

Взаимное расположение двух плоскостей в A^n

Пусть

$$\pi^k: \vec{r} = \vec{r}_1 + \sum_{i=1}^k t^i \vec{a}_i$$

– k -мерная плоскость в A^n . Точка M_1 с радиусом-вектором $\vec{r}_1$ называется *начальной точкой* плоскости π^k . Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – линейно независимы, а $t_1, \dots, t_k$ – произвольные параметры. Это означает, что уравнение плоскости π^k можно записать в виде

$$\pi^k: \vec{r} = \vec{r}_1 + \text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$$

или еще короче

$$\pi^k: \vec{r} = \vec{r}_1 + L^k,$$

где $L^k = \text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ называется *направляющим подпространством* плоскости π^k .

Пусть

$$\pi^k: \vec{r} = \vec{r}_1 + L^k, \quad \pi^l: \vec{r} = \vec{r}_2 + L^l$$

две плоскости в A^n , причем $k \leq l$ для определенности.

Плоскости π^k и π^l называются *параллельными* ($\pi^k \parallel \pi^l$), если $L^k \subseteq L^l$. Две плоскости π^k и π^l в A^n называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Положим

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad L^m = L^k \cap L^l, \quad L^s = L^k + L^l.$$

Существуют плоскости Π_1^s и Π_2^s такие, что $\Pi_1^s \supset \pi^k$, $\Pi_2^s \supset \pi^l$ и такие, что $\Pi_1^s \parallel \Pi_2^s$. Действительно, пусть $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ – базис L^m . Дополним $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ до базисов в L^k и L^l :

$$\begin{aligned} L^k: & \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \\ L^l: & \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l. \end{aligned}$$

Тогда $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l$ – базис в L^s . Рассмотрим две плоскости:

$$\begin{aligned} \Pi_1^s: \vec{r} &= \vec{r}_1 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \\ & \vec{r}_1 + L^s = \vec{r}_1 + L^m \oplus L^{k-m} \oplus L^{l-m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^s: \vec{r} &= \vec{r}_2 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \\ & \vec{r}_2 + L^s = \vec{r}_2 + L^m \oplus L^{k-m} \oplus L^{l-m}, \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Pi_1^s \parallel \Pi_2^s$ (направляющие пространства совпадают). При этом $\Pi_1^s \supset \pi^k$, а $\Pi_2^s \supset \pi^l$. Возможны следующие варианты.

- $\vec{w} \notin L^s$. Тогда $\Pi_1^s \parallel \Pi_2^s$ и $\Pi_1^s \cap \Pi_2^s = \emptyset$. Действительно, общая точка плоскостей Π_1^s и Π_2^s определяется из условия

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \\ \vec{r}_2 + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) \end{aligned}$$

Здесь и далее л.к. $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l)$ означает линейную комбинацию. Но тогда

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l),$$

то есть, $\vec{w} \in L^s$. Противоречие. Следовательно, и $\pi^k \cap \pi^l = \emptyset$. При этом может случиться, что $m = k$. Тогда $L^k \subset L^l$, а значит плоскости $\pi^k \parallel \pi^l$.

- $\vec{w} \in L^s$. Тогда

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l),$$

то есть

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l)$$

Теперь уравнения плоскостей можно выписать с *общей начальной точкой*

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k).$$

А именно

$$\begin{aligned} \pi^l: \vec{r} &= \vec{r}_2 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \\ &= \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \\ &= \vec{r}_0 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^k: \vec{r} &= \vec{r}_1 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) = \\ &= \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) = \\ &= \vec{r}_0 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l). \end{aligned}$$

То есть

$$\pi^k: \vec{r} = \vec{r}_0 + L^m \oplus L^{k-m}, \quad \pi^l: \vec{r} = \vec{r}_0 + L^m \oplus L^{l-m}.$$

Если случится что $m = k$, то $\pi^k \subset \pi^l$. Если же $m < k$, то $\pi^k \cap \pi^l = \pi^m$, причем

$$\pi^m: \vec{r} = \vec{r}_0 + L^m.$$

Практический способ выяснения взаимного размещения плоскостей в A^n

Пусть подпространства $L^k \subset A^n$ и $L^l \subset A^n$ ($k \leq l$) заданы своими базисами:

$$L^k = \text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k), \quad L^l = \text{Lin}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l).$$

Построение базиса суммы подпространств

Пусть

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ \vdots \\ b_1^n \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ \vdots \\ b_2^n \end{pmatrix}, \dots, \vec{b}_l = \begin{pmatrix} b_l^1 \\ \vdots \\ b_l^n \end{pmatrix}$$

векторы базисов L^k и L^l соответственно. Сформируем из их координат (как из столбцов) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_k^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_l^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_l^n \end{pmatrix},$$

Напомним, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы, а это число равно, в свою очередь, максимальному размеру минора матрицы, отличному от нуля. Ясно, что $rg(A) = k$. Составим матрицу

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_l^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_l^n \end{array} \right)$$

Последовательное добавление к столбцам матрицы A столбцов матрицы B , увеличивающих на каждом шаге ранг матрицы $(A|B)$ дает в конечном итоге максимальную линейно независимую систему векторов в сумме пространств $L^k + L^l$. Таким образом,

$$\dim(L^k + L^l) = rg(A|B),$$

а базис суммы образуют столбцы, которые отвечают базисному минору матрицы $(A|B)$.

Построение базиса пересечения подпространств

Пусть $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_{j_1}, \dots, \vec{b}_{j_{s-k}}\}$ базис $L^k + L^l$. Перенумеруем векторы так, чтобы базис $L^k + L^l$ принял вид:

$$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}\}.$$

С практической точки зрения это сводится к перестановке столбцов матрицы B так, чтобы в первых столбцах стояли векторы из базиса суммы подпространств. Тогда $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ – базис L^k , $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}, \vec{b}_{s-k+1}, \dots, \vec{b}_l\}$ – базис L^l .

При этом векторы $\{\vec{b}_{s-k+1}, \dots, \vec{b}_l\}$ линейно выражаются через векторы базиса суммы. То есть,

$$\vec{b}_{s-k+1}, \dots, \vec{b}_l \in Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}).$$

Найдем соответствующие линейные комбинации как решения $l + k - s = m$ систем линейных уравнений. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\vec{b}_{s-k+1} &= \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}), \\ \dots &\dots \dots \\ \vec{b}_l &= \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}).\end{aligned}$$

Разобьем полученные выражения так:

$$\begin{aligned}\vec{b}_{s-k+1} - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) &= \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k), \\ \dots &\dots \dots \\ \vec{b}_l - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) &= \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)\end{aligned}$$

и заметим, что левые части равенств лежат в L^l как линейные комбинации векторов базиса L^l , а правые части лежат в L^k по аналогичной причине. Поэтому векторы

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &:= \vec{b}_{s-k+1} - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) = \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k), \\ \dots &\dots \dots \\ \vec{q}_m &:= \vec{b}_l - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) = \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)\end{aligned}$$

лежат в $L^k \cap L^l$. Покажем, что $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ — линейно независимы. Действительно,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{q}_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{b}_{s-k+i} + \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) = \vec{0}$$

и следовательно $\lambda^i = 0$, так как $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$ — базис L^l . Таким образом, $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ — линейно независимы, лежат в пересечении подпространств и их количество равно размерности пересечения. Поэтому найденные векторы образуют искомый базис.

Описанный процесс реализуется алгебраически следующим образом. Составим матрицу

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & b_{s-k+1}^1 & \dots & b_l^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & b_{s-k+1}^n & \dots & b_l^n \end{array} \right)$$

первые s столбцов которой являются векторами базиса суммы. Для каждого последующего столбца найдем решение системы уравнений с этим столбцом в качестве столбца правых частей. Если для столбца с номером $s - k + i$ набор чисел $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^k; \mu_i^1, \dots, \mu_i^{s-k}$ есть решение, а именно,

$$\vec{b}_{s-k+i} = \lambda_i^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_i^k \vec{a}_k + \mu_i^1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_i^{s-k} \vec{b}_{s-k},$$

то

$$\vec{q}_i = \vec{b}_{s-k+i} - \mu_i^1 \vec{b}_1 - \dots - \mu_i^{s-k} \vec{b}_{s-k} = \lambda_i^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_i^k \vec{a}_k.$$

составляют набор векторов базиса пересечения подпространств.

Выяснение взаимного размещения плоскостей

Пусть

$$\begin{aligned}\pi^k: \vec{r} &= \vec{r}_1 + \text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \vec{r}_1 + L^k, \\ \pi^l: \vec{r} &= \vec{r}_2 + \text{Lin}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l) = \vec{r}_2 + L^l.\end{aligned}$$

Найдем базисы $L^k + L^l$ и $L^k \cap L^l$. Пусть это будут векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}$ и $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$. Вектор $\vec{w} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ принадлежит $L^k + L^l$ тогда и только тогда, когда имеет решение система:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & w^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & w^n \end{array} \right).$$

Пусть система имеет решение, то есть

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k + \mu_1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_{s-k} \vec{b}_{s-k},$$

тогда общая точка плоскостей находится как

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$$

и уравнение плоскости пересечения примет вид

$$\pi^m: \vec{r} = \vec{r}_0 + \text{Lin}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) = \vec{r}_0 + L^m.$$

Если же система решений не имеет, то плоскости скрещиваются с направлением частичной параллельности L^m

Проиллюстрируем вышеизложенное на примере. Пусть заданы две двумерные плоскости

$$\pi_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \text{Lin}(\vec{a}_1, \vec{a}_2), \quad \pi_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \text{Lin}(\vec{b}_1, \vec{b}_2),$$

где

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \vec{b}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Найдем вектор $\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и составим матрицу $(A|B|w)$. Это позволит нам

одновременно найти базис суммы, пересечения направляющих подпространств, а так

же установить расположение вектора $\vec{w}$. Используем метод Гаусса исключения неизвестных и воспользуемся равенствами столбцевого и строчного рангов для выделения векторов базиса суммы подпространств. А именно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & | & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & | & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, базис суммы составляют векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1$ и вектор $\vec{w} \in L_1^2 + L_2^2$ (теорема Кронеккера-Капелли). Найдем базис пересечения. Для этого находим решение системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Система рассматривается относительно коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ в разложении $\vec{b}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \mu_1 \vec{b}_1$, то есть

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 = 1, \\ -\lambda_2 - 2\mu_1 = 1, \\ -\mu_1 = 1. \end{cases}$$

В данном случае нам достаточно найти лишь $\mu_1 = -1$, так как $\vec{q}_1 = \vec{b}_2 - \mu_1 \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вектор $\vec{q}_1$ — направляющий вектор пересечения $L_1^2 \cap L_2^2$.

Найдем общую точку заданных плоскостей. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

которая описывает разложение вектора $\vec{w}$ по базису суммы подпространств, а именно $\vec{w} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \mu_1 \vec{b}_1$. В развернутом виде имеем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 = 1, \\ -\lambda_2 - 2\mu_1 = -3, \\ -\mu_1 = -2. \end{cases}.$$

Ее решение $\mu_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = 0$. Следовательно,

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим уравнение линии пересечения:

$$\pi_1 \cap \pi_2: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{q}_1$$

или в координатах

$$\begin{cases} x^1 = 0 + 2t, \\ x^2 = 1 + 3t, \\ x^3 = 0 + t, \\ x^4 = 1 + t. \end{cases}$$

Переход от параметрического уравнения к общему уравнению k - плоскости в R^n

Пусть задана плоскость

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + L^k = \vec{r}_1 + Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k).$$

Общее уравнение плоскости получается сдвижкой в точку $\vec{r}_1$ неявного уравнения направляющего пространства L^k . Это уравнение можно получить из простого соображения: Вектор $\vec{X}$ лежит в направляющем пространстве тогда и только тогда, когда он раскладывается по базису $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$. То есть, когда ранг расширенной матрицы $(A|X)$ равен рангу матрицы A , составленной по столбцам из координат векторов базиса. Приводя систему $(A|X)$ к базисному минору методом Гаусса, против нулевых строк в матрице A находим уравнения на координаты вектора $\vec{X}$, определяющие уравнение направляющего пространства.

Например, пусть

$$\vec{r}_0 = \{1, -2, -3, 1\}, \quad \vec{a}_1 = \{1, 1, 0, 0\}, \quad \vec{a}_2 = \{0, 1, 1, 0\}, \quad \vec{a}_3 = \{0, 0, 1, 1\}.$$

Положим $\vec{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Составим матрицу

$$[A, X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

Ее ранг должен быть равен 3, поэтому 4 - я строка в матрице A обнулится при помощи элементарных преобразований. А именно,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_3 + x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Отсюда находим уравнение на направляющее пространство:

$$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 = 0.$$

Тогда уравнение аффинной плоскости будет иметь вид

$$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 + D = 0$$

Подставляя координаты начальной точки, находим недостающий параметр

$$-D = 1 - (-3) + (-2) - 1 = 1.$$

Таким образом, уравнение плоскости получает вид

$$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 - 1 = 0.$$