

## Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

### Варіант 1

1. Знайдіть площину, в якій лежать прямі  $x = 2t - 1$ ,  $y = 3t + 2$ ,  $z = 2t - 3$  і  $x = 2t + 3$ ,  $y = 3t - 1$ ,  $z = 2t + 1$ .
2. На осі  $Oy$  знайдіть точки, рівновіддалені від двох площин  $x + y - z + 1 = 0$ ,  $x - y + z - 5 = 0$ .
3. Обчисліть косинус того двогранного кута, утвореного площинами  $2x + y - 2z + 5 = 0$ ,  $x - 2y - 2z + 7 = 0$ , якому належить точка  $(2, -3, -1)$ .
4. Доведіть, що дві дані прямі перетинаються і знайдіть рівняння бісектрис гострого і тупого кутів між ними:  $x = 4 - 4t$ ,  $y = 1 + 4t$ ,  $z = -5 + 7t$  і  $x = -3 + t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = -4 + 2t$ .
5. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $(2, 3, 1)$  і перетинає прямі  $x + y = 0$ ,  $x - y + z + 4 = 0$  і  $x + 3y - 1 = 0$ ,  $y + z - 2 = 0$ .

## Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

### Варіант № 2

1. Знайдіть вектори, паралельні лініям перетину площини  $2x + y - 7z + 4 = 0$  з координатними площинами.
2. Дано вершини трикутної піраміди  $A(-1, -2, 0)$ ,  $B(5, 0, 5)$ ,  $C(3, 2, 2)$ ,  $D(-1, 0, 2)$ . Знайдіть рівняння бісекторної площини внутрішнього двогранного кута при ребрі  $AB$  і знайдіть косинус цього кута.
3. Доведіть, що дві дані прямі перетинаються і знайдіть рівняння бісектрис гострого і тупого кутів між ними:  $3x - 2y + 1 = 0$ ,  $2x + z - 15 = 0$ ;  $x = 1 + t$ ,  $y = 3 + t$ ,  $z = 7 - t$ .
4. Знайдіть рівняння площини, що проходить через лінію перетину двох площин  $2xy - 2z + 1 = 0$ ,  $x + y + 4z - 2 = 0$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oy$  рівні відрізки.
5. На прямій, по якій перетинається площина  $2x - 3y + 4z - 5 = 0$  з площиною  $xOz$ , знайдіть точки, віддалені від площини  $2x + y - z + 3 = 0$  на відстань  $\sqrt{6}$ .

## Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

### Варіант № 3

1. Знайдіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до прямої перетину площини  $x - 2y + 4z - 3 = 0$  з площиною  $xOz$ .
2. Знайдіть рівняння бісекторної площини того двогранного кута між двома площинами  $3x + 5y - 4z + 1 = 0$ ,  $x + z - 5 = 0$ , в якому лежить початок координат.
3. Знайдіть рівняння площини, віддаленої від початку координат на відстань  $\sqrt{29}$  і перпендикулярної до прямої, по якій перетинаються площини  $2x - y + z = 0$ ,  $6x - y + 7z - 4 = 0$ .
4. Знайдіть рівняння прямої, яка колінеарна прямій  $x - 3y + z = 0$ ,  $x + y - z + 4 = 0$  і перетинає дві прямі  $x = 3 + t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 4t$  і  $x = -2 + 3t$ ,  $y = -1$ ,  $z = 4 - t$ .
5. Знайдіть рівняння прямої, що перетинає ортогонально вісь  $Oy$  і пряму  $x = 3 + 4t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 2 + 5t$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 4

1. Знайдіть рівняння площини, що проходить через вісь  $Oy$  і колінеарна лінії перетину двох площин  $x + 4y - 2z + 7 = 0$ ,  $3x + 7y - 2z = 0$ .
2. На осі  $Oz$  знайдіть точку, рівновіддалену від точки  $(2, 3, 4)$  і від площини  $2x + 3y + z - 17 = 0$ .
3. Знайдіть косинус того кута між двома площинами  $3x + y - 2z + 4 = 0$ ,  $x - 7y + 2z = 0$ , в якому лежить точка  $(1, 1, 1)$ .
4. Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до площини  $xOz$  і перетинає дві прямі  $x = t$ ,  $y = -4 + t$ ,  $z = 3 - t$  і  $x = 1 - t$ ,  $y = -3 + t$ ,  $z = 4 - 5t$ .
5. Дано координати вершин трикутної піраміди  $A(1, 0, -2)$ ,  $B(2, 1, -1)$ ,  $C(0, 2, -3)$ ,  $D(-1, -2, 1)$ . Знайдіть координати точки  $P$ , симетричної вершині  $D$  відносно грані  $ABC$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 5

1. Через пряму  $x - y + 1 = 0$ ,  $x + 2y - z - 1 = 0$  проведіть площину перпендикулярно площині  $x + 2y + 3z = 0$ .
2. На лінії перетину двох площин  $2x - y + z - 8 = 0$ ,  $4x + 3y - z + 14 = 0$  знайдіть точки, віддалені від площини  $2x + 3y - 6z - 10 = 0$  на відстань 7.
3. Знайдіть рівняння площини, що ділить навпіл гострий двогранний кут, утворений площиною  $3x - 2y + 6z - 2 = 0$  с площиною  $yOz$ .
4. Прямі  $l_1$  і  $l_2$  дано рівняннями  $x = 2t + 1$ ,  $y = -t$ ,  $z = 3 + 2t$ ;  $x - y - 2z - 1 = 0$ ,  $2x + 2y + z + 3 = 0$ . Обчисліть косинус кута між цими прямими.
5. Дано рівняння площин двох граней куба  $x - 2y - 2z + 4 = 0$ ,  $2x + 2y - z - 13 = 0$  і координати його центру  $(1, 1, -2)$ . Знайдіть рівняння площин решти граней куба.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 6

1. Дано рівняння площин  $x + 2y + z + 2 = 0$  ( $\alpha_1$ ),  $x + y + z = 0$  ( $\alpha_2$ ),  $x + y - 1 = 0$  ( $\alpha_3$ ),  $3x + z + 1 = 0$  ( $\alpha_4$ ). Знайдіть рівняння площини, що проходить через пряму  $l_1$ , отриману перетином  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  і паралельна до прямої  $l_2$ , отриманої перетином  $\alpha_3$  і  $\alpha_4$ .
2. Доведіть, що прямі  $x = 1 - 2t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $z = 2t$  і  $x = -1 + t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = 2 + 2t$  перетинаються, і знайдіть рівняння прямої, яка містить бісектриси гострих кутів, утворених прямими.
3. Знайдіть рівняння площини, паралельної площині  $2x + y - 4z + 5 = 0$  і віддаленої від точки  $(1, 2, 0)$  на відстань  $\sqrt{21}$ .
4. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і перетинає дві прямі  $x = t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 3 + t$  і  $x = 2 + 2t$ ,  $y = 3 - t$ ,  $z = 4 + 3t$ .
5. У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дано рівняння площин  $(ABC) : 2x - y + 2z + 15 = 0$ ,  $(ABB_1) : x - 2y - 2z + 6 = 0$  і центр  $M(1, -1, 0)$  грані  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть рівняння площин решти граней куба.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 7

1. Знайдіть параметричні рівняння площини, що проходить через точку  $(2, -1, 3)$  паралельно площині  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння прямої, що містить бісектрису  $AD$  внутрішнього кута трикутника  $ABC$  з вершинами  $A(4, 1, -2)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(-2, 3, 5)$ .
3. Знайдіть відстань від точки  $(1, 3, 5)$  до прямої, по якій перетинаються площини  $2x + y + z - 1 = 0$ ,  $3x + y + 2z - 3 = 0$ .
4. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $(2, 3, 1)$  і перетинає прямі  $x + y = 0$ ,  $x - y + z + 4 = 0$  і  $x + 3y - 1 = 0$ ,  $y + z - 2 = 0$ .
5. Знайдіть координати точки  $M'$ , симетричної точці  $M(3, 1, -4)$  відносно прямої  $x = -1 + 2t$ ,  $y = -4 - t$ ,  $z = -1 - t$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 8

1. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку  $(2, -3, 1)$  і перпендикулярна площинам  $x + 3y - z + 3 = 0$ ,  $2x + y - 2z + 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння сфери, що лежить в гострому куті, утвореному площинами  $2x - 4y - 3z + 21 = 0$ ,  $5x - 2z = 0$ , і дотикається цих площин, якщо її центр лежить на осі абсцис.
3. Доведіть, що прямі  $x - y - 3z = 0$ ,  $x - 2y + z = 0$  і  $x = 3 + 4t$ ,  $y = -3 + 7t$ ,  $z = 2 - t$  перетинаються. Знайдіть рівняння бісектрис гострого і тупого кутів між цими прямими.
4. Знайдіть основу перпендикуляра, опущеного з точки  $(1, 3, 5)$  на пряму, по якій перетинаються площини  $2x + y + z - 1 = 0$ ,  $3x + y + 2z - 3 = 0$ .
5. Знайдіть рівняння сфери, що дотикається площини  $3x - 6y - 2z - 2 = 0$  в точці  $(2, 1, -1)$ , якщо її радіус дорівнює 7.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 9

1. Знайдіть параметричні рівняння прямої, що проходить через точку  $(2, 3, -1)$  і паралельна прямій  $x - 2y - 3z - 3 = 0$ ,  $2x + y - z + 5 = 0$ .
2. Дано рівняння площин  $2x - y - z + 3 = 0$  (1),  $4x - 2y - 2z + 5 = 0$  (2). Знайдіть рівняння площини, паралельної даним площинам, яка НЕ розташована між ними і відстоїть від площини (1) у два рази далі, ніж від площини (2).
3. Доведіть, що три площини  $2x - 2y + 3z - 11 = 0$ ,  $5x + 6y + 2z - 11 = 0$ ,  $6x + 5y - 2z - 11 = 0$  перетинаються в точці. Знайдіть рівняння площини, проходить через цю точку і утворює рівні кути з прямими, по яким перетинаються кожні дві з даних площин.
4. Знайдіть на прямій  $x = 2t$ ,  $y = 3 - t$ ,  $z = 4$  точки, віддалені від площини  $3x - 3y + 4z = 0$  на відстані  $\sqrt{34}$ .
5. Знайдіть рівняння загального перпендикуляра мимобіжних прямих  $x = 3 + t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 4$  і  $x - 3y + z = 0$ ,  $x + y - z + 4 = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 10

1. Знайдіть рівняння прямої, що містить висоту  $AH$  трикутника  $ABC$ , якщо  $A(-1, 1, 2)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(2, 6, -2)$ .
2. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку  $(-1, 2, 1)$  паралельно прямій  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$  і утворює кут  $60$  градусів з прямою  $x = y$ ,  $z = 0$ .
3. Знайдіть відстань від точки  $(1, 2, 5)$  до прямої  $x = t$ ,  $y = 1 - 2t$ ,  $z = 3 + t$ .
4. Знайдіть рівняння сфери, вписаної в піраміду, утворену координатними площинами і площиною  $x + 2y - 2z + 8 = 0$ .
5. Дано точки  $A(5, -3, 2)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(-1, 2, -2)$ ,  $D(2, 4, -5)$ . Знайдіть рівняння загального перпендикуляра прямих  $AB$  і  $CD$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 11

1. Знайдіть рівняння ортогональної проекції прямої  $x = 1 - 2t$ ,  $y = 3 + t$ ,  $z = 3t$  на площину  $x - y - z - 5 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння бісекторної площини того двогранного кута, утвореного площинами  $x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $2x - y + z - 3 = 0$ , якому належить точка  $(1, 1, 1)$ .
3. Знайдіть рівняння площини, що проходить через пряму  $x + 4y + z = 0$ ,  $x - z + 4 = 0$  і утворює кут  $45$  градусів з площиною  $yOz$ .
4. Знайдіть відстань від точки  $(1, 2, 5)$  до прямої  $x + y - z + 2 = 0$ ,  $4x - 3z + 3 = 0$ .
5. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $(2, -1, 0)$  перпендикулярно до прямої  $x = t$ ,  $y = -1 - 3t$ ,  $z = -1 - 2t$  і перетинає її.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 12

1. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку  $(1, 2, 1)$  і перпендикулярна площинам  $x + 2y - z + 3 = 0$ ,  $2x + y - 2z + 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння прямої, яка лежить у площині  $y + 2z = 0$  і перетинає прями  $x = 1 - t$ ,  $y = t$ ,  $z = 4t$  і  $x = 2 - t$ ,  $y = 4 + 2t$ ,  $z = 1$ .
3. Знайдіть рівняння бісекторної площини того двогранного кута, утвореного площинами  $x - 4y + 8z - 5 = 0$ ,  $2x - y - 2z + 7 = 0$ , якому належить точка  $(1, -1, 1)$ .
4. Знайдіть найкоротшу відстань між двома прямими  $x = 3 + t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 2 + 2t$ ;  $x = -t$ ,  $y = 2 + 3t$ ,  $z = 3t$ .
5. Три грані паралелепіпеда лежать у площинах  $x - 3z + 18 = 0$ ,  $2x - 4y + 5z - 21 = 0$ ,  $6x + y + z - 30 = 0$ , а одна з його вершин  $A$  має координати  $(-1, 3, 1)$ . Знайдіть рівняння решти граней паралелепіпеда і його діагоналі, що проходить через точку  $A$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 13

1. Дано рівняння прямої  $2x - y - z - 5 = 0$ ,  $x + y - 2z + 3 = 0$  і площини  $x - 3y + z - 1 = 0$ . Знайдіть рівняння ортогональної проекції прямої на площину.
2. Дано рівняння прямої  $x = 2 - t$ ,  $y = 3 + 2t$ ,  $z = -3t$  і площини  $2x + 2y - z - 5 = 0$ . Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку  $(5, 1, -2)$  паралельно даній площині і перетинає дану пряму.
3. Трикутна піраміда задана координатами своїх вершин  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 0)$ ,  $D(1, 5, 7)$ . Знайдіть рівняння бісекторної площини двогранного кута  $B(AD)C$ .
4. Знайдіть лінійний кут того двогранного кута між площинами  $x - y + z - 1 = 0$ ,  $2x - y + z + 2 = 0$ , в якому лежить початок координат.
5. Знайдіть найкоротшу відстань між двома прямими  $x + y - z + 1 = 0$ ,  $x + y = 0$  і  $x - 2y + 3z - 6 = 0$ ,  $2x - y + 3z - 6 = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 14

1. Знайдіть рівняння площини, що проходить через точку  $(1, -2, 3)$  і перпендикулярна площинам  $3x + 2y - z + 3 = 0$ ,  $2x + y - 2z + 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння прямої, симетричної прямій  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$  відносно площини  $5x - y + z - 4 = 0$ .
3. Знайдіть рівняння бісекторної площини гострого двогранного кута, утвореного площинами  $3x - 2y - z + 3 = 0$ ,  $2x - 3y + z - 5 = 0$ .
4. У площині  $x + y + z - 10 = 0$  знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої  $x = 2t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 3 + t$  і проходить через точку перетину цієї прямої з площиною.
5. Знайдіть найкоротшу відстань між двома прямими  $x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $2x - 3y + z - 4 = 0$  і  $x + y + z - 9 = 0$ ,  $2x - y - z = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 15

1. Через точку  $(1, -1, 1)$  проведіть площину, перпендикулярну до площин  $x - y + z - 1 = 0$ ,  $2x + y + z + 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння площини, паралельної площині  $8x + y - 4z + 5 = 0$  і віддаленої від точки  $(1, -2, 0)$  на відстань 2.
3. Дано вершини трикутної піраміди  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(4, 2, 3)$ ,  $C(3, -4, 2)$ ,  $D(-3, 0, 1)$ . Доведіть, що початок координат лежить всередині цієї піраміди.
4. Площина  $x + y + z = a$  перетинається площинами  $y = x$  і  $3x = y$ . Визначте кут між цими лініями перетину.
5. Знайдіть точку, симетричну  $(4, 3, 10)$  відносно прямої  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 2 + 4t$ ,  $z = 3 + 5t$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 16

1. Через точку перетину площин  $2x + y - z - 2 = 0$ ,  $x - 3y + z + 1 = 0$ ,  $x + y + z - 3 = 0$  проведіть площину паралельну площині  $x + y + 2z = 0$ , не знаходячи точки перетину.
2. Розглядається той двограний кут між площинами  $x - 2y + z + 3 = 0$ ,  $x + y + 2z = 1$ , всередині якого лежить точка  $(-1, 0, 0)$ . Знайдіть ГМТ, що лежать всередині цього кута і віддалених від цих площин відповідно на відстані  $\sqrt{6}$  і  $2\sqrt{6}$ .
3. Пряма  $x + y - z = 0$ ,  $y = x$  проектується: 1) на площину  $xOz$ , 2) на площину  $yOz$ . Визначте кут між цими проекціями.
4. Точка  $A$  лежить на прямій  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ , причому  $A$  рівновіддалена від точки  $B(0, 1, 1)$  і від площини  $2x - y + 2z + 1 = 0$ . Знайдіть координати точки  $A$ .
5. Знайдіть координати центру сфери, вписаної в піраміду, утворену координатними площинами і площиною  $2x + 3y - 6z - 4 = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 17

1. Через точку  $(2, 2, 1)$  проведіть пряму, паралельну площинам  $x - y - z - 2 = 0$ ,  $x - y - 2z - 1 = 0$ .
2. Знайдіть рівняння бісекторної площини того двогранного кута між площинами  $x - z - 5 = 0$ ,  $3x - 5y - 4z = 0$ , всередині якого лежить точка  $(1, 1, 1)$ .
3. Знайдіть кут між прямою  $x + y + 3z = 0$ ,  $x - y - z = 0$  і площиною  $x - y + z + 1 = 0$ .
4. Точка  $A$  лежить на прямій  $x - y - 3 = 0$ ,  $2x + z = 0$ . відстань від точки  $A$  до прямої  $x = y = z$  дорівнює  $\sqrt{6}$ . Знайдіть координати точки  $A$ .
5. Знайдіть ГМТ  $(x, y, z)$  таких, що об'єм трикутної піраміди з вершинами  $(x, y, z)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$  дорівнює 10.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 18

1. Через точку  $(1, 1, 2)$  проведіть площину, паралельну прямим  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ ,  
 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ .
2. Знайдіть рівняння бісекторної площини гострого двогранного кута між площинами  $x - z - 5 = 0$ ,  $3x + 5y + 4z = 0$ .
3. Знайдіть проекцію прямої  $x - y - z = 0$ ,  $x - 5y + z = 10$  на площину  $x + 2y + 3z = 2$  і визначте кут, утворений цією проекцією з площиною  $xOy$ .
4. На осі  $Oz$  знайдіть точку, рівновіддалену від площин  $12x + 9y - 20z - 19 = 0$ ,  $16x - 12y + 15z - 9 = 0$ .
5. Знайдіть площини, які ортогонально проектують пряму  $x - y + 2z + 3 = 0$ ,  $2x - y - z + 1 = 0$  на координатні площини.

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 19

1. Через точку  $(1, 2, 1)$  проведіть площину, паралельну прямим:  $x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $x - y + z - 1 = 0$  і  $2x - y + z = 0$ ,  $x - y + z = 0$ .
2. Через вісь  $Oz$  проведіть площину, яка утворює кут  $60$  градусів з площиною  $2x + y - \sqrt{5}z = 7$ .
3. На лінії перетину площин  $x + y + z - 2 = 0$  і  $x + 2y - z - 1 = 0$  знайдіть точку, рівновіддалену від площин  $x + 2y + z + 1 = 0$ ,  $x + 2y + z - 3 = 0$ .
4. Визначте  $t$  так, щоб площини  $x - y + z = 0$ ,  $3x - y - z + 2 = 0$ ,  $4x - y - 2z + t = 0$  перетиналися по прямій.
5. Знайдіть рівняння площини, яка перпендикулярна площині  $z = 0$  і проходить через перпендикуляр, опущений з точки  $(1, -1, 1)$  на пряму  $x = 0$ ,  $y - z + 1 = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 20

1. Через пряму  $x - 1 = 0$ ,  $x + 2y - z - 1 = 0$  проведіть площину перпендикулярно площині  $x + y + z = 0$ .
2. Знайдіть ортогональну проекцію точки  $(2, 1, 1)$  на площину  $x + y + 3z + 5 = 0$ .
3. Грані трикутної піраміди задані рівняннями  $x + 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $4x - 4y + 7z - 9 = 0$ ,  $8x + 4y + z - 3 = 0$ ,  $y - z = 0$ . Знайдіть рівняння бісекторної площини внутрішнього двогранного кута між першими двома гранями.
4. Через пряму  $x = y = z$  проведіть площину, яка утворює кут  $45$  градусів з площиною  $x = y$ .
5. Через точку  $(2, 1, 3)$  проведіть пряму, яка паралельна площині  $x + y + z = a$  і перетинає пряму  $x = y$ ,  $y = 2z$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 21

1. Знайдіть прямі, які перпендикулярні прямій  $y - z + 1 = 0$ ,  $x + 2z = 0$  і лежать в площині  $x + y + z + 1 = 0$ .
2. Знайдіть ГМТ на площині  $xOz$ , рівновіддалених від площин  $2x + y - 2z = 3$ ,  $3x + 12y - 4z = 26$ .
3. Знайдіть рівняння і довжину перпендикуляра, опущеного з точки  $(0, -1, 1)$  на пряму  $y + 1 = 0$ ,  $x + 2z - 7 = 0$ .
4. Через точку  $(1, 2, -1)$  проведіть пряму, що перетинає обидві прямі:  
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$
5. Знайдіть ортогональну проекцію точки  $(2, 3, 1)$  на пряму  $x = t - 7$ ,  $y = 2t - 2$ ,  $z = 3t - 2$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 22

1. Через точку перетину площини  $x + y + z = 2$  і прямої  $2y = x$ ,  $z = -1$  проведіть пряму, що лежить у цій площині і перпендикулярна до даної прямої.
2. Знайдіть площину, яка ділить навпіл той двогранний кут між площинами  $x + 2y - z - 1 = 0$ ,  $x + 2y + z + 1 = 0$ , в якому лежить точка  $(1, -1, 1)$ .
3. Знайдіть відстань від точки  $(3, -1, 2)$  до прямої  $2x - y + z - 4 = 0$ ,  $x + y - z + 1 = 0$ .
4. Знайдіть площині, які ортогонально проєктують пряму  $x - y + 2z + 3 = 0$ ,  $2x - y - z + 1 = 0$  на координатні площини.
5. Знайдіть рівняння прямої, яка є ортогональною проєкцією прямої  $2x - y + z - 1 = 0$ ,  $x + y - z + 1 = 0$  на площину  $x + 2y - z = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 23

1. Знайдіть площину, що проходить через початок координат і через перпендикуляр, опущений з точки  $(1, -1, 0)$  на пряму  $x = z + 3$ ,  $y = -2z - 3$ .
2. Знайдіть площину в два рази більше віддалену від площини  $x + y - z + 1 = 0$ , ніж від площини  $x + y - z - 1 = 0$ , і не розташовану між ними.
3. Знайдіть бісектриси кутів між прямими  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ ,  $\frac{x-3}{14} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{2}$ .
4. Знайдіть відстань між прямими  $x + y - z - 1 = 0$ ,  $2x + y - z - 2 = 0$  і  $x + 2y - z - 2 = 0$ ,  $x + 2y + 2z + 4 = 0$ .
5. Знайдіть прямі, які перетинають прямі:  $x + y - z - 1 = 0$ ,  $x - y + z + 1 = 0$ ;  $2x - y + z - 1 = 0$ ,  $x + y - z + 1 = 0$  і паралельні площини  $x + y + z = 0$ .

### Залікове завдання. Пряма та площина у просторі

#### Варіант № 24

1. Знайдіть площину, в якій лежать прямі:  $2x + 3y - z - 1 = 0$ ,  $x + y - 3z = 0$  і  $x + 5y + 4z - 3 = 0$ ,  $x + 2y + 2z - 1 = 0$ .
2. Знайдіть площину, яка розташована між площинами  $x - 2y + z - 2 = 0$ ,  $x - 2y + z - 6 = 0$  і ділить відстань між ними у відношенні 1:3.
3. Знайдіть бісектриси кутів між прямими  $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{1}$  і  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{3}$ .
4. Знайдіть рівняння прямої, що лежить у площині  $y + 2z = 0$  і перетинає прямі  $x = 1 - t$ ,  $y = t$ ,  $z = 4t$  і  $x = 2 - t$ ,  $y = 4 + 2t$ ,  $z = 1$ .
5. Знайдіть відстань між прямими  $x = y = z$  і  $x - 1 = 0$ ,  $y - 2 = 0$ .