного множества входит в него хотя бы один раз?
**13.66.** Имеется 44 гривенника и 10 конвертов. Можно ли разложить гривенники по конвертам так, чтобы во всех конвертах было разное количество монет?
**13.67.** Экзамены по трем предметам: алгебре, геометрии и математическому анализу — сдавали 60 студентов. Следующая таблица показывает, какое число студентов не сдало каждый из этих предметов и их различные комбинации

| предмет | а | г | м | аг | ам | гм | агм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| количество не сдавших | 12 | 5 | 8 | 2 | 6 | 3 | 1 . |

Сколько студентов сдали все экзамены?
**13.68.** Имеется $m$ белых и $n$ черных шаров, причем $m \geqslant n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?
**13.69.** Квадрат разделен средними линиями на 4 малых квадрата, каждый из которых должен быть покрашен в один из $n$ цветов, причем малые

квадраты, имеющие общую сторону, должны быть покрашены в разный цвет. Сколькими способами это можно сделать?

**13.70.** Может ли шахматный король, выйдя с поля „a1“, пройти через каждую клетку шахматной доски по одному разу и закончить свое движение на поле „h8“?

**13.71.** Каким числом способов может пройти шахматный король из клетки „a1“ в клетку „h8“, если на каждом ходу он должен перейти на соседнюю клетку справа, сверху или справа-сверху по диагонали?

**13.72.*** Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — все различные простые делители натурального числа $n$. Выразите количество $\varphi(n)$ натуральных чисел, меньших, чем $n$, и взаимно простых с ним, через $n$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

**13.73.** Докажите, что как бы ни были взяты 5 точек внутри равностороннего треугольника со стороной, равной 1, расстояние между какими-нибудь двумя из них будет не больше 1/2.

**13.74.** Каждый двадцатый математик носит бороду, а каждый тридцатый бородач является математиком. Кого больше: математиков или бородачей? Во сколько раз?

**13.75.** На окружности фиксированы $n$ черных точек и одна белая. Чего больше: треугольников с вершинами в отмеченных точках, причем все вершины которых — черные точки, или четырехугольников, три вершины которых черные точки, а одна — белая?

**13.76.** В выпуклом $n$-угольнике проведены все диагонали. Чему равно их количество? В каком числе точек они пересекаются внутри $n$-угольника, если никакие 3 из них не проходят через одну точку?

**13.77.** Каждая сторона в треугольнике $ABC$ разделена на $n$ равных отрезков. Сколько существует треугольников с вершинами в точках деления, у которых ни одна сторона не параллельна ни одной стороне треугольника $ABC$?

**13.78.** В трехмерном евклидовом пространстве фиксированы $n$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Сколько прямых, плоскостей, треугольников, тетраэдров порождают эти точки?

**13.79.** Каждая сторона квадрата разбита на $k$ частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

Рассмотреть случаи: 1) вершины квадрата не считаются точками деления, 2) вершины квадрата считаются точками деления.

# 14 Производящие функции

**14.1.**$^\circ$ Найдите производящую функцию последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где для всех $n$:

| | |
|---|---|
| 1) $a_n = 1$ , | 2) $a_n = (-1)^n$ , |
| 3) $a_n = 2^n$ , | 4) $a_n = (1 + (-1)^n)/2$ , |
| 5) $a_n = (-0,1)^n + 4^n + 2$ , | 6) $a_n = 0{,}5 \cdot (1 + (-1)^n) \cdot 5^n$ , |
| 7) $a_n = 3^{-n} + (-3)^n + 3$ , | 8) $a_n = n + 1$ , |
| 9) $a_n = n$ , | 10) $a_n = (n + 2)(n + 1)$ , |
| 11) $a_n = n^2$ , | 12) $a_n = 1/(n + 1)$ , |
| 13) $a_n = 1/(n + 1)(n + 2)$ , | 14) $a_n = 3n + 3^n$ . |

**14.2.** Найдите последовательность, удовлетворяющую условиям $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n \geqslant 0$), $a_0 = 8$, $a_1 = 10$.

**14.3.** Найдите последовательность, удовлетворяющую условиям $a_{n+1} = a_n + n$ ($n \geqslant 0$), $a_0 = 1$.

**14.4.** Найдите последовательность, удовлетворяющую условиям:
1) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ ($n \geqslant 0$), $a_0 = 1$, $a_1 = 2$,
2) $a_{n+1} = 2a_n - 1$ ($n \geqslant 0$), $a_0 = 1$.

**14.5.** Вычислите производящие функции следующих последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

1) $a_n = 0\,,\ (n$ - четное$)\,,\ a_n = \alpha^n/n\,,\ (n$ - нечетное$)\,,$

2) $a_n = 0\,,\ (n = 0$ или $n$ - нечетное$)\,,\ a_{2k} = \alpha^{2k}/2k\,,\ (k \geqslant 1)\,,$

3) $a_n = 0\,,\ (n$ - четное$)\,,\ a_n = \alpha^n/n!\,,\ (n$ - нечетное$)\,,$

4) $a_n = 0\,,\ (n$ - нечетное$)\,,\ a_n = \alpha^n/n!\,,\ (n$ - четное$)\,,$

5) $a_n = \sin(\alpha n)\,,\ n \geqslant 0\ \ ,$

6) $a_n = \cos(\alpha n)\,,\ n \geqslant 0\ \ ,$

7) $a_n = \gamma^{-\beta n}\sin(\alpha n)\,,\ n \geqslant 0\ \ .$

**14.6.** Пусть производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ равна $f(x)$. Выразите через $f(x)$ производящую функцию последовательности $\{b_n\}_0^{\infty}$, где

1) $b_n = 3^n a_n\,,$
2) $b_n = a_{n+2}\,,$
3) $b_n = a_{2n}\,,$
4) $b_{2n} = a_n\,, b_{2n+1} = 0\,,$
5) $b_n = a_n - a_{n+2}\,,$
6) $b_n = a_{n-2}\ (n \geqslant 2)\,, b_0 = b_1 = 0\,,$
7) $b_n = a_{n-1} + a_n\ (n \geqslant 1)\,, b_0 = a_0\,,$
8) $b_n = a_n + (-1)^n a_{n+1}\,,$
9) $b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$
10) $b_n = \beta_0 a_n + \beta_1 a_{n+1} + \cdots + \beta_k a_{n+k}\,.$

($\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$ — заданная числовая последовательность.)

**14.7.** Пусть производящая функция последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ равна $f(x)$. Выразите через $f(x)$ производящую функцию последовательности: 1) $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, 0, \ldots$, 2) $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, a_8, 0, \ldots$.

**14.8.** Пусть $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ — конечная последовательность с производящей функцией $P(x)$. Выразите через $P(x)$ производящую функцию последовательности: $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

**14.9.** Докажите, что производящая функция последовательности $\{C_{2n}^n\}_0^{\infty}$ равна $1/\sqrt{1-4x}$.

**14.10.** Найдите производящую функцию последовательности $\{C_{2n-1}^n\}_{n=0}^{\infty}$.

**14.11.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2(n-k)}^{(n-k)} = 4^n$.

**14.12.** Докажите, что при $|x| < 1$ выполняется равенство

$$(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+n-1}^{n-1} x^k\,.$$

**14.13.** Найдите экспоненциальные производящие функции последовательностей: 1) $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$; 2) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \ldots, 0, 2^n, 0, \ldots$.

**14.14.** Пусть $A(x)\,, B(x)$ — экспоненциальные производящие функции последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Докажите, что функция $A(x)B(x)$ — экспоненциальная производящая функция последовательности $\{c_n\}$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k}$.

**14.15.** Вычислите экспоненциальную производящую функцию последовательности, определяемой условиями

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}\ (n \geqslant 2)\,.$$

Докажите, что $a_n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} C_n^{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!}$.

**14.16.** Вычислите при всех $n$ сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k (-1)^{n-k}$, где $\{a_k\}$ — последовательность, определяемая условиями

$$a_0 = a_1 = 1\,, \quad a_k = a_{k-1} + (k-1)a_{k-2}\ (k \geqslant 2)\,.$$

## 15 Рекуррентные соотношения

**15.1.** На сколько частей делят плоскость $n$ прямых, никакие 2 из которых не параллельны и никакие 3 из которых не проходят через одну точку? Чему равно хроматическое число получающейся карты?
**15.2.** На какое наибольшее число частей могут разделить пространство $n$ плоскостей?
**15.3.** На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость $n$ окружностей?
**15.4.** На какое наибольшее число частей могут разделить пространство $n$ сфер?
**15.5.** Пусть $a_0$, $a_1$ – фиксированные вещественные числа, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ и пусть $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ обладает конечным пределом и вычислите его.
**15.6.** Пусть $a, b$ – комплексные числа. Вычислите определитель трехдиагональной матрицы порядка $n$, в которой все элементы главной диагонали равны $a + b$, все элементы диагонали, лежащей над главной, равны $ab$, все элементы диагонали, лежащей под главной, равны 1.

## 16 Биномиальные коэффициенты

**16.1.**$^\circ$ Вычислите: 1) $(2-\sqrt{3})^7$, 2) $(2+\sqrt{3})^7 + (2-\sqrt{3})^7$.
**16.2.**$^\circ$ Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении по формуле бинома Ньютона: 1) $(2^{1/2} + 3^{1/4})^{100}$, 2) $(2^{1/2} + 3^{1/3})^{300}$?
**16.3.** Какое слагаемое в разложении $(1+\sqrt{3})^{100}$ по формуле бинома Ньютона является наибольшим?

**16.4.°** Докажите тождества: 1) $C_{n-1}^{k-1}=\dfrac{k}{n}C_n^k\,,\quad$ 2) $C_n^kC_k^l=C_n^lC_{n-l}^{k-l}$.

**16.5.°** Вычислите суммы:

$$1)\ \sum_{k=0}^{n}C_n^k\,,\qquad 2)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\,,\qquad 3)\ \sum_{k=0}^{n}2^kC_n^k\,.$$

**16.6.** Докажите тождества: 1) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_{2n-i}^{n}=C_{2n}^{n-1}$ , 2) $\sum\limits_{i=0}^{k}C_{n+i}^{i}=C_{n+k+1}^{k}$.

**16.7.** Докажите тождество $C_{n-1}^{k-1}C_n^{k+1}C_{n+1}^k=C_{n-1}^kC_{n+1}^{k+1}C_n^{k-1}$.

**16.8.** Вычислите суммы: 1) $\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k\,,\quad$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}kC_n^k$.

**16.9.** Вычислите суммы:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k\,,\quad 2)\ \sum_{k=2}^{n}(-1)^kk(k-1)C_n^k\,,\quad 3)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k\,.$$

**16.10.** Вычислите суммы: 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^{-1}C_n^k\,,\quad$ 2) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)^{-1}C_n^k$.

**16.11.** Каким числом способов можно взять нечетное число предметов из заданного множества $n$ различных предметов?

**16.12.** Докажите, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$ равна нулю, если $n$ нечетно, и равна $(-1)^{n/2}C_n^{n/2}$, если $n$ четно.

**16.13.** Дайте комбинаторное доказательство тождеств:

$$1)\quad C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}\,,\qquad 2)\quad \sum_{j=0}^{k}C_{n-1-j}^{k-j}=C_n^k\,,$$

$$3)\quad \sum_{k=0}^{m}C_n^kC_{n-k}^{m-k}=2^mC_n^m\,,\qquad 4)\quad \sum_{r=0}^{k}C_m^rC_n^{k-r}=C_{n+m}^k\,,$$

$$5)\quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}C_n^kC_{n-k}^r=3^n\,,\qquad 6)\quad \sum_{r=0}^{n}(C_n^r)^2=C_{2n}^n\,.$$

**16.14.** Докажите неравенство $\dfrac{2^{2n}}{2n+1}\leqslant C_{2n}^n\leqslant 2^{2n}$.

**16.15.** Докажите, что если натуральное $n$ кратно восьми, то количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, число элементов которых кратно четырем, равно $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$.
**16.16.** Докажите, что если $p$ — простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $C_p^k$ делится на $p$.
**16.17.** Найдите $k$ и $n$, зная, что $C_{n+1}^{k+1} : C_{n+1}^{k} : C_{n+1}^{k-1} = 5 : 3 : 3$.
**16.18.** Докажите тождество: $(C_{n+1}^{k+1} - C_n^k)C_{n-1}^{k-1} = k((C_n^k)^2 - C_{n+1}^{k+1}C_{n-1}^{k-1})$.
**16.19.** Докажите тождества:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{2n-1}^{k}} = \frac{2}{n+1}, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n+q}^{k}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

## 17 Числа Фибоначчи

**17.1.**° Сколько существует 7–значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, в которых никакие две единицы не стоят рядом?
**17.2.** Сколько подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ обладают тем свойством, что в них не входят никакие два последовательных натуральных числа?
**17.3.** Чему равно число последовательностей $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, удовлетворяющих условиям: $c_j = 0$ или 1 для всех $j = 1, \ldots, n$ и $c_1 \leq c_2$, $c_2 \geqslant c_3$, $c_3 \leq c_4$, $c_4 \geqslant c_5 \ldots$?
**17.4.** Каким числом способов можно пройти лестницу с $n$ ступеньками, если можно перешагивать через одну ступеньку?
**17.5.** Каким числом способов можно опорожнить бочку емкостью 40 литров с помощью двух сосудов емкостью 1 и 2 литра?
**17.6.** Дома в поселке требуется окрасить так, чтобы: а) каждый этаж оказался окрашенным либо в белый, либо в зеленый цвет, б) никакие два соседние этажа не были окрашены в зеленый цвет. Каким числом способов можно окрасить дома в поселке, состоящем из 16-этажных домов?
**17.7.** (Задача о кроликах Фибоначчи.) Каждая пара кроликов ежемесячно приносит пару кроликов (самца и самку), которые первый приплод дают через 2 месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет через год, если в начале года была одна пара новорожденных кроликов?

**17.8.** Пусть дерево растет так, что каждая новая ветвь в первый год только тянется вверх, а затем, начиная со второго года, ежегодно дает по одному боковому побегу. Сколько ветвей будет через 10 лет на дереве, выросшем из саженца без единого бокового побега?

**17.9.** Если посадить семя цветка, то впервые он зацветает ровно через три года. С тех пор ежегодно он цветет и дает только одно семя, которое самопроизвольно засевается в землю. Сколько цветов зацветет через десять лет после того, как впервые было посажено одно семя?

**17.10.** Пусть клетки одного ряда тетрадного листка в клетку занумерованы числами от 1 до $n$ слева направо. В начальный момент фишка находится на клетке с номером 1. Она может двигаться лишь вправо, совершая прыжки либо в соседнюю клетку, либо через одну, либо через две клетки. Каким числом способов она может совершить путь из клетки с номером 1 в клетку с номером $n$?

**17.11.*** На фабрике производят большие и маленькие новогодние игрушки и красят их в красный или синий цвет. В упаковку помещают и большие, и маленькие игрушки вместе в ряд, причем одна большая игрушка занимает ровно столько места, сколько две маленьких. Всего в одну упаковку может поместиться 6 маленьких игрушек. Каким числом способов можно разместить игрушки в упаковке так, чтобы две синие игрушки не располагались рядом?

**17.12.** Покажите, что если $a_n$ — число всех векторов длины $n$ с координатами, равными 0 или 1, в которых никакие две соседние координаты не являются нулевыми, то $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$ при $m > 2$. Выразите $a_n$ через числа Фибоначчи.

**17.13.** Выразите через числа Фибоначчи $f_n$ следующие числа:
1) число разложений $n$ на части, превосходящие 1,
2) число разложений $n$ на нечетные части,
3) число разложений $n$ на части, равные 1 или 2.

**17.14.** Докажите, что разность квадратов двух чисел Фибоначчи с номерами, отличающимися на 2, является числом Фибоначчи.

**17.15.** Докажите, что числа Фибоначчи с соседними индексами взаимно просты.

**17.16.** Докажите, что $f_{k(k+1)}$ делится на $f_k f_{k+1}$.

**17.17.** Возьмем последовательность чисел Фибоначчи $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ . Продолжим ее влево, сохранив определяющее правило: каждый член равен сумме двух предыдущих. Получим $\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ . Покажите, что двигаясь влево, мы будем встречать те же числа, которые встречаются при движении от нуля вправо, только с чередующимися знаками.

**17.18.** Докажите, что среди чисел Фибоначчи четными являются только числа с номерами, кратными трем.

**17.19.** Докажите, что сумма любых восьми последовательных чисел Фибоначчи не может быть равна числу Фибоначчи.

**17.20.** Докажите следующие соотношения для чисел Фибоначчи:
1) $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$,
2) $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$,
3) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$,
4) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$,
5) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$,
6) $nf_1 + (n-1)f_2 + (n-2)f_3 + \ldots 2f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3)$,
7) $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \cdots + nf_n = nf_{n+2} - f_{n+3} + 2$,
8) $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$,
9) $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$,
10) $A_{n+1} = A_n^2 - 2$ при $n \geqslant 1$ , где $A_k := f_{2^{k+1}} / f_{2^k}$.

**17.21.** Вычислите следующие суммы: 1) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 \cdots + (-1)^{n+1} f_n$, 2) $f_3 + f_6 + f_9 + \cdots + f_{3n}$, 3) $f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + \cdots + f_n^3$.

**17.22.** Докажите,что любое натуральное число можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, причем так, что каждое число Фибоначчи входит в сумму не более одного раза и никакие два соседние числа не входят вместе.

**17.23.** Докажите, что последовательность типа Фибоначчи полностью определяется заданием любых двух ее членов (не обязательно *первых двух*).

**17.24.** Может ли геометрическая прогрессия быть последовательностью типа Фибоначчи?

**17.25.** Докажите, что множество последовательностей типа Фибоначчи

является линейным пространством размерности 2.
**17.26.** Докажите, что $f_{n+1}/f_n \to (1+\sqrt{5})/2$ при $n \to \infty$.
**17.27.** Покажите, что производящая функция последовательности чисел Фибоначчи равна $s/(1-s-s^2)$.
**17.28.** Обозначим $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — числовую последовательность, определяемую так: $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_n = A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}$ при всех $n \geqslant 3$. 1) Найдите производящую функцию этой последовательности. 2) Получите формулу, выражающую $A_n$ через $n$. 3) Покажите, что при любом натуральном $N$ последовательность остатков от деления чисел $A_n$ на $N$ периодична.
**17.29.** Докажите формулу $f_n = \sum\limits_{k=0}^{[(n+1)/2]} \binom{n-k+1}{k}$, где $f_n$ — $n$-е число Фибоначчи, а $[y]$ — целая часть числа $y$.
**17.30.*** Докажите, что для любого натурального $n$ число

$$C_n^1 + 5C_n^3 + 5^2C_n^5 + 5^3C_n^7 + \dots$$

(сумма на самом деле конечная) нацело делится на $2^{n-1}$.
**17.31.** Обозначим через $f(n,k)$ число $k$-элементных подмножеств множества $\{1,2,\dots,n\}$, не содержащих соседних элементов. Докажите следующие равенства:
1) $f(n,1) = n$, $f(1,n) = 0$ $(n > 1)$,
2) $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)$ $(n > 2\,, 1 \leqslant k \leqslant n-1)$.
**17.32.** Вычислите:

$$1) F_{n+2}^4 - F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4}\,, \quad 2) \sum_{k=2}^{n} \frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}}\,.$$

# 18 Числа Каталана

**18.1.*** *Диагональной триангуляцией* выпуклого многоугольника называется разбиение многоугольника на треугольники его диагоналями, не пересекающимися внутри него. Обозначим $t_n$ — число диагональных триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника с помеченными вершинами. Докажите, что числа $t_n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $t_n =$

$\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{n-1-k}$. Вычислите $t_3, t_4, t_5, t_6$ непосредственно и с помощью полученного рекуррентного соотношения.

**18.2.*** Докажите, что производящая функция последовательности $\{t_n\}$ из задачи 18.1 равна $(1-\sqrt{1-4x})/(2x)$. Разложив эту функцию в степенной ряд по степеням $x$, найдите $t_n$ как функцию $n$.

**18.3.** В произведении $abc$ можно двумя способами поставить пару скобок, определяющих порядок действий: $(ab)c$ или $a(bc)$. Сколькими способами можно расставить 3 (4) пары скобок в произведении $abcd$ ($abcde$ соответственно), чтобы порядок действий стал однозначно определенным?

**18.4.** Рассмотрим множество векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$, $a_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ таких, что $\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$, $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$. Это множество можно рассматривать как множество всех непрерывных ломаных на тетради в клетку, соединяющих точки $(0,0)$ и $(2n,0)$, строящихся по такому правилу: числу $+1$ поставим в соответствие отрезок, соединяющий нижний левый угол клетки с правым верхним ее углом, а числу $-1$ поставим в соответствие отрезок, соединяющий левый верхний угол клетки с правым нижним, и составим непрерывную ломаную, соединяющую точки с координатами $(0,0)$ и $(0,2n)$. Обозначим через $s_n$ число всех $2n$-мерных векторов указанного вида. Найдите непосредственно $s_1, s_2, s_3, s_4$.

**18.5.** Докажите, что числа $s_n$ из задачи 18.4 удовлетворяют рекуррентному соотношению $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s_k s_{n-1-k}$. (Считаем, что $s_0 = 1$).

**18.6.** Докажите, что числа $s_n$ из задачи 18.4 удовлетворяют неравенству $s_n \leq 4^n$.

**18.7.** На листе тетради в клетку выделен квадрат размера $n \times n$. Проведем диагональ, соединяющую левый нижний и правый верхний углы квадрата. Квадраты размера $1 \times 1$, лежащие на север и запад от этой диагонали, запретные. Нужно попасть из левого нижнего в правый верхний квадрат. Передвигаться можно с квадрата на квадрат в направлении или на восток, или на север. Сколько существует различных траекторий передвижения?

**18.8.** В очереди за жетонами в метро стоит $2n$ человек; $n$ человек имеют по 50 копеек, остальные — по 1 гривне. Жетон стоит 50 копеек. Каждый покупает 1 жетон. У кассира в начальный момент денег нет. Сколькими способами люди могут расположиться в очереди так, чтобы кассир мог каждому дать сдачу?

**18.9.** На столе лежит три листа бумаги с номерами $A$, $B$, $C$. На листе $A$ лежит стопка карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$ в порядке возрастания снизу вверх. Карточки перекладывают по одной либо с листа $A$ на лист $B$, либо с листа $B$ на лист $C$ и кладут сверху уже находящихся там карточек. После $2n$ перекладываний все карточки будут переложены на лист $C$. Сколько перестановок номеров карточек можно получить с помощью таких перекладываний?

## 19 Разложения натуральных чисел

**19.1.**° Сколько имеется разложений числа 19, состоящих лишь из чисел 2 и 3?

**19.2.**° Чему равно число разложений натурального числа $n$?

**19.3.**° Чему равно число разложений числа $n$: 1) на $k$ частей, 2) не более, чем на $k$ частей?

**19.4.** Чему равно число разложений натурального числа $n$, имеющих четное число четных частей?

**19.5.** Чему равно число разложений натурального числа $n$ на части, равные 1 и 2?

**19.6.** Чему равно число разложений натурального числа $n$ на нечетные слагаемые?

**19.7.*** Чему равна сумма

$$\sum_{a_1, a_2, \ldots, a_j} a_1 a_2 \ldots a_j\,,$$

где суммирование производится по всем $2^{n-1}$ разложениям числа $n$?

**19.8.** Найдите алгоритм перебора всех разложений натурального числа $n$.

## 20 Разбиения натуральных чисел

**20.1.**$^\circ$ Найдите все разбиения чисел $1, 2, \ldots, 15$.

**20.2.**$^\circ$ Сколько имеется разбиений числа 19, состоящих лишь из чисел 2 и 3?

**20.3.**$^\circ$ Сколько имеется самосопряженных разбиений числа 8?

**20.4.** Сколько имеется разбиений числа 8 на различные нечетные слагаемые?

**20.5.** Докажите, что для любых натуральных $n$ и $k$ число разбиений $n$:

1) точно на $k$ слагаемых равно числу разбиений $n$ на слагаемые, не превосходящие $k$, хотя бы одно из которых равно $k$,

2) на не более, чем $k$ слагаемых, равно числу разбиений $n$ на слагаемые, не превосходящие $k$,

3) точно на $k$ слагаемых равно числу разбиений $n + C_k^2$ точно на $k$ различных слагаемых,

4) не более, чем на $k$ слагаемых равно числу разбиений $n + C_{k+1}^2$ на $k$ различных слагаемых.

**20.6.** Докажите, что для любого натурального $n$ число симметричных разбиений $n$ равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые (теорема Сильвестра).

**20.7.** Докажите, что для любого натурального $n$ число разбиений $n$:

1) на нечетные слагаемые равно числу таких разбиений $n$, в которые наибольшее слагаемое входит с нечетной кратностью, а остальные – с четной,

2) на слагаемые, большие, чем 1, в которых никакие 2 последовательных целых числа не входят в качестве частей, равно числу таких разбиений $n$, в которых нет однократно входящих частей,

3) равно числу разбиений $2n$ точно на $n$ частей,

4) на четные слагаемые равно числу разбиений $n$, в которые каждая часть входит четное число раз,

5) на части, большие единицы, в которые два последовательных целых числа не могут оба входить в качестве частей, равно числу разбиений $n$, в которых нет однократно входящей части,

6) на $a$ частей с наибольшей частью $b$ равно числу разбиений $n$ на $b$ частей с наибольшей частью $a$,

7) на различные слагаемые равно числу таких разбиений $n$, в которые наибольшее слагаемое входит с нечетной кратностью, а остальные – с четной.

**20.8.** Докажите, что для любого натурального $n$ число самосопряженных разбиений $n$ равно числу разбиений $n$ на различные нечетные части.

**20.9.** Число разбиений $a-c$ точно на $b-1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $c$, равно числу разбиений $a-b$ точно на $c-1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $b$.

**20.10.** Докажите, что последовательность чисел разбиений $\{p_n\}$ растет монотонно. Укажите какие-нибудь оценки ее сверху и снизу.

**20.11.** Каким числом способов можно разложить $n$ неразличимых шаров по $k$ неразличимым ящикам так, чтобы не было пустых ящиков?

**20.12.** Пусть $p_k(n)$ — число разбиений $n$ точно на $k$ частей. 1) Докажите справедливость рекуррентного соотношения $p_k(n) = p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)$. 2) Докажите, что для всякого фиксированного $j$ при $n \to \infty$ последовательность $\{p_{n-j}(n)\}$ стабилизируется, то есть для некоторых $c(j)$ и $N$ выполняется равенство $p_{n-j}(n) = c(j)$ при $n \geqslant N$. Найдите значение $c(j)$.

**20.13.** Найдите производящую функцию последовательности $\{r_n\}$, где $r_n$ — число разбиений натурального $n$ на различные части.

**20.14.** Найдите производящую функцию последовательности $\{\nu_n\}$, где $\nu_n$ — число разбиений натурального $n$ на нечетные части.

**20.15.** Докажите, что для любого натурального $n$ число разбиений $n$ не более, чем на 2 части, равно числу разбиений $n$ на части 1 и 2 и равно $[n/2]+1$.

**20.16.** Докажите, что для любого натурального $n$ число разбиений $n$, имеющих не более трех частей, равно числу разбиений $n$ на части 1, 2 и 3 и равно ближайшему целому к числу $(n+3)^2/12$.

**20.17.*** Докажите тождество

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-qx^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k q^k}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}\,.$$

**20.18.*** Пусть $p(s)$ — производящая функция последовательности чисел разбиений $\{p_n\}$, $\sigma(s)$ — производящая функция последовательности $\{\sigma_n\}$, где $\sigma_n$ — сумма всех натуральных делителей числа $n$. Докажите тождество $sp'(s)/p(s) = \sigma(s)$ . Выведите из него следующее рекуррентное соотношение для чисел $p_n$

$$np_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{n-k} p_k \,.$$

**20.19.** Найдите алгоритм перебора всех разбиений натурального числа $n$.

## 21 Теорема перечисления Пойа

**21.1.** Каждая из граней куба окрашена в один из 6 цветов, причем все 6 цветов использованы. Сколько существует различных раскрашиваний? (Два раскрашивания считаются одинаковыми, если одно из них получается из второго каким-нибудь поворотом куба.)
**21.2.** Найти порядок группы, порожденной подстановкой $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
**21.3.** Разложите подстановки $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ в произведения независимых циклов.
**21.4.** Пусть $H$ – множество, состоящее из подстановок:

$$1)\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right);$$

$$2)\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

В каком из этих случаев множество подстановок $H$ является подгруппой симметрической группы $S_4$?
**21.5.** Найти множества левых и правых классов смежности симметрической группы $S_3$ по подгруппе $H$ с образующим элементом $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Является ли подгруппа $H$ нормальным делителем в $S_3$?
**21.6.** Найти число подстановок циклового класса $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ группы $S_n$.
**21.7.** Подсчитайте количество сочетаний с повторениями из $t$ объектов объема $k$, в которых каждый объект встречается четное число раз.
**21.8.** Подсчитайте количество сочетаний с повторениями из $t$ объектов объема $k$, в которых каждый объект встречается не менее $p$ раз.
**21.9.**$^\circ$ Каким числом способов можно раскрасить множество сторон правильного треугольника в: 1) 2 цвета, 2) 3 цвета? (Два способа раскраски

считаются одинаковыми, если один из них сводится к другому каким-нибудь самосовмещением треугольника, производимым *в трехмерном пространстве.*)

**21.10.**° Каким числом способов можно раскрасить множество сторон правильного треугольника в: 1) 2 цвета, 2) 3 цвета? (Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один из них сводится к другому каким-нибудь движением треугольника, производимым *в его плоскости.*)

**21.11.** Каким числом способов можно раскрасить множество граней тетраэдра в: 1) 2 цвета, 2) 3 цвета? (Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один из них сводится к другому каким-нибудь самосовмещением тетраэдра, производимым в трехмерном пространстве.)

**21.12.** Каким числом способов можно раскрасить множество a) вершин, b) сторон 1) правильного треугольника, 2) квадрата, 3) правильного пятиугольника, 4) правильного шестиугольника, 5) прямоугольника, не являющегося квадратом в i) 2 цвета, ii) 3 цвета? (Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один из них сводится к другому каким-нибудь самосовмещением рассматриваемой фигуры, производимым $\alpha$) в плоскости фигуры, $\beta$) в трехмерном пространстве.)

**21.13.** Каким числом способов можно раскрасить множество a) вершин, b) ребер, c) граней тетраэдра в i) 2 цвета, ii) 3 цвета? (Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один из них сводится к другому каким-нибудь поворотом рассматриваемого тела, производимым в трехмерном пространстве.)

**21.14.** Решите задачу 21.13 в случаях, когда тетраэдр заменен одним из следующих тел: 1) кубом, 2) прямой пирамидой с основанием, равным правильному треугольнику (квадрату; шестиугольнику), 3) прямой двойной пирамидой с основанием, равным правильному треугольнику (квадрату; шестиугольнику), 4) параллелепипедом с тремя различными взаимно перпендикулярными ребрами.

**21.15.** Пусть $M$ – один из указанных ниже графов $M_1$, $M_2$, $M_3$, $G$ – группа всех автоморфизмов графа (или группа всех поворотов плоскости графа, переводящих граф в себя; или группа всех движений плоскости графа вокруг некоторой точки, переводящих граф в себя; или группа вращений трехмерного пространства вокруг точки $(0, 0, 0)$, переводящих граф в себя). Чему равно число различных относительно рассматриваемой группы $G$ раскрашиваний a) вершин, b) ребер графа в i) 2 цвета, ii) 3 цвета, то есть всех таких раскрашиваний, никакие два из которых не переводятся друг в друга никаким элементом рассматриваемой группы?

Граф $M_1$. Вершины – точки комплексной плоскости $0, 1, i, 1+i$; ребра – отрезки прямых, соединяющие следующие пары точек: 0 и 1, 0 и $i$, 1 и $1+i$, $i$ и $1+i$, 0 и $1+i$.

Граф $M_2$. Вершины – точки комплексной плоскости 0, 1, $e^{i\pi/3}$, $i+e^{i\pi/3}$; ребра – отрезки прямых, соединяющие следующие пары точек: 0 и 1, 0 и $e^{i\pi/3}$, 1 и $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi/3}$ и $e^{i\pi/3}+i$.

Граф $M_3$. Вершины – точки комплексной плоскости $i$, $2i$, $-i$, $-2i$, 2, $-2$, $3+i$, $3-i$, $-3+i$, $-3-i$; ребра – отрезки прямых, соединяющие следующие пары точек: $i$ и $2i$, $-i$ и $-2i$, 2 и $i$, $i$ и $-2$, $-2$ и $-i$, $-i$ и 2, 2 и $3+i$, 2 и $3-i$, $-2$ и $-3-i$, $-2$ и $-3+i$.

## 22 $q$-биномиальные коэффициенты Гаусса. Числа Стирлинга. Пилообразные перестановки

**22.1.** Каким числом способов множество первых $n$ натуральных чисел можно разбить на a) 2, b) 3 непустых подмножества? (Порядок подмножеств не учитывается.)

**22.2.** Доказать тождество

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-m \\ k-m \end{bmatrix}_q .$$

**22.3.** Пусть для всех элементов алгебры выполняется тождество $ba = qab$, где $q$ – некоторый элемент поля. Докажите, что в этой алгебре выполняется тождество

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^k b^{n-k} .$$

**22.4.** Докажите, что число разбиений числа $n$ на $l+1$ частей с наибольшей частью $r+1$ равно коэффициенту при $q^n$ полинома $q^{r+l+1} \begin{bmatrix} r+l \\ l \end{bmatrix}_q$.

**22.5.** Рассмотрим множество всех последовательностей из $k$ единиц и $n-k$ нулей. Каждой такой последовательности поставим в соответствие ломаную, соединяющую точки $(0,0)$ и $(k, n-k)$, $j$-е звено которой является вертикальным отрезком длины 1, если $j$-й член последовательности равен нулю, и – горизонтальным отрезком длины 1, если $j$-й член последовательности равен единице. Эта ломаная, а также ось абсцисс $Ox$ и прямая $x=k$ ограничивают некоторую фигуру. Покажите, что число путей, для которых площадь указанной фигуры равна $m$, равно коэффициенту при $q^m$ полинома Гаусса $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

**22.6.** Докажите справедливость тождеств

$$1)\quad \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1}-1\,, \qquad 2)\quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!\,,$$

$$3)\quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1\,, \qquad 4)\quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}\,,$$

$$5)\quad \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!\,.$$

**22.7.** Докажите тождество $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

**22.8.** Докажите справедливость тождеств:

$$1)\ \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}\,, \quad 2)\ \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}\,.$$

**22.9.** Покажите, что $(x)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

**22.10.** Докажите справедливость тождеств:

$$1)\ \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}\,, \quad 2)\ \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}\,.$$

**22.11.*** Покажите, что $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l \cdot l^n\,.$

**22.12.** Пользуясь представлением для чисел Стирлинга второго рода, данным в задаче 22.11, найдите экспоненциальную производящую функцию последовательности $\left\{\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

**22.13.** Каким числом способов можно разместить $n$ различимых шаров по $k$ неразличимым ящикам так, чтобы не осталось пустых ящиков?

**22.14.** Каким числом способов можно разместить $n$ различимых шаров по $k$ неразличимым ящикам? (Допускается наличие пустых ящиков.)

**22.15.** Докажите тождество

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k\,,$$

где $(x)_k = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$.

**22.16.*** Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — перестановка степени $n$. Элемент $b_j$ называется *рекордом*, если для всех номеров $i$, меньших, чем $j$, выполняется $b_i < b_j$. Докажите, что число перестановок степени $n$, имеющих $k$ рекордов, равно числу Стирлинга первого рода $\left[ {n \atop k} \right]$.

**22.17.** Укажите все пилообразные перестановки степени: 1) 4, 2) 5.

**22.18.** Сколько существует пилообразных перестановок степени: 1) 6, 2) 7?

**22.19.** Сколько существует пилообразных перестановок степени: 1) 6, 2) 7, начинающихся цифрой 1?

**22.20.** Докажите, что для каждой пилообразной перестановки существует морсовский полином типа, определяемого этой перестановкой.

**22.21.** Нарисуйте эскизы графиков всех типов морсовских полиномов степени 6.

**22.22.** Являются ли следующие полиномы морсовскими:

$$\begin{array}{llll} 1) & x^3+3x\,, & 2) & 3x^2+3\,, \\ 3) & x^4-2x^2\,, & 4) & x^3-6x^2+9x\,? \end{array}$$

**22.23.** Чему равно число типов морсовских полиномов степени 10, высота хвоста которых равна 7?

# Графы

## 23 Графы. Степень вершины. Операции над графами

**23.1.** Докажите, что не существует графа, степени всех вершин которого различны.

**23.2.**$^\circ$ Существует ли граф с заданной последовательностью степеней вершин:

| | |
|---|---|
| 1) $1, 1\,,$ | 2) $2, 2, 2\,,$ |
| 3) $2, 2, 2, 2\,,$ | 4) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3\,,$ |
| 5) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2\,,$ | 6) $3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2\,,$ |
| 7) $2, 2, 3, 3, 1\,,$ | 8) $\underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{n}, n, n\,,$ |
| 9) $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, n\,,$ | 10) $\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n}, n\,,$ |
| 11) $\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n-1}, 2, n\,,$ | 12) $\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{n-2}, 2, 2, n\,.$ |

**23.3.** Как-то раз встретились 9 членов одной семьи. Каждый прибыл сам по себе, но случайно все пришли одновременно. Каждый из прибывших расцеловал 5 своих родственников и пожал руки трем остальным. Возможно ли такое?

**23.4.**$^\circ$ Найдите граф, дополнительный к данному: 1) $K_{3,3}$, 2) $K_3$, 3) $W_6$, 4) $K_3 \cup N_2$, 5) $C_4 + N_1$, 6) $W_4 \cup K_2$, 7) $K_3 + N_2$, 8) $K_{1,3} \cup W_4$, 9) $(W_4 \cup K_3) + N_1$. Найдите матрицы смежности и инцидентности исходных и полученных графов.

**23.5.** Существует ли регулярный граф: 1) степени 3, 2) степени 4 с пятью вершинами?

**23.6.**$^\circ$ Найдите реберный граф для каждого из следующих графов: 1) $K_4$, 2) $K_{1,3}$, 3) $K_3 \cup C_4$, 4) $K_{2,3}$, 5) $C_4 + N_1$, 6) $K_2 \cup K_2 \cup N_1$. Найдите матрицы смежности и инцидентности исходных и полученных графов.

**23.7.** Являются ли следующие графы реберными графами каких-либо графов: 1) $K_3$, 2) $K_2$, 3) $N_2$, 4) $N_3$, 5) $K_2 \cup K_2 \cup N_1$, 6) $K_{1,3}$?

**23.8.** Приведите пример графа, являющегося рёберным для двух разных (неизоморфных) графов.
**23.9.** Пусть графы $G_1 = (V_1, R_1)$ и $G_2 = (V_2, R_2)$ гомеоморфны. Докажите, что $|V_1| - |R_1| = |V_2| - |R_2|$.
**23.10.** Докажите, что при любой раскраске ребер полного графа на шести вершинах в два цвета найдется подграф с тремя вершинами, все ребра которого покрашены в один цвет.
**23.11.** Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся такие 3 человека, что либо любые два из них знакомы друг с другом, либо любые два из них незнакомы друг с другом.
**23.12.** Может ли полный граф иметь 37 ребер?
**23.13.** Докажите, что связный граф с $n$ вершинами имеет не менее $n-1$ ребер.
**23.14.** Докажите, что если в графе степень каждой вершины четна, то в нем нет мостов.
**23.15.** Пусть плоскость разбита конечным числом прямых. Докажите, что хроматическое число полученной таким образом карты равно двум. Рассмотрите аналогичный вопрос для трехмерного пространства, разбитого конечным числом плоскостей.
**23.16.** Найдите сумму графов:

$$1)\quad C_5 + N_1\,, \qquad 2)\quad C_6 + N_2\,, \qquad 3)\quad C_6 + K_2\,,$$
$$4)\quad N_3 + N_3\,, \qquad 5)\quad C_4 + C_4\,.$$

Найдите матрицы смежности и инцидентности полученных графов.
**23.17.** Найдите произведение графов:

$$1)\quad C_3 \times N_2\,, \qquad 2)\quad C_4 \times K_2\,, \qquad 3)\quad C_4 \times L_3\,,$$
$$4)\quad N_3 \times N_3\,, \qquad 5)\quad C_3 \times C_3\,, \qquad 6)\quad L_4 \times L_5\,.$$

## 24 Планарные, эйлеровы и гамильтоновы графы

**24.1.**$^\circ$ Являются ли планарными графы 1) $K_4$, 2) $K_{2,2}$, 3) $K_{3,3}$, 4) $K_{4,5}$, 5) $K_8$, 6) $C_3 \times N_2$, 7) $C_3 \times C_2$?
**24.2.** Какие из графов задач 23.16, 23.17 являются планарными?

**24.3.** Докажите непланарность графа Петерсена.

**24.4.** Докажите, что в каждом планарном графе есть по крайней мере одна вершина степени, не превосходящей 5.

**24.5.** Докажите непланарность графа $K_5$, опираясь на оценку сверху числа ребер в связном планарном графе через число вершин.

**24.6.** Пусть $G = (V, R)$ такой граф, что $|V| \geqslant 11$. Докажите, что оба графа $G$ и $\overline{G}$ не могут быть планарными.

**24.7.*** Докажите, что реберный граф непланарного графа непланарен.

**24.8.** Верно ли, что реберный граф планарного графа планарен?

**24.9.** Докажите, что если число ребер графа не меньше числа его вершин, то в графе есть цикл.

**24.10.** (Теорема Эйлера для несвязных графов.) Пусть $G$ – планарный граф с $k$ связными компонентами, $v$ вершинами, $r$ ребрами, $g$ гранями. Докажите, что $v - r + g = k + 1$.

**24.11.**° Какие из указанных ниже графов являются эйлеровыми и какие – гамильтоновыми: 1) $W_n$, 2) $K_n$, 3) $C_n$, 4) $K_{m,n}$, 5) $C_n + N_2$?

**24.12.** Какие из платоновых графов являются эйлеровыми? Какие – гамильтоновыми?

**24.13.** Какие из графов задач 23.16, 23.17 являются эйлеровыми (гамильтоновыми)?

**24.14.** Приведите примеры графов $G$ таких, что $G$: 1) эйлеров и гамильтонов, 2) неэйлеров и гамильтонов, 3) эйлеров и негамильтонов, 4) неэйлеров и негамильтонов.

**24.15.** Покажите, что граф, $G = (V, R)$, в котором $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $R = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$, произвольно вычерчиваем из вершины $v_1$ и не является произвольно вычерчиваемым из любой другой своей вершины.

**24.16.** Приведите пример графа, произвольно вычерчиваемого из любой своей вершины.

**24.17.** Существует ли эйлеров граф, не обладающий вершиной, из которой он был бы произвольно вычерчиваем?

# 25 Хроматическое число. Хроматический многочлен

**25.1.** Найдите хроматическое число каждого из графов задач 23.16 и 23.17.

**25.2.**° Найдите хроматическое число каждого из платоновых графов.

**25.3.**° Найдите хроматические числа графов 1) $C_n$, 2) $W_n$, 3) $K_{m,n}$, 4) $N_n$, 5) $K_n$, а также графа Петерсена.

**25.4.** Выразите $\chi\,(G_1 + G_2)$ и $\chi\,(G_1 \cup G_2)$ через $\chi\,(G_1)$ и $\chi\,(G_2)$.

**25.5.** Покажите, что $K_n$ – критический граф при $n > 1$.

**25.6.** Является ли критическим граф $C_n$?

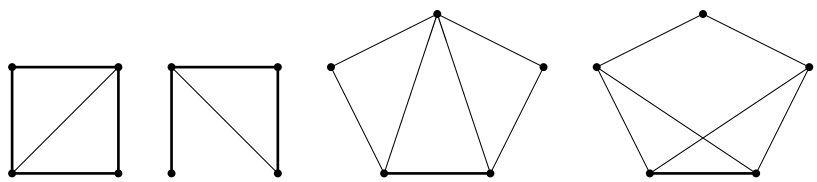
**25.7.** При каких $n$ граф $C_n + C_n$ является критическим? Найдите $\chi\,(C_n + C_n)$.

**25.8.**° Найдите хроматические многочлены графов 1) $L_n$, 2) $N_n$, 3) $K_n$, 4) $K_{1,n}$, 5) $K_{2,n}$.

**25.9.** Найдите хроматический многочлен графа $G = (V, R)$, где:
1) $V = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{a, c\}\}$,
2) $V = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{d, a\}\}$.

**25.10.** Найдите хроматический многочлен графа, соответствующего:
1) тетраэдру, 2) октаэдру.

**25.11.** Найдите хроматические многочлены следующих графов:



**25.12.** Докажите, что хроматический многочлен всякого графа равен произведению хроматических многочленов его связных компонент.

**25.13.** Пусть $G$ – критический граф, $\chi(G) = k$. Докажите следующие утверждения:
1) $G$ – связен,
2) $deg\, v \geqslant k - 1$ для всех вершин $v$ графа $G$.

**25.14.** Пусть $G = G_1 \cup G_2$ и графы $G_1$ и $G_2$ имеют ровно одну общую вершину. Докажите, что $P_G(x) = x^{-1} P_{G_1}(x)\, P_{G_2}(x)$.
($P_H(x)$ — хроматический многочлен графа $H$.)

**25.15.*** Пусть $G$ — граф, $P_G(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$ – его хроматический многочлен. Докажите, что $a = 1$, $b = -|R|$.

# Вероятность

## 26 Операции над событиями. Свойства вероятности

**26.1.°** Из урны, содержащей белые и черные шары, извлечены с возвращением $n$ шаров. Пусть $A_i$ — событие, состоящее в том, что $i$-й шар белый ($i = 1, 2, \ldots, n$). Выразите через события $A_i$ следующие события:
1) все извлеченные шары белые,
2) все извлеченные шары одного цвета,
3) хотя бы один из извлеченных шаров белый,
4) точно один из извлеченных шаров белый,
5) не более двух из извлеченных шаров белые,
6) по крайней мере два из извлеченных шаров белые,
7) точно два из извлеченных шаров белые.

**26.2.** Случайный эксперимент состоит в выборе одной из возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. Пусть $A_{ij}$ — событие, состоящее в том, что в выбранной перестановке число $i$ стоит на $j$-м месте ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Выразите через $A_{ij}$ следующие события:
1) число 1 стоит левее числа 2,
2) число 1 стоит не далее $k$-го места.

**26.3.°** Пусть $A, B, C$ — три произвольных события в одном и том же вероятностном пространстве. Выразите через них следующие события:
1) произошло только $A$,
2) произошли $A$ и $B$, но $C$ не произошло,
3) все три события произошли,
4) произошло хотя бы одно из этих событий,
5) произошло точно одно из этих событий,
6) произошло точно два из этих событий,
7) произошло не меньше двух из этих событий,
8) произошло не более двух из этих событий,
9) ни одно из событий $A, B, C$ не произошло.

**26.4.** Докажите, что если $P(A) = P(B) = 1/2$, то $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap B)$.
**26.5.** Выразите вероятности событий $A \cup B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\bar{A} \cap (A \cup B)$, $A \cup (\bar{A} \cap B)$ через вероятности событий $A$, $B$, $A \cap B$.
**26.6.** Пусть $P(A) \geqslant 0{,}7$, $P(B) \geqslant 0{,}7$. Докажите, что тогда выполняется неравенство $P(A \cap B) \geqslant 0{,}4$.
**26.7.** Пусть $A, B, C$ – события в некотором вероятностном пространстве. Докажите, что имеет место неравенство
$P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(B \cap C) \leq P(A)$.
**26.8.** Пусть $A, B, C$ – события в некотором вероятностном пространстве. Докажите, что имеет место неравенство
$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq P(A) + P(B) + P(C) - 1$.

## 27 Равномерное распределение вероятностей

**27.1.**$^\circ$ В коробке лежат 5 красных, 6 синих и три зеленых карандаша. Из коробки наугад извлекли 3 карандаша. Найдите вероятность того, что среди них хотя бы один красный.
**27.2.** В ящике лежат 8 красных, 10 зелёных и 12 синих шаров. Наудачу вынуты 3 шара. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них одного цвета?
**27.3.**$^\circ$ Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Полученные кубики тщательно перемешаны и из их множества наугад извлечен один. Найдите вероятность того, что он будет иметь $k$ окрашенных граней ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).
**27.4.**$^\circ$ Случайным образом брошены 2 игральные кости. Что более вероятно, получить в сумме 7 или 8? Рассмотрите случаи: а) кости различимы, б) кости неразличимы.
**27.5.**$^\circ$ Случайным образом брошены 3 монеты (например, достоинством 1, 2, 5 копеек). Найдите вероятности следующих событий:
1) выпал „герб“ на всех монетах, 2) выпал хотя бы один „герб“,
3) выпал точно один „герб“, 4) выпало не меньше двух „гербов“,
5) не выпало ни одного „герба“.
**27.6.**$^\circ$ На шахматную доску размером $n \times n$ клеток наугад поставили белую и черную ладьи. Что вероятнее: ладьи бьют друг друга или нет?

**27.7.**$^\circ$ Сравните вероятности получения суммы, равной 9 и 10, при однократном бросании 1) двух игральных костей, 2) трех костей.

**27.8.** Найдите вероятность того, что среди цифр наугад взятого шестизначного числа: 1) нет 0 и 9, 2) нет 0, но есть 9, 3) нет 9, но есть 0, 4) есть и 0, и 9, 5) нет 0 или 9.

**27.9.** Случайным образом брошены 3 игральные кости. (Рассмотрите варианты: а) кости различимы, б) кости неразличимы.) Найдите вероятности следующих событий: 1) выпала точно одна „шестерка", 2) выпала хотя бы одна „шестерка", 3) выпали не меньше двух „шестерок".

**27.10.** В урне лежат 5 белых и 5 черных шаров. Наугад извлекают один за другим 3 шара. В каком случае больше вероятность извлечь 2 белых и 1 черный шар — в случае выбора с возвращением или в случае выбора без возвращения? В каком из этих случаев более вероятно появление трех белых шаров?

**27.11.** В урне лежат 5 шаров различного цвета. Производится выборка с возвращением объема 25. Найдите вероятность того, что в выборке будет по 5 шаров каждого цвета.

**27.12.** Пусть $k$ — натуральное число. Какова вероятность $p_k$ того, что при случайном выборе $k$ человек по крайней мере у двух из них дни рождения совпадают? Покажите, что эта вероятность возрастает при $1 \leqslant k \leqslant 365$. При каком наименьшем $k$ выполняется неравенство $p_k > 0{,}5$ ($p_k > 0{,}9$, $p_k > 0{,}99$)?

**27.13.** Найдите вероятность того, что дни рождения 12 наугад взятых людей придутся на разные месяцы года.

**27.14.** В лифт десятиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятности событий:

1) все пассажиры выйдут на четвертом этаже,

2) все пассажиры выйдут на одном и том же этаже,

3) все пассажиры выйдут на разных этажах,

4) два пассажира выйдут на одном этаже, а один — на другом.

**27.15.** Игральная кость брошена 6 раз. Найдите вероятности событий:

1) выпадет $k$ чисел ($0 \leqslant k \leqslant 6$),

2) не выпадет ни одного четного числа.

**27.16.** (Задача Пипса) Один игрок бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна „единица“. Другой игрок бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы две „единицы“. Сравните вероятности выигрыша игроков. Рассмотрите задачу, получающуюся, если слова „хотя бы“ заменить словом „точно“.

**27.17.** (Задача де Мере) Что более вероятно — получить хотя бы одну единицу при бросании 4 игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

**27.18.** Из ящика, в котором находятся $a$ белых и $b$ черных шаров, наугад взяты $K$ шаров. Чему равна вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется $k$ белых?

**27.19.** Среди $N$ изделий имеется $n$ бракованных. Наугад взяты $K$ изделий. Какова вероятность того, что среди них точно $k$ бракованных?

**27.20.** $2n$ спортсменов случайным образом распределены на две команды по $n$ человек в каждой для игры в футбол. Чему равна вероятность того, что два самых сильных игрока оказались в разных командах?

**27.21.** Из колоды в 36 карт наугад извлечены 2 карты. Найдите вероятность того, что они: 1) одинакового наименования, 2) одинакового цвета, 3) одинаковой масти.

**27.22.** Найдите вероятность того, что в наугад взятом 5-значном числе:
1) все цифры разные,
2) цифры образуют возрастающую последовательность,
3) цифры образуют неубывающую последовательность,
4) цифры образуют убывающую последовательность,
5) среди цифр точно $k$ различных ($1 \leq k \leq 5$),
6) все цифры, кроме одной, четные.

**27.23.** Из колоды игральных карт наугад взяты 5 карт. Найдите вероятности следующих событий:
1) „десятка“, „валет“, „дама“, „король“, „туз“ одной масти,
2) 4 карты одного значения,
3) 3 карты одного значения и 2 — другого,
4) 5 последовательных по значению карт произвольных мастей,
5) 3 карты одного значения плюс 2 карты других различных значений,
6) 2 карты одного значения, 2 карты — другого и 1 — третьего,

7) 2 карты одного значения плюс 3 карты разных значений, отличных от данного.

**27.24.** Из колоды, содержащей 36 карты, наугад извлекли 6 карт. Чему равна вероятность того, что среди извлеченных карт окажется:
1) ровно 3 бубны, 2) хотя бы одна бубна, 3) не менее двух бубен, 4) хотя бы один туз, 5) точно один туз, 6) одинаковое число карт червовой и бубновой мастей, 7) хотя бы по одной карте каждой масти?

**27.25.** Из колоды, содержащей 36 карт, четырем игрокам сдали по 6 карт. Чему равна вероятность следующих событий:
1) у каждого игрока будет не больше одного туза,
2) у каждого игрока будут карты только одной масти,
3) у двух игроков будут карты только красного цвета, а у двух других — только черного?

**27.26.** Найдите вероятность того, что при случайном выборе 3 чисел из множества чисел $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 2k\}$ их сумма окажется четной.

**27.27.** Найдите вероятность того, что при случайном выборе 3 чисел из множества чисел $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 3k\}$ их сумма окажется кратной трем.

**27.28.** В мешке находятся $n$ пар ботинок. Наугад взяты $2r$ ботинок. Найдите вероятность того, что среди извлеченных ботинок: 1) нет ни одной пары; 2) есть точно одна пара.

**27.29.** Найдите вероятность того, что случайно взятое 6-значное число содержит ровно 3 различные цифры.

**27.30.°** Найдите вероятность того, что в случайно взятом 9-значном числе сумма его цифр равна: 1) 3, 2) 80.

**27.31.** 10 супружеских пар обедают вместе. Из них по жребию выбирают 5 человек, которые должны накрывать на стол. Найдите вероятность того, что среди этих пяти человек не будет: 1) ни одной супружеской пары, 2) ни одной женщины.

**27.32.** На сторонах квадрата (не в вершинах) отмечено по $n$ точек. Из полученного набора точек наугад взяты 3 точки. Найдите вероятность того, что они являются вершинами невырожденного треугольника. Каков предел этой вероятности при $n \to \infty$? Рассмотрите задачу при условии, что вершины квадрата включаются в число точек, из которых производится случайный выбор.

**27.33.** В конкурсе участвуют $n$ человек. Трое судей независимо друг от друга пронумеровывают эти $n$ лиц в порядке, отражающем их успехи в соревновании. Лицо считается победителем, если его назовут первым хотя бы двое из трех судей. Чему равна вероятность того, что решения судей не позволят установить победителя?

**27.34.** За прямоугольным столом с $2n$ местами (по $n$ мест с каждой из двух противоположных сторон) наугад рассаживаются $n$ супружеских пар. Найдите вероятности следующих событий:

1) ни одна женщина не имеет своим соседом мужчину,

2) супруги сидят рядом,

3) супруги сидят рядом, причем жена — слева от мужа,

4) супруги сидят друг напротив друга,

5) мужчины и женщины чередуются,

6) по крайней мере один из соседей каждой женщины — мужчина.

**27.35.** Имеется $a, b$ и $c$ неразличимых белых, красных и зеленых шаров соответственно. Случайным образом из них составляется перестановка. Найдите вероятность того, что:

1) полученная перестановка содержит одну серию белых и одну серию красных шаров,

2) в полученной перестановке первый и последний шары красные, а белые шары идут подряд,

3) в полученной перестановке зеленые шары образуют одну серию.

**27.36.** На окружности отмечены $4n$ мест. На них наугад расставляются $n$ нулей и $n$ единиц. Какова вероятность того, что незанятые и занятые места чередуются?

**27.37.** Случайным образом расставлены в ряд $n$ нулей и $2n$ единиц. Какова вероятность того, что: 1) на местах с четными номерами стоят единицы, 2) число серий нулей равняется двум, 3) никакие 2 нуля не стоят рядом и ряд начинается и заканчивается единицами?

**27.38.** Имеется $n$ карточек, занумерованных числами от 1 до $n$, и $n$ конвертов, занумерованных числами от $n+1$ до $2n$. Карточки вкладываются в конверты наугад (в каждый конверт по одной карточке). Найдите вероятность того, что сумма чисел на любом конверте и лежащей в нем карточке четна. Как ведет себя эта вероятность при $n \to \infty$?

**27.39.** Найдите вероятность того, что в случайно взятой перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$: 1) числа 1 и 2 стоят рядом, 2) числа $1, 2, 3$ стоят рядом, 3) число 3 стоит между числами 1 и 2 (не требуется, чтобы числа 1,3,2 шли подряд), 4) между числами 1 и $n$ стоят $k$ чисел.

**27.40.** Найдите вероятность того, что в хорошо перетасованной колоде карт: 1) тузы расположены рядом, 2) места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 3, 3) никакие два туза не лежат рядом.

**27.41.** На автомобильной стоянке 12 мест расположены в один ряд. Некто заметил, что на стоянке находятся 8 автомобилей и что 4 свободных места примыкают друг к другу. Указывает ли такое расположение свободных мест на отсутствие случайности?

**27.42.** Случайным образом переставлены буквы в слове „комбинаторика". Найдите вероятности событий: 1) одинаковые буквы не стоят рядом, 2) никакие две гласные буквы не стоят рядом.

**27.43.** (Статистика Максвелла-Больцмана) $n$ *различимых* шаров случайным образом распределены по $k$ различимым ящикам. Все ящики настолько велики, что все шары могут поместиться в одном из них. Найдите вероятности событий: 1) в 1-м, 2-м,..., $k$-м ящике будет соответственно $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ шаров ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), 2) не будет пустых ящиков, 3) окажутся занятыми точно $l$ ящиков, 4) ящик с номером $j$ содержит $s$ шаров. Обозначим $p_{n,k}(s)$ вероятность последнего события. При каком значении $s$ она максимальна? Покажите, что $p_{n,k}(s) \to e^{-\lambda}\lambda^s/s!$, когда $n \to \infty$ и $k \to \infty$ так, что $n/k \to \lambda$.

**27.44.** (Статистика Бозе-Эйнштейна) $n$ *неразличимых* шаров случайным образом распределены по $k$ различимым ящикам. Все ящики настолько велики, что все шары могут поместиться в одном из них. Найдите вероятности событий: 1) в 1-м, 2-м,..., $k$-м ящике будет соответственно $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ шаров ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), 2) не будет пустых ящиков, 3) окажутся занятыми точно $l$ ящиков, 4) ящик с номером $j$ содержит $s$ шаров. Обозначим $q_{n,k}(s)$ вероятность последнего события. Докажите, что при $k > 2$ выполняются неравенства $q_{n,k}(0) > q_{n,k}(1) > q_{n,k}(2) > \ldots$. Покажите, что $q_{n,k}(s) \to \lambda^s/(1+\lambda)^{s+1}$, когда $n \to \infty$ и $k \to \infty$ так, что $n/k \to \lambda$.

**27.45.** (Статистика Ферми-Дирака) $n$ *неразличимых* шаров случайным образом распределены по $k$ различимым ящикам. Причем в каждый ящик может поместиться только один шар. Найдите вероятность события: в 1-м, 2-м,…, $k$-м ящике будет соответственно $n_1$, $n_2$, …, $n_k$ шаров ($n_j$ = 0 или 1).

**27.46.** $n+2$ различимых шара наугад размещаются по $n$ различимым ящикам. Найдите вероятности событий: 1) не окажется ни одного пустого ящика, 2) ящик №1 пуст, 3) только ящик №1 пуст, 4) точно один ящик пуст, 5) хотя бы один ящик пуст, 6) имеется ящик, содержащий точно $n$ шаров, 7) имеется ящик, содержащий не менее $n$ шаров, 8) шары №1 и №2 лежат в разных ящиках, 9) шары №1 и №2 лежат в соседних ящиках, 10) все шары находятся в двух ящиках. Решите также эту задачу (пункты 1) – 7), 10)), предполагая шары неразличимыми.

**27.47.** Найдите вероятность того, что наугад взятое целое число, заключенное между 1 и 10000:

1) не делится на 3, 2) не делится ни на 3, ни на 5,

3) не делится ни на 3, ни на 5, ни на 11,

4) не делится ни на 3, ни на 5, но делится на 11,

5) не является ни квадратом, ни кубом, ни четвертой степенью целого числа.

**27.48.** Написаны $n$ писем разным лицам и вложены в конверты случайным образом (по одному письму в каждый конверт). Какова вероятность того, что:

1) хотя бы один из адресатов получит предназначенное ему письмо,

2) $k$ адресатов получат предназначенные им письма?

**27.49.** Написаны $2n$ писем $n$ разным лицам, каждому по 2 письма. Письма вложены в конверты случайным образом (по одному письму в каждый конверт). Какова вероятность того, что хотя бы один из адресатов получит хотя бы одно предназначавшееся ему письмо?

**27.50.** Какова вероятность того, что в наугад взятом члене определителя $n$-го порядка нет элементов главной диагонали?

**27.51.** Какова вероятность того, что в наугад взятой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ ни одно из этих чисел не стоит на своем месте?

**27.52.** $n$ человек решили сделать друг другу подарок следующим образом. Каждый приносит подарок, они складываются в мешок, перемешиваются, затем каждый берет наугад из мешка один подарок. Что более вероятно: каждый из пришедших получит подарок, принесенный кем-то другим, или хотя бы один из пришедших получит подарок, принесенный им самим? Каков ответ при больших $n$?

## 28 Условная вероятность

**28.1.** Пусть $A, B$ – события в некотором вероятностном пространстве. Верны ли равенства: 1) $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$, 2) $P(B|A) + P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$, 3) $P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1$?
**28.2.** Покажите, что если $P(A|B) > P(A)$, то и $P(B|A) > P(B)$.
**28.3.** Покажите, что $P(A|B) > (P(A) + P(B) - 1)/P(B)$.
**28.4.** Выразите вероятности $P(A|B)$, $P(\bar{A}|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(\bar{A}|\bar{B})$ через вероятности событий $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.
**28.5.** Бросают 2 симметричные различимые монеты.
1) Известно, что на 1-й монете выпал герб. Какова вероятность того, что и на 2-й монете выпал герб?
2) Известно, что на одной из монет выпал герб. Какова вероятность того, что и на другой монете выпал герб?
**28.6.** Из колоды игральных карт наугад взяты 5 карт. Найдите вероятности указанных ниже событий, если известно, что все извлеченные карты одного цвета:
1) „десятка“, „валет“, „дама“, „король“, „туз“ одной масти,
2) 4 карты одного значения,
3) 3 карты одного значения и 2 — другого,
4) 5 последовательных по значению карт произвольных мастей,
5) 2 карты одного значения, 2 карты — другого и 1 — третьего,
6) 2 карты одного значения плюс 3 карты разных значений, отличных от данного.
**28.7.** Случайным образом брошены 3 игральные кости. Найдите вероятности событий: 1) выпала точно одна „шестерка“, 2) выпала хотя бы одна „шестерка“, 3) выпали не меньше двух „шестерок“, если известно, что выпало не больше двух „шестерок“.

**28.8.** В некоторой области дождливыми бывают четверть всех дней. Замечено, что если в какой-то день идет дождь, то в двух случаях из трех он будет идти и на следующий день. Чему равна вероятность того, что в данный день не будет дождя, если накануне дождя не было?
**28.9.** Из колоды игральных карт наугад извлекают 6 карт. Найдите вероятность того, что среди них имеются все тузы, если известно, что присутствуют карты всех четырех мастей.
**28.10.** Урна содержит $M$ шаров, из которых $m$ — белого цвета. Производится выборка объема $n$. Пусть событие $A_j$ состоит в том, что извлеченный $j$-м шар был белым $(j = 1, 2, \ldots, n)$, а событие $B_k$ состоит в том, что в выборке оказалось точно $k$ белых шаров. Вычислите вероятности $P(A_j|B_k)$ в случаях выборки с возвращением и выборки без возвращения.
**28.11.** Вероятности попадания при одном выстреле для трех стрелков равны 4/5, 3/4 и 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось 2 попадания. Какой из стрелков вероятнее всего промахнулся? Что более вероятно: попал третий стрелок в мишень или нет?

## 29 Формула полной вероятности

**29.1.** В 1-й урне находятся 2 белых различимых шара и 4 черных различимых шара, во 2-й урне – 4 белых и 2 черных шара. Наугад берут 2 шара в 1-й урне и перекладывают их во вторую. После этого во 2-й урне наугад берут один шар. Найти вероятность того, что он окажется белым.
**29.2.** Бросили 2 монеты, а потом из колоды игральных карт извлекли столько карт, сколько гербов появилось на монетах. Чему равна вероятность появления точно одного туза?
**29.3.** Имеются 2 ящика с шарами. В 1-м ящике находятся по $n$ белых и черных шаров, во 2-м — 2 белых и 1 черный. В 1-м ящике наугад взяты 2 шара и переложены во 2-й ящик. После этого из 2-го ящика наугад извлечен 1 шар. Чему равна вероятность того, что он белый?
**29.4.** Производится 4 независимых опыта, в каждом из которых событие $V$ происходит с вероятностью 0,4. В результате событие $W$ наступает с вероятностью 1, если событие $V$ произошло не менее двух раз, не может наступить, если событие $V$ не имело места, и наступает с вероятностью

0,6, если событие $V$ имело место 1 раз. Найдите вероятность наступления события $W$.

**29.5.** Пусть $A, B_k, C$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ – события в некотором вероятностном пространстве, причем события $B_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ образуют полную группу событий. Докажите, что имеет место следующее равенство $P(A|C) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k \cap C)P(B_k|C)$.

**29.6.** Из колоды игральных карт извлекли случайным образом 4 карты, а потом наугад распределили 3 неразличимых шара по такому числу ящиков, какое число карт среди извлеченных оказались бубновыми. Сколько в среднем ящиков остались пустыми?

**29.7.** Из колоды игральных карт извлекли случайным образом 3 карты, а потом наугад распределили 4 неразличимых шара по такому числу ящиков, какое число карт среди извлеченных были красного цвета. Сколько в среднем ящиков остались пустыми?

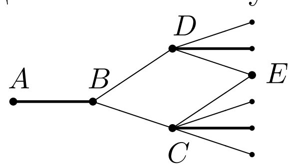
**29.8.** В $k$ из $n$ ящиков находятся по $a$ белых и $b$ черных шаров, а в остальных — наоборот. Наугад взят ящик, а из него — шар. Найдите вероятность того, что он белый. Найдите предел этой вероятности при: 1) $k \to \infty$, 2) $n \to \infty$, 3) $k \to \infty$, $n \to \infty$, $n/k \to \lambda$.

**29.9.** По четырем ящикам наугад распределили 3 различимых шара, а потом из колоды игральных карт извлекли случайным образом столько карт, сколько оказалось пустых ящиков. Сколько в среднем появилось карт бубновой масти?

**29.10.** По четырем ящикам наугад распределили 3 неразличимых шара, а потом из колоды игральных карт извлекли случайным образом столько карт, сколько оказалось ящиков, содержащих точно один шар. Сколько в среднем появилось карт красного цвета?

**29.11.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 2 белых (б) и 1 черный (ч), 3 б и 1 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящиках №1 и №2 наугад взяли по одному шару и положили их в ящик №3. Затем из ящика №3 наугад извлекли 2 шара. Найдите среднее число белых шаров среди них.

**29.12.** Двум пешеходам надо попасть из пункта $A$ в пункт $E$.



Выбор дороги на перекрестке осуществляется так. Первый выбирает дорогу наугад (та дорога, по которой он пришел к перекрестку, исключается). Второй выбирает крайний правый по ходу путь с вероятностью 1/2, а остальные — с равными вероятностями. Для какого из пешеходов вероятность достичь пункт $E$ больше?

**29.13.** В ящике находятся $an$ новых теннисных мячей и $bn$ старых (по определению, новый — это такой мяч, которым ни разу не играли; остальные мячи называются старыми). Для первой игры наугад взяли 3 мяча и после игры возвратили их в ящик. Для второй игры снова наугад взяли 3 мяча. Найдите вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, были новыми. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

**29.14.** Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $p$, а вероятность поражения цели при $k$ $(k \geqslant 1)$ попаданиях в нее равна $1 - a^k$ $(0 < a < 1)$. Найдите вероятность поражения цели при $n$ выстрелах.

## 30 Формула Байеса

**30.1.** В 1-й урне находятся 3 белых различимых шара и 4 черных различимых шара, во 2-й урне – 4 белых и 3 черных шара. Наугад берут 2 шара в 1-й урне и перекладывают их во 2-ю. После этого во 2-й урне наугад берут один шар. Он оказался белым. Найдите вероятность того, что из 1-й урны были переложены во 2-ю 2 белых шара.

**30.2.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 2 белых (б) и 1 черный (ч), 3 б и 1 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящиках №1 и №2 наугад взяли по одному шару и положили их в ящик №3. Затем из ящика №3 наугад извлекли 2 шара. Известно, что среди извлеченных из ящика №3 шаров точно один белый. Найдите вероятность того, что из ящика №1 был извлечен белый шар.

**30.3.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 2 белых (б) и 1 черный (ч), 3 б и 1 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящиках №1 и №2 наугад взяли по одному шару и положили их в ящик №3. Затем из ящика №3 наугад извлекли 2 шара. Известно, что оба извлеченных из ящика №3 шара одного цвета. Найдите вероятность того, что из ящика №1 был извлечен белый шар.

**30.4.** Бросили 2 монеты, а потом из колоды в 36 карт извлекли столько карт, сколько гербов появилось на монетах. Известно, что появился точно один туз. Чему равна вероятность появления на монетах точно одного герба?

**30.5.** Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 7 — с вероятностью 0,7, 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наугад выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп он вероятнее всего принадлежал?

**30.6.** В ящике находятся $an$ новых теннисных мячей и $bn$ старых (по определению, новый — это такой мяч, которым ни разу не играли; остальные мячи называются старыми). Для первой игры наугад взяли 5 мячей и после игры возвратили их в ящик. Для второй игры снова наугад взяли 5 мячей. Оказалось, что все они новые. Найдите вероятность того, что мячи, взятые для первой игры, тоже все были новыми. Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

**30.7.** 5 граней игрального кубика покрашены в белый цвет, а одна — в зеленый. Сначала бросают один раз этот кубик, а потом бросают 2 монеты, если на кубике выпала зеленая грань, и 100 монет, если выпала белая грань. Известно, что на монетах выпали точно 2 герба. Чему равна вероятность того, что на кубике выпала зеленая грань?

**30.8.** Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.

**30.9.** В 1-м ящике находятся $n$ белых и 1 черный шар, во 2-м — наоборот, 1 белый и $n$ черных. Наугад взят ящик и из него извлечен 1 шар.

1) Чему равна вероятность того, что он белый?

2) Пусть известно, что извлечен белый шар. Чему равна вероятность того, что он был извлечен из 1-го ящика?

**30.10.** Имеются 2 ящика с шарами. В 1-м ящике находятся 2 белых и 1 черный шар, во 2-м — $10^6$ белых и 1 черный. Наугад взят ящик и из него извлечен 1 шар.

1) Чему равна вероятность того, что он белый?

2) Пусть известно, что извлечен белый шар. Чему равна вероятность того, что он был извлечен из 2-го ящика?

**30.11.** Иногда при печати машинистка допускает ошибки, ударяя по клавише, находящейся справа или слева от нужной, причем вероятность удара по каждой из этих ошибочных клавиш составляет 0,02. На стандартной латинской клавиатуре литеры E, R, T находятся рядом, а в текстах на английском языке они встречаются с вероятностями $P(E) = 0{,}1031, P(R) = 0{,}0484, P(T) = 0{,}0796$. 1) С какой вероятностью в отпечатанном этой машинисткой материале будет встречаться буква R? 2) Какова вероятность того, что буква R, встретившаяся в таком материале, будет ошибочной?

## 31 Теорема умножения вероятностей

**31.1.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 2 белых (б) и 1 черный (ч), 1 б и 2 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящике №1 наугад взяли шар и переложили его в ящик №2, затем из ящика №2 наугад взяли шар и переложили его в ящик №3, после чего в ящике №3 наугад взяли шар и переложили его в ящик №1. Найдите вероятность того, что состав шаров во всех ящиках не изменится.

**31.2.** Решите задачу 31.1 для следующих схем перекладывания шаров:
1) $2 \to 3 \to 1 \to 2$, 2) $3 \to 1 \to 2 \to 3$,
3) $1 \to 3 \to 2 \to 1$, 3) $3 \to 2 \to 1 \to 3$.

**31.3.** Решите задачу 31.1 и 31.2 в случае, когда перекладывается по два шара.

**31.4.** Решите задачи 31.1, 31.2 и 31.3 в случае следующего состава шаров: №1 — $n$ б и $n$ ч, №2 — $2n$ б и $n$ ч, №3 — $3n$ б и $n$ ч.

## 32 Независимость случайных событий

**32.1.**$^\circ$ Из колоды в 36 карт наугад извлекается одна карта. Являются ли независимыми события: $A = \{$появилась бубновая карта$\}$, $B = \{$появился туз$\}$?

**32.2.**$^\circ$ Из колоды в 36 карт наугад извлекается две карты. Являются ли независимыми события: $A = \{$обе извлеченные карты бубновые$\}$, $B = \{$среди извлеченных карт есть хотя бы один туз$\}$?

**32.3.** Наугад взята перестановка множества $1, 2, \ldots, n$. Являются ли независимыми события: $A = \{$единица предшествует двойке$\}$, $B = \{$тройка предшествует четверке$\}$?

**32.4.** Симметричную монету бросают раз $n$ $(n = 2, 3, 4)$. Событие $A_n$ состоит в том, что герб выпал не более одного раза, а событие $B_n$ состоит в том, что герб и цена выпали не менее одного раза. Независимы ли события $A_n$ и $B_n$?

**32.5.** Брошены 2 различимые игральные кости. Пусть $A = \{$на 1-й кости выпало четное число очков$\}$, $B = \{$на 2-й кости выпало нечетное число очков$\}$, $C = \{$сумма выпавших очков нечетна$\}$. Являются ли события $A, B, C$ независимыми в совокупности или попарно независимыми?

**32.6.** Пусть пространство $\Omega$ состоит из всех перестановок трех букв $a, b, c$, а также троек $(a, a, a)$, $(b, b, b)$ и $(c, c, c)$. Зададим на пространстве $\Omega$ равномерное распределение вероятностей. Пусть событие $A_k$ состоит в том, что на $k$-м месте стоит буква $a$ $(k = 1, 2, 3)$. Являются ли события $A_k$ независимыми в совокупности или попарно независимыми?

**32.7.** Рассмотрим вероятностное пространство, определенное в задаче 32.6. Пусть $A_k = \{$на $k$-м месте стоит буква $a\}$, $B_k = \{$на $k$-м месте стоит буква $b\}$, $C_k = \{$на $k$-м месте стоит буква $c\}$ $(k = 1, 2, 3)$. Покажите, что каждые два события с разными индексами независимы.

**32.8.** Пусть $0 < P(A) < 1$. Докажите, что события $A$ и $B$ независимы тогда и только тогда, когда $P(B|\bar{A}) = P(B|A)$.

**32.9.** События $A$ и $B_i$ $(i = 1\,, 2)$ независимы, причем наступление события $B_2$ влечет наступление события $B_1$. Докажите, что события $A$ и $B_1 \setminus B_2$ независимы.

**32.10.** События $A$ и $B_i$ $(i = 1\,, 2)$ независимы, причем события $B_1$ и $B_2$ несовместны. Докажите, что события $A$ и $B_1 \cup B_2$ независимы.

**32.11.** События $A$ и $B$ зависимы. Докажите, что события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ тоже зависимы.

**32.12.** Пусть $A, B$ и $C$ – независимые в совокупности события, причем каждое из них имеет вероятность, отличную от нуля и единицы. Могут ли события $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ быть попарно независимыми?

**32.13.** События $A$ и $B$ зависимы. Докажите, что события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ тоже зависимы.

**32.14.** События $A\,, B\,, C$ независимы в совокупности. Докажите, что события $A$ и $B \cup C$ независимы.

**32.15.** События $A$ и $B_i$ $(i = 1\,, 2)$ независимы, причем наступление события $B_2$ влечет наступление события $B_1$. Докажите, что события $A$ и $B_1 \setminus B_2$ независимы.

**32.16.** Является ли транзитивным отношение независимости на множестве событий вероятностного пространства, то есть верно ли, что если события $A$ и $B$ независимы, события $B$ и $C$ независимы, то и события $A$ и $C$ независимы?

**32.17.** Докажите, что для того, чтобы отношение независимости на некотором вероятностном пространстве было транзитивным, необходимо и достаточно, чтобы каждое событие этого пространства имело вероятность 0 или 1.

**32.18.** Является ли транзитивным отношение зависимости на множестве событий вероятностного пространства, то есть верно ли, что если события $A$ и $B$ зависимы, события $B$ и $C$ зависимы, то и события $A$ и $C$ зависимы?

**32.19.** События $A\,, B\,, C$ независимы в совокупности. Докажите, что события $A$ и $B \cup C$ независимы.

**32.20.** Пусть события $A, B, C$ удовлетворяют условиям: $A$ и $B$ независимы, $A$ и $C$ независимы, $A$ и $B \cup C$ независимы. Покажите, что тогда и события $A$ и $B \cap C$ независимы.

**32.21.** События $A\,, B\,, C$ независимы в совокупности. Докажите, что события $A$ и $B \setminus C$ независимы.

**32.22.** Бросают 3 игральные кости. Рассматриваются 3 события, состоящие в том, что выпало одинаковое число очков на 1-й и 2-й, 2-й и 3-й, 3-й и 1-й костях соответственно. Являются ли эти события независимыми в совокупности или попарно?

**32.23.** Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности. Докажите, что $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$.

**32.24.** При изготовлении детали заготовка должна пройти через 3 операции. Появление брака при отдельных операциях – независимые события. Вероятность брака при первой операции равна 0,2, при второй – 0,1, при третьей – 0,3. Найти вероятность изготовления стандартной детали.

**32.25.** Даны 4 игральные кости $\alpha_i$ с указанным ниже распределением чисел на гранях: $\alpha_1(0,0,4,4,4,4)$, $\alpha_2(3,3,3,3,3,3)$, $\alpha_3(2,2,2,2,6,6)$, $\alpha_4(1,1,1,5,5,5)$. Найти вероятность того, что при однократном бросании пары костей $\alpha_i$ и $\alpha_{i+1}$, $i = 1,2,3,4$ ($\alpha_5 = \alpha_1$) на кости $\alpha_i$ выпадет больше очков, чем на кости $\alpha_{i+1}$. Найдите среднее число очков, выпавших при однократном бросании кости $\alpha_i$.

**32.26.** Даны 3 игральные кости $\alpha_i$ с указанным ниже распределением чисел на гранях: $\alpha_1(5,7,8,9,10,18)$, $\alpha_2(2,3,4,15,16,17)$, $\alpha_3(1,6,11,12,13,14)$. Найти вероятность того, что при однократном бросании пары костей $\alpha_i$ и $\alpha_{i+1}$, $i = 1,2,3$ ($\alpha_4 = \alpha_1$) на кости $\alpha_i$ выпадет больше очков, чем на кости $\alpha_{i+1}$. Найдите среднее число очков, выпавших при однократном бросании кости $\alpha_i$.

**32.27.** В семье 3 сына (старший, средний, младший), играющих в теннис. Родители предлагают младшему приз, если он выиграет две игры подряд из трех, играемых по очереди со старшим и средним сыновьями по одной из следующих двух схем: (старший, средний, старший), (средний, старший, средний). Вероятность победы младшего в игре со средним больше, чем в игре со старшим. Какую схему следует выбрать младшему? Найдите среднее число выигранных младшим сыном игр в каждой из схем.

**32.28.** В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью $p$, а третий для вынесения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью $p$. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

## 33 Числовые характеристики случайных величин

**33.1.**$^\circ$ 3 неразличимых шара наугад раскладываются по трем ящикам. Найти среднее число шаров, попавших в ящик с номером „один“.

**33.2.**$^\circ$ 3 неразличимых шара наугад раскладываются по трем ящикам. Найти среднее число ящиков, содержащих один шар.

**33.3.** Брошены 3 игральные кости. Найти среднее число костей, на которых выпали „шестерки“.

**33.4.**$^\circ$ Два различных шара ($a$ и $b$) наугад раскладываются по трем ящикам. Найти средний номер ящика, в который попал шар $a$.

**33.5.** Докажите, что для любых случайных величин $X$ и $Y$, имеющих конечные дисперсии, справедливы неравенства
$(\sqrt{DX}-\sqrt{DY})^2 \leqslant D(X+Y) \leqslant (\sqrt{DX}+\sqrt{DY})^2$.

**33.6.** Пусть $Y_1$ и $Y_2$ – независимые случайные величины с конечными дисперсиями. Докажите неравенство $D(Y_1Y_2) \geq DY_1 \cdot DY_2$.

**33.7.** Приведите пример вероятностного пространства и случайных величин $\xi\,,\eta$ на нем таких, что $M\xi$, $M\eta$ существуют, а $M\xi\eta$ не существует.

**33.8.** Правильно ли следующее рассуждение: „От дома до работы 1 километр, хожу я в среднем со скоростью 5 км/час, следовательно, в среднем на дорогу у меня уходит 12 минут“?

**33.9.** Пусть $X_1$ и $X_2$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со средним $\alpha$ и дисперсией $\sigma^2$. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $X_1+X_2$ и $X_1-X_2$.

**33.10.** Пусть $A$ – событие в некотором вероятностном пространстве, $I_A$ — его индикатор. Вычислите: 1) среднее и дисперсию случайной величины $I_A$, 2) ковариацию случайных величин $I_A$, $I_B$, где $A$ и $B$ – два события в одном и том же пространстве. Докажите, что если вероятности событий $A$ и $B$ отличны от 0 и 1, то их независимость равносильна некоррелированности случайных величин $I_A$ и $I_B$.

**33.11.** Дисперсии случайных величин $\xi$, $\eta$ и $\xi+\eta$ равны 2, 2, 5 соответственно. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$.

**33.12.** Найдите коэффициент корреляции числа выпадений „единицы“ и „шестерки“ при $n$ бросаниях игральной кости.

**33.13.** Случайные величины $X$ и $Y_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ некоррелированы. Докажите, что тогда при любых вещественных $a_k$ величины $X$ и $a_1Y_1+$

$\ldots + a_n Y_n$ тоже некоррелированы.

**33.14.** Пусть $X_1$ и $X_2$ – независимые случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Найдите функцию распределения случайных величин $\max(X_1, X_2)$, $\min(X_1, X_2)$, $\max(X_1, X_2/2)$.

**33.15.** Пусть случайные величины $\xi$ и $\eta$ таковы, что $D\xi = 1$, $D\eta = 2$, $D(\xi - \eta) = 4$. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$.

**33.16.** Пусть случайная величина $\xi$ обладает конечным моментом порядка $k$. Докажите, что при любом положительном $a$ выполняется неравенство $P(|\xi| \geq a) \leq M|\xi|^k/a^k$.

**33.17.** Пусть $f : R \to R$ — неотрицательная, четная, неубывающая на положительной полуоси функция, случайная величина $\xi$ такова, что $Mf(\xi)$ существует. Докажите, что при любом $a > 0$ выполняется неравенство $P(|\xi| \geq a) \leq Mf(\xi)/f(a)$.

**33.18.** Пусть $X$ — случайная величина, с целыми неотрицательными значениями. Докажите, что $MX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$.

**33.19.** Состав шаров трех ящиков №1, №2, №3 таков: 1 белый (б) и 2 черных (ч), 2 б и 1 ч, 2 б и 2 ч соответственно. В ящиках №1 и №2 наугад взяли по одному шару и положили их в ящик №3. Затем из ящика N3 наугад извлекли 2 шара. Найдите среднее число белых шаров среди них.

**33.20.** Бросают 3 правильные монеты, а потом размещают случайным образом $n$ неразличимых шаров по такому числу ящиков, которое равно числу выпавших гербов. Найдите среднее числа оказавшихся пустыми ящиков. Каков предел этого среднего при $n \to \infty$?

**33.21.** 4 белых и 1 черный шар случайным образом размещают в ряд. Найдите среднее числа белых шаров, предшествующих черному шару. Одинаковые ли ответы получатся, если рассматривать белые шары как различимые или как неразличимые?

**33.22.** Найдите коэффициент корреляции между числом появлений герба и числом появлений цены при $n$ бросаниях правильной монеты.

**33.23.** $a$ белых и $b$ черных шаров наугад расставлены в ряд. Сколько в среднем пар соседних шаров разного цвета окажется в ряду (в последовательности б,ч,б имеется 2 пары)? Рассмотрите случаи различимых и неразличимых шаров.

## 34 Распределения случайных величин

**34.1.**$^\circ$ В 3 различных ящика наудачу бросают 3 шара. Найдите наиболее вероятное распределение шаров по ящикам. Рассмотрите случаи различимых и неразличимых шаров.

**34.2.**$^\circ$ Случайная величина $\xi$ имеет таблицу распределения

| $\xi$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ |

,

$\eta = \xi^2$. Найдите: 1) таблицу распределения случайной величины $\eta$, 2) $M\eta$, $D\eta$, 3) $P(|\eta| > 1/2)$, 4) таблицу совместного распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$, 5) $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

**34.3.** 2 различимых шара $a$ и $b$ наугад размещаются по трем различимым ящикам. Пусть $\xi$ — число шаров в 1-м ящике, $\eta$ — число пустых ящиков, $\zeta$ — номер ящика, в который попал шар $a$. Найдите: 1) таблицы распределения случайных величин $\xi$, $\eta$ и $\zeta$, 2) таблицу совместного распределения для каждой пары случайных величин $\xi$, $\eta$ и $\zeta$, 3) средние и дисперсии случайных величин $\xi$, $\eta$ и $\zeta$, ковариацию и коэффициент корреляции для каждой пары случайных величин $\xi$, $\eta$ и $\zeta$. Есть ли среди этих случайных величин независимые?

**34.4.** 3 неразличимых шара наугад размещаются по трем различимым ящикам. Пусть $\xi$ — число шаров в 1-м ящике, $\eta$ — число пустых ящиков. Найдите: 1) таблицы распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$, 2) таблицу совместного распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$, 3) средние и дисперсии случайных величин $\xi$ и $\eta$, их ковариацию и коэффициент корреляции. Независимы ли случайные величины $\xi$ и $\eta$?

**34.5.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы и одинаково распределены по геометрическому закону. Докажите, что случайная величина $\min(\xi, \eta)$ также распределена по геометрическому закону.

**34.6.** Случайные величины $X, Y$ и $Z$ независимы и одинаково распределены по геометрическому закону. Найдите: 1) $P(X = Y)$, 2) $P(X \geqslant 2Y)$, 3) $P(X + Y \leqslant Z)$.

**34.7.** Случайные величины $Y_1, Y_2$ независимы и одинаково равномерно распределены на множестве целых чисел $0, 1, 2$. Найдите таблицу рас-

пределения случайной величины $Y_1 - Y_2$. Вычислите ее производящую функцию. Чему равны среднее и дисперсия случайной величины $Y_1 - Y_2$?
**34.8.** Пусть случайная величина $Y$ имеет таблицу распределения

| $Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/9 | 1/9 | 1/3 | 2/9 | 1/9 | 1/9 |

Найдите таблицу распределения случайной величины $Z = Y^2 + 1$, ее среднее и дисперсию.
**34.9.** Дана таблица совместного распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$:

| $\xi, \eta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,1 | 0,2 |
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Найдите таблицы распределений этих величин по отдельности, их средние, дисперсии и коэффициент корреляции. Являются ли независимыми случайные величины $\xi$ и $\eta$?
**34.10.** Случайная величина $\xi$ равномерно распределена на множестве целых чисел интервала $(1, 7)$. Пусть $\eta = |\xi - 3|$. Найдите таблицу распределения случайной величины $\eta$, ее среднее и дисперсию.
**34.11.** Пусть случайная величина $\xi$ имеет функцию распределения $G(x)$. Выразите через функцию $G$ функцию распределения случайной величины $\eta = \sigma\xi + a$, где $\sigma < 0$, а $a$ – вещественно.
**34.12.** Пусть $X_1$ и $X_2$ – независимые случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Выразите через $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функцию распределения случайной величины $\max(X_1, X_2/2)$.
**34.13.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на множестве целых чисел отрезка $[-1, 1]$. Найдите распределение случайной величины $\min(\xi, \eta)$.
**34.14.** Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимы и каждая принимает значения 1 и $-1$ с вероятностями $p$ и $q = 1 - p$ соответственно. Найдите распределение случайной величины $Y_n = X_1 X_2 \ldots X_n$.
**34.15.** Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимы и каждая принимает значения 1, $-1$ и 0 с вероятностями $p$, $q$ и $r = 1 - p - q$ соответственно. Найдите распределение величины $Y_n = X_1 X_2 \ldots X_n$.

**34.16.** Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен на множестве точек с целочисленными координатами, лежащими в четырехугольнике с вершинами в точках $(0,0)$, $(-4,4)$, $(0,4)$, $(4,0)$. Найдите таблицу распределения случайной величины $\eta = 2\xi_2 - 1$.

**34.17.** Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен на множестве точек с целочисленными координатами, лежащими в треугольнике вершинами в точках $(0,0)$, $(-5,5)$, $(5,5)$. Найдите таблицу распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + 1$. Являются ли случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ независимыми?

**34.18.** Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен на множестве точек с целочисленными координатами, лежащими в треугольнике с вершинами в точках $(0,0)$, $(-5,5)$, $(5,5)$. Найдите таблицу распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + 1$. Являются ли случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ независимыми?

**34.19.** Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределен на множестве точек с целочисленными координатами, лежащими в квадрате $|x_1|+|x_2| < 5$. Найдите вероятность того, что случайная величина $\xi_1 + \xi_2$ примет положительное значение.

**34.20.** Случайные величины $X_1$ и $X_2$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение. Докажите, что для всех $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ выполняется равенство

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = 1/(n+1)\,.$$

(Слагаемые при известной сумме равномерно распределены.) Верно ли обратное утверждение?

**34.21.** (Свойство отсутствия последействия) Пусть $\xi$ — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения ($0 < P(\xi = 0) < 1$). Докажите, что условие отсутствия последействия, состоящее в том, что при всех $k$ и $r \geqslant 0$ выполняется равенство $P(\xi = k + r | \xi \geqslant k) = P(\xi = r)$, эквивалентно тому, что распределение случайной величины $\xi$ является геометрическим.

**34.22.** Некто написал 4 письма разным лицам и вложил письма в конверты наугад (по одному письму в один конверт). Найдите:

1) распределение числа писем, пришедших по назначению,

2) среднее числа писем, пришедших по назначению,
3) вероятность того, что человек получит письмо, написанное ему.

**34.23.** Случайная величина $\xi$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$. Найдите $k = k(\lambda)$, для которого вероятность $P(\xi = k)$ максимальна, и асимптотику этого значения при $\lambda \to \infty$.

**34.24.** $n$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$ лежат в ящике. Последовательно извлекают по одной карточке, записывают появившийся номер, карточку возвращают в ящик и содержимое ящика тщательно перемешивают. Сколько в среднем надо совершить извлечений, чтобы получить полный комплект номеров от 1 до $n$?

**34.25.** В урне находятся $n$ шаров, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Пусть $\xi$ — наибольший номер, полученный при $k$ извлечениях, если производится случайный выбор с возвращением. Найдите распределение случайной величины $\xi$ и ее среднее. Рассмотрите также задачу в случае выбора без возвращения.

**34.26.** Бросают 2 игральные кости. Пусть $X$ — число очков, выпавшее на первой кости, $Y$ — большее из двух выпавших очков. Найдите таблицу совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$, а также их средние, дисперсии и коэффициент корреляции.

**34.27.** Пусть $k$ — натуральное число. Игральную кость бросают до $k$-го появления шестерки. Найдите среднее числа произведенных бросков.

## 35 Независимость случайных величин

**35.1.** 2 белых и 3 черных шара наугад раскладываются по двум ящикам. Пусть $\xi$ — число белых шаров в первом ящике, $\eta$ — номер ящика, в котором лежит большинство черных шаров. Независимы ли случайные величины $\xi$ и $\eta$?

**35.2.** Дважды брошена монета. Пусть $\xi$ — число гербов, выпавших при первом броске, $\eta$ — число гербов, выпавших при двух бросках. Независимы ли случайные величины $\xi$ и $\eta$?

**35.3.** Пусть $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения. Докажите, что
$M\min(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)P(Y \geqslant k)$.

**35.4.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $P(\xi > 0) = p$, $q = 1 - p$. Докажите, что $p^2 \leq P(\xi + \eta > 0) \leq 1 - q^2$.

**35.5.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – случайные величины, причем $P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = 3/4$, $P(\xi + \eta > 0) = 1/2$. Докажите, что случайные величины $\xi$ и $\eta$ зависимы.

**35.6.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы, дисперсия величины $\xi$ равна 2. Найдите ковариацию случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi$.

**35.7.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы, их дисперсии равны 2 и 3 соответственно. Найдите ковариацию случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.

**35.8.** Пусть случайные величины $X$ и $Y$ независимы. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a$ и $b$ выполняется неравенство
$P(|X| < a)P(|Y| < b) \leq P(|X + Y| < a + b)$.

**35.9.** Существуют ли случайные величины $\xi$ и $\eta$ такие, что дисперсии случайных величин $\xi$, $\eta$ и $3\xi - 2\eta$ равны 4, 4, 100 соответственно?

**35.10.** Пусть случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами 1 и 2 соответственно. Докажите, что случайная величина $X + Y$ также имеет пуассоновское распределение. Чему равен параметр этого распределения?

**35.11.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – случайные величины, причем $P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = 3/4$, $P(\xi + \eta > 0) = 1/2$. Докажите, что случайные величины $\xi$ и $\eta$ зависимы.

**35.12.** Пусть $X_1$ и $X_2$ – независимые случайные величины с дисперсиями $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ соответственно. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$.

**35.13.** Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{m+n}$ $(m < n)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию $\sigma^2$. Найдите коэффициент корреляции между суммами $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ и $X_m + X_{m+1} + \ldots + X_{m+n}$ .

**35.14.** Пусть независимые случайные величины $\xi$ и $\eta$ таковы, что $P(\xi = \pm 1) = 1/2$, а $\eta$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda$. Найдите $M(\xi\eta)$ и $D(\xi\eta)$ .

**35.15.** Элементы матрицы $X = \|X_{ij}\|_{i,j=1}^n$ порядка $n$ являются независимыми в совокупности случайными величинами с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями $\sigma^2$. Найдите среднее и дисперсию определителя матрицы $X$.

**35.16.** Пусть $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ — случайные величины, независимые в совокупности, $MX_k = a$, $DX_k = \sigma^2$, $P(Y_k = 1) = p$, $P(Y_k = 0) = 1 - p$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $S_n^* = X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n$. Найдите $MS_n$, $MS_n^*$, $DS_n$, $DS_n^*$.

**35.17.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = 1/2$. Являются ли независимыми случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$? Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.

**35.18.** Пусть $\xi$ и $\eta$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие конечные моменты порядка 2. Покажите, что случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ некоррелированы.

**35.19.** Три раза бросают правильную монету. Пусть $X$ — число гербов в первых двух бросаниях, $Y$ — число гербов в третьем бросании, $Z$ — число гербов в последних двух бросаниях. Докажите, что $X$ и $Y$ — независимые, а $X$ и $Z$ — зависимые случайные величины.

**35.20.** Из колоды игральных карт наугад извлекают две карты. Пусть $X$ — число тузов, $Y$ — число карт красного цвета среди извлеченных карт. Зависимы или независимы случайные величины $X$ и $Y$?

**35.21.** Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ независимы и каждая из них принимает значения 1 и 0 с вероятностями $p$ и $1 - p$ соответственно. Пусть $Y_i = X_i + X_{i+1} (\bmod 2)$, $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Найдите среднее и дисперсию случайной величины $Z$. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $X_1$ и $Y_1$.

**35.22.** Пусть случайные величины $\xi$ и $\eta$ принимают только по 2 значения каждая. Докажите, что из равенства нулю коэффициента корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$ следует их независимость.

**35.23.** 3 человека $\alpha, \beta$ и $\gamma$ приходят на почту и застают свободными 2 окна. Обслуживание $\alpha$ и $\beta$ начинается сразу, а обслуживание $\gamma$ начинается тогда, когда закончится обслуживание $\alpha$ или $\beta$. Длительность обслуживания измеряется в секундах. Длительность обслуживания $\alpha, \beta, \gamma$ — это независимые случайные величины с одинаковым геометрическим распределением со средним $m$. Найдите среднее времени, проведенного человеком $\gamma$ на почте.

## 36 Производящие функции случайных величин

**36.1.** Пусть $\xi$ — неотрицательная целозначная случайная величина с производящей функцией $f(z)$. Найдите производящие функции случайных величин $\xi + a$ и $b\xi$, где $a$ и $b$ — целые неотрицательные числа.
**36.2.** Найдите распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:
1) $0{,}25(1+z)^2$, 2) $p(1-qz)^{-1}$, $p, q > 0, p+q = 1$, 3) $\exp(\lambda(z-1))$, $\lambda > 0$, 4) $(p+qz)^n$, 5) $(1 + (1-z)/z\ln(1-z))$.
**36.3.** Докажите, что следующие функции не являются производящими функциями вероятностных распределений: 1) $|z|$, 2) $\sin z$, 3) $\exp(-z^2)$.
**36.4.** Пусть случайная величина $X$ принимает с равными вероятностями значения 0 и 1, а случайная величина $Z$ принимает с равными вероятностями значения $0, 1$ и 2. Докажите, что не существует такой случайной величины $Y$, что $X$ и $Y$ независимы, и $X + Y = Z$.
**36.5.** Пусть $\xi_1, \xi_2$ — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения, и $\xi_1 + \xi_2$ имеет биномиальное распределение. Покажите, что тогда каждая из случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$ имеет биномиальное распределение, возможно, вырожденное.

## 37 Схема Бернулли

**37.1.**° Вероятность того, что деталь, изготовленная на автоматическом станке, стандартная, равна 0,9. Наугад взяли 4 детали. Найдите вероятность того, что среди них есть хотя бы одна стандартная.
**37.2.**° Устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при одном цикле работы равна 0,1. Пусть $X$ — число отказавших элементов. Найдите $P(X < 3)$.
**37.3.** 10 человек одновременно идут обедать в две столовые с одинаковым числом мест. Каждый из них выбирает любую из этих столовых с вероятностью 1/2 независимо от выбора остальных. Какое число мест должно быть в каждой столовой, чтобы с вероятностью, большей 0,8, ни один посетитель не стоял в очереди?

**37.4.** Проводятся 4 независимых испытания Бернулли с вероятностью „успеха“ в одном испытании $p$. Пусть $\xi$ – число „успехов“ в первых трех, а $\eta$ – число „успехов“ в последних трех испытаниях. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$?

**37.5.** Двое бросают симметричную монету $n$ раз каждый. Найдите вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов. Как ведет себя эта вероятность при $n \to \infty$?

**37.6.** Пусть испытание Бернулли состоит в бросании 5 монет. Произведено 10 испытаний. Чему равна вероятность того, что в двух из испытаний выпадет максимальное число гербов, в одном — 4 герба, а в остальных — не более двух гербов в каждом?

**37.7.** Пусть испытание Бернулли состоит в извлечении четырех карт из колоды игральных карт. Какое наименьшее число испытаний надо произвести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы в одном испытании появились все тузы?

**37.8.** Пусть $\xi$ – число комбинаций „неудача, успех“ в последовательности $m$ независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$. Вычислите среднее случайной величины $\xi$ .

**37.9.** Проводятся 4 независимых испытания Бернулли. Пусть $\xi$ – число „успехов“ в первых трех, а $\eta$ – число „успехов“ в последних двух испытаниях. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$?

**37.10.** Проводятся 3 независимых испытания Бернулли с вероятностью „успеха“ в одном испытании $p$. Пусть $\xi$ – число „успехов“ в первых двух, а $\eta$ – число „успехов“ в последних двух испытаниях. Чему равна дисперсия суммы случайных величин $\xi$ и $\eta$?

**37.11.** Производится последовательность независимых испытаний с тремя исходами $a$, $b$, $c$, вероятности которых равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно ($\alpha + \beta + \gamma = 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ принимает значение 1, если исходы испытаний с номерами $n$, $n+1$ и $n+2$ разные, значение 3, если результаты этих испытаний одинаковы, и значение 2 в остальных случаях. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_4$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_4$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.12.** Производится последовательность независимых испытаний с тремя исходами $a$, $b$, $c$, вероятности которых равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно ($\alpha + \beta + \gamma = 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ принимает значение 1, если исходы испытаний с номерами $n$ и $n+2$ разные, и значение 3, если результаты этих испытаний одинаковы. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_5$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_5$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.13.** Производится последовательность независимых испытаний с тремя исходами $a$, $b$, $c$, вероятности которых равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно ($\alpha + \beta + \gamma = 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ принимает значение $-1$, если исходы испытаний с номерами $n$ и $n+2$ разные, и значение 1, если результаты этих испытаний одинаковы. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_4$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_4$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.14.** Производится последовательность независимых испытаний с тремя исходами $a$, $b$, $c$, вероятности которых равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно ($\alpha+\beta+\gamma = 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ равна числу исходов $a$ в испытаниях с номерами $n$, $n+1$ и $n+2$. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_5$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_5$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.15.** Производится последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ равна числу успехов в испытаниях с номерами $n-1$ и $n+1$. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_5$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_5$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.16.** Производится последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). При натуральном $n$ пусть случайная величина $X_n$ принимает значение $-1$, если исходы испытаний с номерами $n$ и $n+2$ разные, и значение 1, если результаты этих испытаний одинаковы. Найти среднее и дисперсию сл.в. $X_3$, ковариацию сл.в. $X_3$ и $X_5$, таблицу совместного распределения сл.в. $X_3$ и $X_5$. Являются ли эти сл.в. независимыми?

**37.17.** Проводятся 3 независимых испытания Бернулли с вероятностью „успеха“ в одном испытании $p$. Пусть $\xi$ – число „успехов“ в первых двух, а $\eta$ – число „успехов“ в последних двух испытаниях. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$?

**37.18.** Пусть $b(k, n, p)$ — вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$ произойдет точно $k$ успехов. Докажите тождество

$$\sum_{i=0}^{k} b(i, n_1, p) b(k-i, n_2, p) = b(k, n_1+n_2, p)\,.$$

**37.19.** Найдите вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$ произойдет четное число успехов.

**37.20.** Сообщения, передаваемые по каналу связи, составляются из двух знаков 0 и 1. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,7 и принимается ошибочно за другой знак с вероятностью 0,3. Для увеличения вероятности правильного приема сообщения каждый знак передается 5 раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Найдите вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

**37.21.** Сообщения, передаваемые по каналу связи, составляются из трех знаков $a, b$ и $c$. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух других знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильного приема сообщения каждый знак передается 5 раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знаков два, то из них выбирается один с равными вероятностями. Найдите вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

**37.22.** Рассматривается схема случайного блуждания по целым точкам вещественной прямой. Точка стартует из нуля, вероятности скачков влево и вправо на единицу равны по $1/2$. Что более вероятно: за 4 шага возвратиться в точку 0 или покинуть ее?

**37.23.** $n$ раз бросают 2 симметричные монеты. Чему равны вероятности событий: 1) ни разу на обеих монетах одновременно не выпадет герб, 2) ни разу монеты не выпадут одинаковыми сторонами?

**37.24.** Найдите вероятность того, что дни рождения 6 наугад взятых людей приходятся точно на 2 месяца.

**37.25.** Производится последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью „успеха" в одном испытании $p$. Найдите вероятность того, что $a$ „успехов" произойдут раньше, чем $b$ „неудач".

**37.26.** Проводятся $n$ независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$. Найдите вероятность того, что $k$-й по порядку успех произойдет при $l$-м испытании.

**37.27.** Что более вероятно: при 8-кратном бросании симметричной монеты получить 4 герба или при 5-кратном бросании монеты получить 3 герба?

**37.28.** Рассматривается схема случайного блуждания по целым точкам прямой. Точка стартует из нуля, вероятность скачка вправо на единицу равна $p$, вероятность скачка влево на единицу равна $1 - p$. При каких $p$ вероятность передвинуться за 4 шага в точку 4 больше вероятности возвратиться в точку 0?

**37.29.** Проводится последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p$ в одном испытании. Найдите вероятность того, что $a$ успехов произойдут раньше, чем $b$ неудач.

**37.30.*** Двое бросают правильную монету до тех пор, пока не выпадет 100 „гербов" (в этом случае ставку забирает игрок $\alpha$) или 100 „решек" (в этом случае ставку забирает игрок $\beta$). Игра прервана в момент, когда выпало 98 „гербов" и 97 „решек". Как справедливо разделить ставку?

**37.31.** Игроки $\alpha$ и $\beta$ бросают каждый по одной монете $n$ раз. Чему равна вероятность того, что в течение всей игры у них:

1) ни разу не выпадет одновременно герб,

2) ни разу монеты не выпадут одинаковыми сторонами?

**37.32.** В цехе работают независимо один от другого 10 одинаковых станков. В среднем каждый станок работает 12 минут в час. Мощность, потребляемая одним станком, равна $T$ киловатт. Сколько энергии разумно подвести к цеху?

**37.33.*** Пункт $a$ нужно связать с 10 абонентами пункта $b$. Каждый абонент занимает линию в среднем 10 минут в час. Какое минимальное количество линий связи необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью, не меньшей 0,99, обслужить всех абонентов?

**37.34.** Вероятность хотя бы одного появления события в четырех опытах равна 0,59. Какова вероятность события $V$ в одном опыте, если при каждом опыте она одна и та же?

**37.35.** За один цикл автомат изготавливает 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не меньше 0,8, если в среднем одна из 100 произведенных деталей бракованная?

**37.36.** Некто задался целью найти человека, день рождения которого совпадает с его собственным. Сколько в среднем незнакомцев ему придется опросить? Сколько незнакомцев ему придется опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была не меньше 0,9?

**37.37.** Игрок $\alpha$ подбрасывает 2 игральные кости, а игрок $\beta$ — 3. Эти испытания они проводят до первого появления „шестерки“. Найдите вероятности событий:
1) впервые „шестерка“ появилась у игрока $\alpha$,
2) впервые „шестерка“ появилась у игрока $\beta$,
3) впервые „шестерка“ появилась одновременно у игроков $\alpha$ и $\beta$.
Рассмотрите случаи: игроки бросают кости i) одновременно, ii) последовательно, причем начинает $\alpha$, iii) последовательно, причем начинает $\beta$.

**37.38.** Из множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ случайно и независимо взяты 2 подмножества $A_1$ и $A_2$ так, что каждый элемент из $N$ независимо от других элементов с вероятностью $p$ включается в подмножество $A_i$ и с вероятностью $1 - p$ не включается. Найдите вероятность того, что подмножества $A_1$ и $A_2$ не пересекаются.

**37.39.** Из множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ случайно и независимо взяты $k$ подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ так, что каждый элемент из $N$ независимо от других элементов с вероятностью $p$ включается в подмножество $A_i$ и с вероятностью $1 - p$ не включается. Найдите вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются. Вычислите также вероятности $P(|\bigcap_{i=1}^{k} A_i| = r)$ и $P(|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = r)$.

**37.40.*** Пусть $\xi_1$ — длина серии (успехов или неудач) в последовательности независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$, $(0 < p < 1)$, начавшейся при первом испытании, $\xi_2$ —

длина второй серии. Найдите распределение случайной величины $\xi_1$, ее среднее и дисперсию, распределение случайной величины $\xi_2$, ее среднее и дисперсию, совместное распределение случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$. Выясните, независимы ли случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$.

## 38 Предельные теоремы

**38.1.** Найдите вероятность того, что при 10000 бросаний монеты число выпавших гербов будет: а) менее 4000, б) 4900.

**38.2.** Игральную кость бросают 10000 раз. Найдите пределы, симметричные относительно среднего суммы выпавших очков, в которых с вероятностью 0,95 будет лежать эта сумма.

**38.3.** Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет слабому закону больших чисел, $d$ – вещественное число. Докажите, что последовательность $\{\xi_n + d\}_{n=1}^{\infty}$ также удовлетворяет слабому закону больших чисел.

**38.4.** Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет слабому закону больших чисел, $\{d_n\}$ – числовая последовательность, имеющая конечный предел. Докажите, что последовательности $\{\xi_n + d_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{d_n\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ также удовлетворяют слабому закону больших чисел.

**38.5.** Последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ и $\{\eta_n\}_1^{\infty}$ удовлетворяют слабому закону больших чисел. Докажите, что последовательность $\{\xi_n + \eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ также удовлетворяет слабому закону больших чисел.

**38.6.*** Производится бесконечная последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p$. Пусть $X_i = 1$, если $i$-е и $i+1$-е испытания закончились успехом, и $X_i = 0$ в противном случае. Удовлетворяет ли последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабому закону больших чисел?

**38.7.** Процент всхожести семян гороха равен 95 процентов. Наугад взяли 100 семян. Оценить вероятность того, что взойдут не менее 95 семян.

**38.8.** Книга в 400 страниц содержит 400 опечаток. Оцените вероятность того, что на 245-й странице не менее трех (двух, одной) опечаток.

**38.9.** Известно, что левши составляют 1% населения. Оцените вероятность того, что среди 200 людей окажется по меньшей мере четверо левшей.

**38.10.** Правильная монета брошена 100 раз. Оцените вероятности событий: $A = \{$ выпало точно 50 гербов$\}$, $B = \{$выпало по крайней мере 60 гербов$\}$.

**38.11.** В жюри, состоящем из нечетного числа членов $n$, каждый человек независимо от других принимает правильное решение с вероятностью 0,7. Каково минимальное число членов жюри, при котором решение, принимаемое большинством голосов, будет справедливым с вероятностью, не меньшей 0,99?

**38.12.*** Театр со зрительным залом, вмещающим 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется гардероб. Какое наименьшее число мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотрите 2 случая: 1) все зрители приходят поодиночке, 2) все зрители приходят парами. Предполагается, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

## 39 Цепи Маркова

**39.1.** Пусть $E_1, E_2, E_3$ — возможные состояния системы и

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

— матрица вероятностей перехода из состояния в состояние за один шаг. Постройте граф, соответствующий матрице $\mathsf{P}$, классифицируйте состояния цепи, найдите матрицу вероятностей перехода за 3 шага.

**39.2.** Пусть $E_1, E_2, E_3$ — возможные состояния системы и

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица вероятностей перехода из состояния в состояние за один шаг. Постройте граф, соответствующий матрице $\mathsf{P}$, классифицируйте состояния цепи, найдите матрицу вероятностей перехода за 3 шага.

**39.3.** Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_6$ — вершины правильного шестиугольника. Частица движется следующим образом. Из данной вершины шестиугольника она перемещается в одну из ближайших соседних вершин с вероятностью 1/4 или в диаметрально противоположную точку с вероятностью 1/2. Найдите матрицу вероятностей перехода за один шаг для этого процесса и постройте граф, соответствующий этой матрице.

**39.4.** Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова даны матрицей

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Какие из состояний существенные, а какие несущественные, постройте граф, соответствующий матрице $\mathsf{P}$, найдите вероятности $p_{ij}(n)$ для 1) $i = 1$, $j = 2$, $n = 2, 3$, 2) $i = 2$, $j = 1$, $n = 2, 3$, 3) $i = 2$, $j = 2$, $n = 2, 3$.

**39.5.** В бою участвуют два корабля $\alpha$ и $\beta$, которые одновременно производят выстрелы друг в друга через равные промежутки времени. При каждом обмене выстрелами корабль $\alpha$ поражает корабль $\beta$ с вероятностью 1/2, а корабль $\beta$ поражает корабль $\alpha$ с вероятностью 3/8. При попадании ракеты противника корабль выходит из строя. Состояниями марковской цепи являются: $E_1$ — оба корабля находятся в строю, $E_2$ — корабль $\alpha$ поражен, а корабль $\beta$ находится в строю, $E_3$ — корабль $\beta$ поражен, а корабль $\alpha$ находится в строю, $E_4$ — оба корабля поражены. Найдите матрицы вероятностей перехода за 1, 2, 3 шага.

**39.6.** В двух ящиках находятся три различимых шара. Каждую секунду наугад берут один из шаров и перекладывают его в другой ящик. В качестве состояния марковской цепи рассматривается число шаров в ящике №1. Найдите матрицы вероятностей перехода за 1, 2, 3 шага.

**39.7.** Рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями $E_1$ и $E_2$ и матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Процесс начинается из состояния $E_1$ с вероятностью 1/4. Какова вероятность того, что после трех шагов система будет находиться в состоянии $E_1$?

**39.8.** Матрица вероятностей перехода цепи Маркова равна

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям $E_1, E_2, E_3$ в начальный момент времени определяется вектором $(0{,}3, 0{,}2, 0{,}5)$. Найдите: 1) распределение по состояниям после двух шагов, 2) вероятность того, что в моменты времени 0, 1, 2, 3 система будет находиться в состояниях $E_1$, $E_1$, $E_2$ и $E_1$ соответственно, 3) вероятность того, что в момент времени 3 система будет находиться в состоянии $E_3$, 4) стационарное распределение.

**39.9.** Пусть $p$ — число из интервала $(0, 1)$. Найдите стационарное распределение для марковской цепи, определяемой матрицей вероятностей перехода вида

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

**39.10.** Пусть $p$ и $q$ — числа из интервала $(0, 1)$. Найдите стационарное распределение для марковской цепи, определяемой матрицей вероятностей перехода вида

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

**39.11.** Производится следующая последовательность испытаний. В первом опыте бросают правильную монету. Для каждого натурального $n$, если в $(n-1)$-м опыте выпал герб, то в $n$-м опыте бросают правильную монету. В противном случае в $n$-м опыте бросают такую монету, для которой вероятность выпадения герба равна $1/4$. Опишите возникающую здесь марковскую цепь. (Каковы множество состояний и матрица вероятностей перехода?) Чему равна вероятность того, что в 3-м и 4-м опытах выпадут гербы?

**39.12.** Предположим, что в целые моменты времени частица совершает скачки в множестве точек 0, 1, 2, 3, 4, причем если в некоторый момент времени $\tau$ она находится в одном из внутренних состояний $j = 1, 2, 3$, то в следующий момент времени $\tau + 1$ независимо от предыстории процесса она окажется в одном из соседних состояний $j-1$, $j+1$ с равными вероятностями. Если же частица находится в одной из граничных точек 0 или 4, то рассмотрим такие типы поведения: 1) частица остается в граничной точке навсегда (0 и 4 — поглощающие экраны), 2) частица возвращается в соседнее внутреннее состояние (0 и 4 — отражающие экраны), 3) достигнув одного из граничных состояний, частица остается в нем с вероятностью $1/2$, а с вероятностью $1/2$ переходит в соседнее внутреннее состояние, 4) достигнув одного из граничных состояний частица остается в нем с вероятностью $1/2$, а с вероятностью $1/2$ переходит в центральное состояние 2, 5) из граничного состояния частица переходит с равными вероятностями в одно из внутренних.

В указанных случаях постройте граф марковской цепи, найдите матрицу перехода цепи, классифицируйте состояния цепи, найдите стационарное распределение, выясните, обладает ли цепь свойством эргодичности.

# 40 Указания и ответы

**3.1** 20 **3.2** 25, 20 **3.3** 768 **3.4** 450 **3.5** Указание: $75600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Ответ: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ **3.6** $17 \cdot (17-3)/2 = 119$ **3.7** 1) нет, 2) да **4.3** $25^2 \cdot 10^5 = 62500000$ **4.1** 1) $9 \cdot 10^5$ **4.2** $10^5$ **4.4** $5^2 \cdot 10^3 = 25000$ **5.1** 20 **5.2** $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$ **5.3** $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$ **5.4** 720 **6.1** $5!$ **6.2** $7! = 5040$, $2 \cdot 6! = 1440$ **6.3** $n!$ **6.4** 1) $2 \cdot (n-2)! \cdot n!$ **6.5** 1) $n! - (n-1)!$, 2) $(n-1)! - (n-2)!$ **7.1** $C_{13}^5$ **7.2** $C_n^2$ **7.3** $C_7^3 \cdot C_8^3 \cdot C_9^3$ **7.4** $3 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$; $5 \cdot C_{60}^{20}$ **7.5** $C_{25}^5 - C_{10}^5 - C_{15}^5$ **7.6** $C_{17}^{11} - C_{15}^9 = C_{15}^{11} + 2C_{15}^{10} = 7371$ **8.3** 5040, 10080 **8.5** 1) 10080, 2) 420 **9.1** $3^6$ **9.3** $3^{12} - 3 - 3(2^{12} - 2) = 519156$ **10.2** 120 **10.3** 56 **10.4** 1) $C_{16}^7 = 11440$, 2) $C_{10}^7 = 120$, 3) $C_{10}^7 + 6 \cdot C_{10}^6 + C_{10}^5(5 + C_5^2) = 5160$ **11.8** 55252 **12.1** рассмотрите любой равносторонний треугольник со стороной $\gamma$ **12.2** рассмотрите множество пар вычетов по модулю 2 координат заданных точек **13.1** 9072 **13.2** 125 **13.4** 1) 45000, 2) 18000, 3) 9000, 4) 3600 **13.6** вопрос эквивалентен такому: каким числом способов можно разложить $n$ неразличимых шаров по трем ящикам, $C_{n+2}^2$ **13.7** 49 **13.8** разложите число на простые множители **13.10** 270 **13.12** 8 **13.16** 36 **13.17** сравните с задачей размещения неразличимых шаров по ящикам **13.18** 1) $11 \cdot C_{12}^2 = 726$, 2) $9 \cdot C_9^2 = 324$, 3) $6 \cdot C_7^2 = 126$, 4) $4 \cdot C_4^2 = 24$ **13.25** 126 **13.27** 15 **13.30** 1572864 **13.31** 36 **13.35** 1) 490 **13.36** 1) 98, 2) 92 **13.37** 5184000 **13.38** 91445760 **13.39** 1) $4 \cdot 3 \cdot (C_9^6)^2$, 2) $2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{6} C_9^i C_{18}^{6-i} C_{27-(6-i)}^6$, 3) $\sum\limits_{i=0}^{6} C_{18}^i C_{18}^{6-i} C_{18-i}^i C_{18-(6-i)}^{6-i}$, 4) $\sum\limits_{i=0}^{4} C_4^i C_{32}^{6-i} C_{32-(6-i)}^{6-(4-i)}$, 5) $4 \cdot (C_{27}^{12} - 3 \cdot C_{18}^{12}) \cdot C_{12}^6$, 6) $(C_{36}^{12} - 4(C_{27}^{12} - 3C_{18}^{12}) - C_4^2 C_{18}^{12}) C_{12}^6$ **13.42** 1) $2 \cdot (n!)^2$, 2) $2 \cdot n! \cdot 2^n$, 3) $2 \cdot n! \cdot 2$, 4) $2 \cdot n!$, 5) $2n \cdot (n!)^2$ **13.43** $(n-1)!$ **13.44** $(n-1)!n!$ **13.47** а) 35, б) 256 **13.48** 1) 15, 2) 14702688 **13.49** 1) 11440, 2) 120 **13.52** $n! C_{2n-1}^n$ **13.53** 120 **13.54** $(n+k-1)!/(k-1)!$; $A_k^n$ **13.60** 86430 **13.69** $n(n-1)(n^2 - 3n + 3)$ **13.74** бородачей больше в 1,5 раза **13.75** ответ зависит от того, как понимается слово „четырехугольник“ **13.76** $n(n-3)/2$, $C_{n(n-3)/2}^2$ **13.77** $(n-1)(n-2)(n-3)$ **13.78** $C_n^2$, $C_n^3$, $C_n^3$, $C_n^4$ **13.79** 1) $2(k-1)^2(5k-8)$ **14.1** воспользуйтесь формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии и тем, что степенной ряд в области сходимости можно дифференцировать и интегрировать почленно, 1) $(1-x)^{-1}$, 2) $(1+x)^{-1}$, 3) $(1-2x)^{-1}$, 4) $(1-x^2)^{-1}$,

8) $(1-x)^{-2}$, 9) $x(1-x)^{-2}$, 10) $2(1-x)^{-3}$, **14.2** $3^n+7$ **14.4** 1) $a_n=(3^{n+1}+(-1)^n)/4$ **14.5** воспользуйтесь формулой $e^w=\sum_{n=0}^{\infty} w^n/n!$ **14.6** 1) $f(3x)$, 2) $x^{-2}(f(x)-f(0)-f'(0)x)$, 3) $(f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x}))/2$, 4) $f(x^2)$, 5) $(1-x^{-2})f(x)+x^{-2}f(0)+x^{-1}f'(0)$, 6) $x^2f(x)$, 7) $(1+x)f(x)$, 8) $f(x)-xf(-x)-f'(0)x$, 9) $(1-x)^{-1}f(x)$ **14.13** см. указание к задаче 14.5 **15.1** $1+n+n(n-1)/2$ **15.2** $(n^3+5n+6)/6$ **15.3** $n(n-1)+2$ **16.8** примените формулу бинома Ньютона к $(1\pm x)^n$ и дифференцирование по переменной $x$ **16.9** примените формулу бинома Ньютона к $(1\pm x)^n$ и дифференцирование по переменной $x$ **16.10** примените формулу бинома Ньютона к $(1\pm x)^n$ и интегрирование по переменной $x$ **16.11** $2^{n-1}$ **16.12** рассмотрите равенство $(1-x)^{2n}(1+x)^{2n}=(1-x^2)^{2n}$ и сравните коэффициенты в левой и правой частях при $x^{2n}$ **17.1** 34 **17.2** покажите, что искомое число $x_n$ подмножеств удовлетворяет рекуррентному соотношению $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, $f_{n+2}$ **17.3** $f_{n+2}$ **17.4** $f_{n+1}$ **17.5** $f_{41}$ **17.6** 2584 **17.7** 233 **17.8** 89 **18.7** $c_{n-1}$ **18.8** найдите связь с задачами 18.4,18.5, $c_n$ **18.9** $c_n$ **19.2** $2^{n-1}$ **19.3** 1) $C_{n-1}^{k-1}$ **19.5** найдите связь с числами Фибоначчи **20.6** примените диаграммный метод **20.7** примените диаграммный метод, 7) примените теорему Эйлера о том, что число разбиений $n$ на различные слагаемые равно числу разбиений $n$ на нечетные слагаемые, а после этого примените диаграммный метод **23.2** 1–4,6,8–10,12) — да, 5,7,11) — нет. Граф 6) можно получить из графа 4), а граф 12) — из графа 10) **23.5** 1) нет, 2) да **23.11** примените задачу 23.10 **23.12** нет **24.8** нет **24.16** $C_n$ **24.17** да **26.1** 1) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ **27.1** 10/13 **27.2** 155/203 **27.3** 0,384, 0,096, 0,008, 0, 0, 0 **27.4** а) 7, б) равновероятно **27.6** не бьют **27.7** 1) 1/9, 1/12, 2) 25/216, 27/216 **27.9** а) 1) 25/72, 2) 91/216, 3) 2/27 б) 1) 15/56, 2) 3/8, 3) 3/28 **27.10** 1) без возвращения, 2) с возвращением **27.14** 1) 1/729, 2) 1/81, 3) 56/81, 4) 8/27 **27.21** 1) 3/35, 2) 17/35, 3) 8/35 **27.22** 1) 0,3024, 2) 0,0014, 3) 0,0143, 4) 0,0028, 6) 7/48 **27.26** 1/2 **27.27** $(3k^2-3k+2)/(9k^2-9k+2)$ **27.28** 1) $C_n^{2r}\cdot 2^{2r}$, 2) $nC_{n-1}^{2r-2}\cdot 2^{2r-2}$ **27.29** 0,0648 **27.30** 1) $5\cdot 10^{-8}$, 2) $10^{-8}$ **27.31** 1) 168/323, 2) 21/1292 **27.33** $(n-2)(n-1)/n^2$ **27.36** $2/C_{4n}^{2n}$ **27.37** рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного $n$ **27.39** 1) $2/n$, 2) $6/(n(n-1))$, 4) $2(n-k-1)/(n(n-1))$ **28.1** 1) нет, 2) нет, 3) да **28.7** 1) 15/43, 2) 18/43, 3) 3/43 **28.11** 1) третий, 2) попал **29.1** 7/12 **29.2** 67/630 **29.12** для второго **29.14** $1-(1-$

$p(1-a))^n$ **30.1** 3/17 **30.2** 66/101 **30.3** 54/79 **30.4** 35/67 **30.5** ко второй **30.7** событие практически достоверно **30.8** 0,9979 **30.9** 2) $n/(n+1)$ **31.1** 7/20 **32.1** да **32.2** нет, но $P(A \cap B) - P(A)P(B) < 0{,}0006$, то есть события слабо зависимы **32.3** да **32.4** при $n = 2, 4$ зависимы, при $n = 3$ независимы **32.5** попарно независимы **32.16** нет **32.28** одинаково вероятно **33.1** 1 **33.2** 0,9 **33.3** 1/2 **33.4** 2 **33.8** надо выяснить, верно ли равенство $M(1/\xi) = 1/M(\xi)$ **33.11** 1/4 **33.12** $-1/5$ **33.15** $-\sqrt{2}/4$ **33.17** действуйте, как в задаче 33.16 **33.21** 2, одинаковые **33.22** $-1$ **34.3** $M\xi = 2/3$, $M\eta = 4/3$, $M\zeta = 2$, $\eta$ и $\zeta$ независимы, $\xi$ и $\eta$ некоррелированы, $\mathrm{cov}(\xi, \zeta) = -1/3$ **34.4** $M\xi = 1$, $M\eta = 4/3$, $\xi$ и $\eta$ некоррелированы, но зависимы **34.23** $[\lambda]$ **35.1** да **35.2** да **35.4** воспользуйтесь тем, что если $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y > 0$ **35.5** см. указание к предыдущей задаче **35.6** 2 **35.7** $-1$ **35.10** 3 **35.12** $(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ **35.15** $0, n!\sigma^{2n}$ **35.17** нет , 0 **35.21** $MS_n = 2npq$, $DS_n = 2npq(1-2pq)+2(n-1)pq(1-4pq)$ **35.22** удобно сначала показать, что можно считать множеством значений случайных величин $\xi$ и $\eta$ множество $\{0, 1\}$ **35.23** воспользуйтесь результатом задачи 34.5 **37.1** 0,9999 **37.3** $\geqslant 7$ **37.6** $225 \cdot 2^{-19}$ **37.7** искомое $n$ — это наименьшее целое, удовлетворяющее условию $1 - (1 - 1/C_{36}^4)^n \geq 0{,}9$, $n = 135637$ **37.27** 3 из 5 **37.34** $\approx 0{,}2$ **37.38** $(1-p^2)^n$ **38.1** а) практически 0, б) 0,0228 **38.7** примените теорему Пуассона, $\approx 0{,}44$ **38.8** примените теорему Пуассона 0,08, 0,26, 0,63 **38.9** примените теорему Пуассона, $\approx 0{,}14$ **38.10** $\approx 0{,}08$, $\approx 0{,}023$ **38.12** примените теорему Муавра–Лапласа **39.9** $(1/2, 1/2)$ **39.10** $(q/(1-p+q), (1-p)/(1-p+q))$.

## Литература

1. *Бондаренко М.Ф.,* Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. — Х.: Компанія СМІТ, 2004.

2. *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.

3. *Гнеденко Б.В.,* Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1976.

4. *Грэхем Р.,* Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.

5. *Емеличев В.А.,* Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

6. *Колмогоров А.Н.,* Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982.

7. *Райзер Дж.* Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966.

8. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.

9. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1988.

10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. — М.: Мир, 1984.

**Навчальне видання**

**Ільїнська** Ірина Петрівна
**Ільїнський** Олександр Іванович

# Дискретна математика. Збірник задач
## Комбінаторика, графи, ймовірність

Коректор О. В. Гавриленко
Комп'ютерне верстання авторів
Макет обкладинки І. М. Дончик

Підп. до друку 15.04.08. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк ризографічний. Ум.-друк. арк. 6,04. Обл.-вид.арк. 6,5.
Наклад 200 прим.

61077, Харків, майдан Свободи, 4
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Видавництво Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна

Надруковано ФОП „Петрова І. В.“
61144, Харків, 144, вул. Гвардійців Широнінців, 79-в, к.137
Тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011
від 03.01.03