Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 1.

1. Определите порядок соприкосновения кривых $y = 1 - \cos x$ и $3x^2 - y^2 - 6y = 0$ в точке $M(0, 0)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = a\{\cos t,\ \sin t,\ bt\}$, заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и соприкасающейся плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{\cos t + t,\ \sin t,\ t\}$ в точке $M(1, 0, 0)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{a \operatorname{tg} t,\ b \cos t,\ b \sin t\}$ в произвольной ее точке.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = A \sin^{-3} \alpha$.
6. Найдите огибающую семейства окружностей, имеющих центры на параболе $y^2 = 2px$ и проходящих через ее вершину.
7. Найдите уравнение эволюты эллипса.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R = a + s^2/a$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 2.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \cos x^2$ в точке $M(0, 1)$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, заключенной между точками $x_1 = 9$ и $x_2 = 81$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t^2 + t - 1,\ t^2 - t + 1,\ 2t\}$ в точке $M(1, 1, 2)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{-t^3 + 3t,\ 3t^2,\ t^3 + 3t\}$ в произвольной ее точке M.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $R^2 = 2as$, где R - радиус кривизны кривой, $a = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства прямых, каждая из которых на оси Ox и оси Oy отсекает отрезки, сумма длин которых постоянна.
7. Найдите уравнение эволюты параболы $y = ax^2$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = a$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 3.

1. Найдите уравнение параболы вида $y = x^2 + ax + b$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 2$ в точке $M(-1, 1)$.
2. Найдите длину замкнутой кривой $\bar{r}(t) = a\{\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \cos 2t\}$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t^2,\ t,\ t^3 - 20\}$ в точке $M(4, 2, -12)$.
4. Найдите кривизну и кручение конической спирали $\bar{r}(t) = e^{at}\{\cos t,\ \sin t,\ b\}$, где a,b - постоянные.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = A\alpha$, где $A = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y = ax + \cos a$.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = \sin x$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R = as$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 4.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = -4x^2 - x$ в точке $A(1, -5)$.
2. Найдите длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, заключенной между точками $x_1 = 9$ и $x_2 = 81$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{2t,\ t^4+1,\ t^2\}$ в точке $M(2, 2, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{A\cos t^2 + 7,\ A\sin t^2 - 15,\ Bt^2 - 1\}$ в точке $t = u$.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $(R/a)^2 + 1 = e^{-2s/a}$, где R - радиус кривизны кривой, $a = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y = 2mx + m^4$.
7. Найдите уравнение эволюты гиперболы.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $(R/b)^2 + (s/a)^2 = 1$, где $a, b - \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 5.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $x(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0$ в точке $A(a, a)$.
2. Найдите длину кривой $\bar{r}(t) = \{5\cos^3 t,\ 5\sin^3 t\}$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{\sin t,\ \cos t + t,\ t\}$ в точке $M(0, 1, 0)$.
4. При каком значении параметра W кручение кривой $\bar{r}(t) = \{A\cos t,\ A\sin t,\ Wt\}$ максимально?
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = A\sin m\alpha$, где $A, m - \text{const}$.
6. Через точку $M(a, 0)$ проведен пучок прямых. Найдите огибающую семейства нормалей, проведенных к прямым этого пучка в точках их пересечения с осью Oy.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $Rs = a^2$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 6.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = 5x^2 + 2x + 1$ в точке $A(0, 1)$.
2. Найдите длину кривой $\rho = 2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = e^t\{\cos t,\ \sin t,\ 1\}$ в точке $M(1, 0, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{a\cos^2 t,\ a\sin t\cos t,\ bt\}$.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = A\cos^{-2}\alpha$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $ax^2 + ya^2 = 1$.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = e^x$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $9R^2 + s^2 = 16a^2$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 7.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \sin x^2 + 1$ в точке $M(0,1)$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{t, \sqrt{2}\ln t, 1/t\}$, заключенной между точками $t = 1, t = 4$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t^2 - 2t + 3,\ t^2 - 2t + 1,\ t^2 + 2t\}$ в точке $M(3,1,0)$.
4. Докажите,что радиус кривизны кривой $y^2 = 2px - qx^2$ в произвольной ее точке М пропорционален отрезку нормали, заключенному между точкой M и осью Ox.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = a\alpha^2/2$, где $a = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y = (ax - a^2)^2$.
7. Найдите уравнение эволюты циклоиды $\vec{r}(t) = a\{t - \sin t,\ 1 - \cos t\}$.
8. Пусть $R(s)$-радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 + s^2 = 16a^2$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 8.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = e^x \operatorname{tg} x + 1$ в точке $A(0,1)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = a\{\ln\operatorname{ctg}(t/2) - \cos t,\ \sin t\}$, заключенной между точками $t_1 = \dfrac{\pi}{2}, t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t,\ t^2,\ -2t^2 + 8t + 1\}$ в точке $M(1,1,7)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{A\cos t^2 + 7,\ A\sin t^2 - 15,\ Bt^2 - 1\}$ в точке $t = u$.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = a\operatorname{tg}\alpha$, где $a = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $x^2 + ay^2 = a^3$.
7. Найдите уравнение эволюты астроиды $\vec{r}(t) = a\{\cos^3 t,\ \sin^3 t\}$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 = 2as$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 9.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = -2x^2 + 2x + 1$ в точке $A(0,1)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{\sin 2t,\ 1 - \cos 2t\}$, заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = a$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{3t - t^3,\ 3t^2,\ t^3 + 3t\}$ в точке $M(-2,12,14)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = a\{\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\}$ в произвольной ее точке.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $\dfrac{R^2}{b^2} + \dfrac{s^2}{a^2} = 1$, где R - радиус кривизны кривой, $a, b - \text{const}$.
6. На параллельных хордах окружности радиуса R как на диаметрах построены окружности. Найдите огибающую семейства этих окружностей.
7. Найдите уравнение эволюты цепной линии $y = a\operatorname{ch}(x/a)$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 10.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = x^2 - 3x + 3$ в точке $M(1, 1)$.
2. Найдите длину кривой $\bar{r}(t) = \{5\cos^3 t,\ 5\sin^3 t\}$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t, t^2, 4t - 4t^2 + 1\}$ в точке $M(2, 4, -7)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = a\{t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(t/2)\}$ в произвольной ее точке.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = \dfrac{A}{\cos\alpha}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $(x - c)^2 + y^2 = c^2/2$.
7. Найдите уравнение эволюты лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = a/(a^2 + s^2)$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 11.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = -x^2 + x + 1$ в точке $A(0, 1)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{24t^3,\ 18t^2 - 9t^4\}$, заключенной между точками $t_1 = -a$ и $t_2 = a$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t - \cos t,\ 1 - \sin t,\ 4\sin(t/2) + 2\}$ в точке $M(-1, 1, 2)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{A\cos t^2 + 7,\ A\sin t^2 - 15,\ Bt^2 - 1\}$ в точке $t = u$.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = Ae^{m\alpha}$, где $A, m - \mathrm{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y^2 = 2px + p^2$.
7. Найдите уравнение эволюты спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, где $a = \mathrm{const}$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = 1/\sqrt{a^2 - s^2}$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 12.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \cos 2x$ в точке $M(0, 1)$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $x^3 - 3a^2y = 0,\ z - \dfrac{a}{2} = 0$, заключенной между плоскостями $y = \dfrac{a}{3}$ и $y = 9a$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{2\cos t + t,\ 2\sin t,\ 4\cos^2 t\}$ в точке $M(2, 0, 4)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{a\,\mathrm{tg}\,t,\ b\cos t,\ b\sin t\}$ в произвольной ее точке.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $s^2 + R^2 = 16a^2$, где R - радиус кривизны кривой, $a = \mathrm{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y^3 = (x - c)^2$.
7. Найдите уравнение эвольвенты окружности.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = s/a^2$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 13.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \sin 2x$ в точке $M(\frac{\pi}{4}, 1)$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, заключенной между точками $x_1 = 9$ и $x_2 = 81$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t^4/4,\ t^3/3,\ t^2/2\}$ в ее произвольной точке.
4. Докажите, что кривизна кривой $\bar{r}(t) = \{3t - t^3,\ t^3 + 3t,\ 3t^2 + 5\}$ равна ее кручению.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $s^2 + R^2 = 9a^2$, где R - радиус кривизны кривой, $a = \text{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $(x - a)^2 + (y - a)^2 - a^4 = 0$.
7. Найдите уравнение эвольвенты параболы $y^2 = 2px$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = \sqrt{as}$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 14.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \frac{1}{2}\cos x^4 - 1$ в точке $M(0, -\frac{1}{2})$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = a\{2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t + \sin 2t\}$ между точками $t_1 = 0,\ t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $x - y^2 = 0,\ x^2 - z = 0$ в точке $M(1, 1, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = A\{t,\ t^2,\ t^3\}$ в произвольной ее точке M.
5. Найдите натуральные уравнения кривой $\bar{r}(t) = \{e^t,\ \sqrt{2}t,\ e^{-t}\}$. Докажите, что спрямляющие плоскости этой кривой параллельны некоторой прямой. Найдите уравнение этой прямой.
6. Найдите огибающую семейства кривых $x^2 + (y - a)^2 - a^6 = 0$.
7. Найдите уравнение эволюты эллипса.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R = a + s^2/a$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 15.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = \operatorname{tg} x + e^x$ в точке $A(0, 1)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t\}$, заключенной между точками $t_1 = -1$ и $t_2 = 4$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{\sin t,\ \cos t + t,\ e^t\}$ в точке $M(0, 1, 1)$.
4. Докажите, что в произвольной точке кривой $x^2 - 3y = 0,\ 2xy - 9z = 0$ ее кривизна равна кручению.
5. Найдите натуральные уравнения кривой $\bar{r}(t) = a\{\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\}$. Докажите, что спрямляющие плоскости этой кривой параллельны некоторой прямой. Найдите уравнение этой прямой.
6. Найдите огибающую семейства кривых $(x - a)^2 + (y - a)^2 - a^6 = 0$.
7. Найдите уравнение эволюты параболы $y = ax^2$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = a$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 16.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ в точке $M(a, a)$.
2. Найдите длину дуги кривой $y = x\sqrt{x}$, заключенной между точками $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t^2 + t - 1,\ t^2 - t + 1,\ 2t\}$ в точке $M(1, 1, 2)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0,\ y^2 - 2x + z = 0$ в точке $M(1, 1, 1)$.
5. Найдите натуральное уравнение кривой $\rho = ae^{b\varphi}$.
6. Найдите огибающую семейства прямых, отсекающих на двух взаимно перпендикулярных прямых отрезки, сумма длин которых постоянна.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = \sin x$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R = as$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 17.

1. Найдите уравнение параболы, которая касается своей вершиной кривой $y = \sin^2 x$ в точке $M(\pi/2, 1)$ и имеет максимальный порядок соприкосновения с ней. Определите этот порядок.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{4\cos t^3,\ 4\sin t^3,\ t^3\}$ заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = 10$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t - \cos t,\ 1 - \sin t,\ 4\sin(t/2) + 2\}$ в точке $M(-1, 1, 2)$.
4. На кривой $\bar{r}(t) = A\{\cos t,\ \sin t,\ t^3 - 9t\}$ найти точки с нулевой кривизной, нулевым кручением и дуги, на которых кручение сохраняет знак.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = A\alpha$.
6. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных на фокальных радиус-векторах эллипса, как на диаметрах.
7. Найдите уравнение эволюты гиперболы.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $Rs = a^2$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 18.

1. Докажите,что кривая $y = e^{kx}\sin mx$ касается кривых $y = e^{kx}$ и $y = -e^{-kx}$ во всех общих точках.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{4\cos t^{1/3},\ 4\sin t^{1/3},\ t^{1/3}\}$, заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{\cos t + t,\ \sin t,\ t\}$ в точке $M(1, 0, 0)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $x^2 - 3y = 0,\ 2xy - 9z = 0$ в точке $M(0, 0, 0)$.
5. Найдите натуральное уравнение кривой $\bar{r}(t) = a\{t - \sin t,\ 1 - \cos t\}$.
6. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных на фокальных радиус-векторах гиперболы, как на диаметрах.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = \ln x$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $9R^2 + s^2 = 16a^2$, где $a = \text{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 19.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности равносторонней гиперболы $xy = 1$, радиус которой минимален.
2. Найдите длину кривой $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, заключенной между точками $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0,\ x^2 + y^2 - 2 = 0$ в точке $M(1, 1, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = A\{t,\ t^2,\ t^3\}$ в произвольной ее точке M.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = a\cos\alpha$, где $a = \mathrm{const}$.
6. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных на фокальных радиус-векторах параболы $y^2 = 2px$, как на диаметрах.
7. Найдите уравнение эволюты кривой $y = e^x$.
8. Пусть $R(s)$-радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 + s^2 = 16a^2$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 20.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = x\sin x$ в точке $x = \pi$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = a\{2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t + \sin 2t\}$ между точками $t_1 = 0,\ t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{\sin^2 t + \cos t,\ \frac{1}{2}\sin 2t,\ \cos t\}$ в точке $M(1, 0, 0)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{a\cos t^2,\ a\sin t^2,\ bt^2\}$.
5. Пусть R - радиус кривизны плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $R = p(1 - \varepsilon^2\cos^2\alpha)^{3/2}$, где $p, \varepsilon = \mathrm{const}$.
6. Найдите огибающую семейства окружностей, имеющих центры на параболе $y^2 = 2px$ и проходящих через ее вершину.
7. Найдите уравнение эволюты астроиды $\vec{r}(t) = a\{\cos^3 t,\ \sin^3 t\}$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 = 2as$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 21.

1. Определите порядок соприкосновения кривых $y = 1 - \cos x$ и $3x^2 - y^2 - 6y = 0$ в точке $M(0, 0)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{4\cos t^{1/3},\ 4\sin t^{1/3},\ t^{1/3}\}$, заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $x - y^2 = 0,\ x^2 - z = 0$ в точке $M(1, 1, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $x^3 - 12y = 0,\ xz - 2 = 0$ в точке $M(2, 2/3, 1)$.
5. Найдите параметрическое уравнение плоской кривой, если ее натуральное уравнение $R = as$, где R - радиус кривизны кривой, $a = \mathrm{const}$.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y = ax + \cos a$.
7. Найдите уравнение эволюты циклоиды $\vec{r}(t) = a\{t - \sin t,\ 1 - \cos t\}$.
8. Пусть $R(s)$ - радиус кривизны плоской кривой γ. Найдите натуральное уравнение эволюты кривой γ, если $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}$, где $a = \mathrm{const}$.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 22.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = -4x^2 - x$ в точке $A(1, -5)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = a\{\ln \operatorname{ctg}(t/2) - \cos t,\ \sin t\}$, заключенной между точками $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{4t^3 + t^2,\ 3t^2 - 2t^4,\ 2t^3\}$ в точке $M(-3, 1, -2)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x + y - z = 2$ в точке $M(0, 1, -1)$.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = ae^{m\alpha}$, где $a, m -$ const.
6. Найдите огибающую семейства кривых $ax^2 + ya^2 = 1$.
7. Найдите уравнение эволюты лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = a/(a^2 + s^2)$, где $a =$ const.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 23.

1. Найдите уравнение соприкасающейся окружности кривой $y = x \ln x + 1$ в точке $A(1, 1)$.
2. Найдите длину дуги кривой $\bar{r}(t) = \{4\cos t^{1/3},\ 4\sin t^{1/3},\ t^{1/3}\}$, заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = z$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $x - y^2 = 0,\ x^2 - z = 0$ в точке $M(1, 1, 1)$.
4. Найдите кривизну и кручение кривой $\bar{r}(t) = \{a \operatorname{tg} t,\ b\cos t,\ b\sin t\}$ в произвольной ее точке.
5. Пусть s - длина дуги плоской кривой γ, α - угол между постоянным вектором и текущим касательным вектором кривой γ. Найдите параметрическое уравнение кривой γ, если $s = a\cos m\alpha$, где $a, m -$ const.
6. Найдите огибающую семейства кривых $y = (ax - a^2)^2$.
7. Найдите уравнение эволюты спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, где $a =$ const.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = 1/\sqrt{a^2 - s^2}$, где $a =$ const.

Индивидуальное задание по дифференциальной геометрии. Теория кривых. Вариант 24.

1. Определите порядок соприкосновения кривых $y = 1 - \cos x$ и $3x^2 - y^2 - 6y = 0$ в точке $M(0, 0)$.
2. Найдите длину кривой $\rho = 2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.
3. Найдите уравнения касательной, главной нормали, бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой $\bar{r}(t) = \{t,\ t^2 + t,\ e^t\}$ в точке $M(0, 0, 1)$.
4. На кривой $\bar{r}(t) = A\{t,\ \sin t,\ \sin 3t\}$ найти точки с нулевой кривизной, нулевым кручением и дуги, на которых кручение сохраняет знак.
5. Найдите натуральное уравнение кривой $\bar{r}(t) = a\{\cos t^3,\ \sin t^3\}$.
6. На параллельных хордах окружности радиуса R как на диаметрах построены окружности. Найдите огибающую семейства этих окружностей.
7. Найдите уравнение эвольвент параболы $y^2 = 2px$.
8. Найдите натуральное уравнение $\tilde{k}(\tilde{s})$ эвольвенты кривой, если натуральное уравнение ее эволюты имеет вид $k(s) = s/a^2$, где $a =$ const.