

Варіант 1

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(3)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H = SO(3)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. пункту є ортонормованим. Обчислити секційну кривину $K(e_4, e_5)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_4, e_5 .

Варіант 2

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 & 0 \\ 0 & bi & c + di \\ 0 & -c + di & ei \end{pmatrix},$$

де $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H = U(1) \times U(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_6, e_7)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_6, e_7 .

Варіант 3

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2, 1)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис e_1, e_2, e_3 алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1 є базисом $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = O(2, 1)^0$, $H = SO(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_2, e_3)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_2, e_3 .

Варіант 4

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H = SO(2) \times SO(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_3, e_4)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_3, e_4 .

Варіант 5

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 \\ 0 & bi \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис e_1, e_2, e_3, e_4 алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(2)$, $H = U(1) \times U(1)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_3, e_4)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_3, e_4 .

Варіант 6

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2, 2)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = O(2, 2)^0$, $H = SO(2) \times SO(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_3, e_4)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_3, e_4 .

Варіант 7

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(1, 2)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис e_1, e_2, e_3 алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1 є базисом $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = O(1, 2)^0$, $H = SO(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_2, e_3)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_2, e_3 .

Варіант 8

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b + ci & 0 \\ -b + ci & di & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3, e_4 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H = U(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_5, e_6)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_5, e_6 .

Варіант 9

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(3, 1)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(3)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ -c & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = O(3, 1)^0$, $H = SO(3)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_4, e_5)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_4, e_5 .

Варіант 10

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{su}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 \\ -b+ci & -ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SU(3)$, $H = SU(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_4, e_5)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_4, e_5 .

Варіант 11

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1, 1) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) | AI_{1,1} + I_{1,1}\overline{A}^T = 0\}$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 \\ 0 & bi \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис e_1, e_2, e_3, e_4 алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(1, 1)$, $H = U(1) \times U(1)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_3, e_4)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_3, e_4 .

Варіант 12

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{su}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 \\ -b+ci & -ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\text{Tr}(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H = U(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_4, e_5)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_4, e_5 .

Варіант 13

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(3)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = O(1, 3)^0$, $H = SO(3)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_4, e_5)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_4, e_5 .

Варіант 14

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2, 1) = \{A \in Mat(3, \mathbb{C}) | AI_{2,1} + I_{2,1}\bar{A}^T = 0\}$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b + ci & 0 \\ -b + ci & di & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно псевдоевклідового інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3, e_4 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H = U(2)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_5, e_6)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_5, e_6 .

Варіант 15

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 \\ 0 & -ai \end{pmatrix},$$

де $a \in \mathbb{R}$

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис e_1, e_2, e_3 алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1 є базисом $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(2)$, $H = U(1) \times U(1)$ – зв’язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $K(e_2, e_3)$ простору G/H в напрямі площини, що породжена e_2, e_3 .