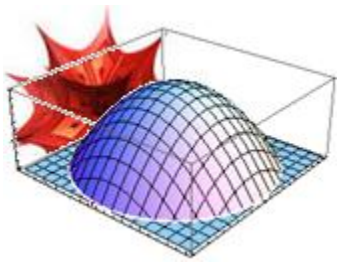


Доля ПетроГригорович,
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна

Антоненко Галина Михайлівна,
Харківський національний університет Повітряних Сил
імені Івана Кожедуба
2017 р.

Розв'язання задач вищої математики на комп'ютері.

Використання системи Mathematica.

Посібник призначений для первісного знайомства з можливостями комп'ютерної системи символьних обчислень *Mathematica.* Розглянуті основні правила роботи в середовищі, методи і способи розв'язання задач з елементарної та вищої математики, значна частина присвячена геометричним побудовам. Наведено багато прикладів, які ілюструють можливості пакету з розв'язання задач з таких галузей, як геометрія, лінійна алгебра, векторний аналіз, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння та деяких інших.

Умови задач та прикладів взяті з типових підручників. Задачі розподілені за темами і розглядаються в послідовності, в якій вони вивчаються за програмами ВНЗ. Розв'язання супроводжуються коментарями і виведенням проміжних результатів. Навчальний посібник можна розглядати як доповнення до навчальних курсів вищої математики, і може бути початком знайомства слухачів з методами математичного моделювання природничих та соціально–економічних процессів на комп'ютері.

Зміст

1. Вступ. Операції та типи даних 3
2. Алгебраїчні обчислення. 13
3. Елементи лінійної алгебри. 19
   3.1 Вектори, матриці та визначники. 19
   3.2 Системи лінійних рівнянь. 32
4. Функції та графіки. 36
5. Геометричні побудови. 45
6. Диференціальне числення. 51
   6.1 Обчислення границь 51
   6.2 Похідні та їх застосування 53
7. Інтегральне числення 65
   7.1 Невизначений інтеграл 65
   7.2 Визначений інтеграл. 68
   7.3 Кратні інтеграли. 72
   7.4 Застосування інтегрального числення. 76
8. Диференціальні рівняння. 91
   8.1 Окремі види диференціальних рівнянь. 91
   8.2 Використання функції DSolve. 99
9. Ряди. 109
   9.1 Числові ряди. 109
   9.2 Степеневі ряди та ряд Тейлора. 115
   9.3 Ряди Фур'є. 120
Завершення. 126
Література 127

1. Вступ. Операції та типи даних

Після запуску пакету *Mathematica* ви побачите стандартне меню програми, чисте вікно документа і, можливо, панель спеціальних символів справа.

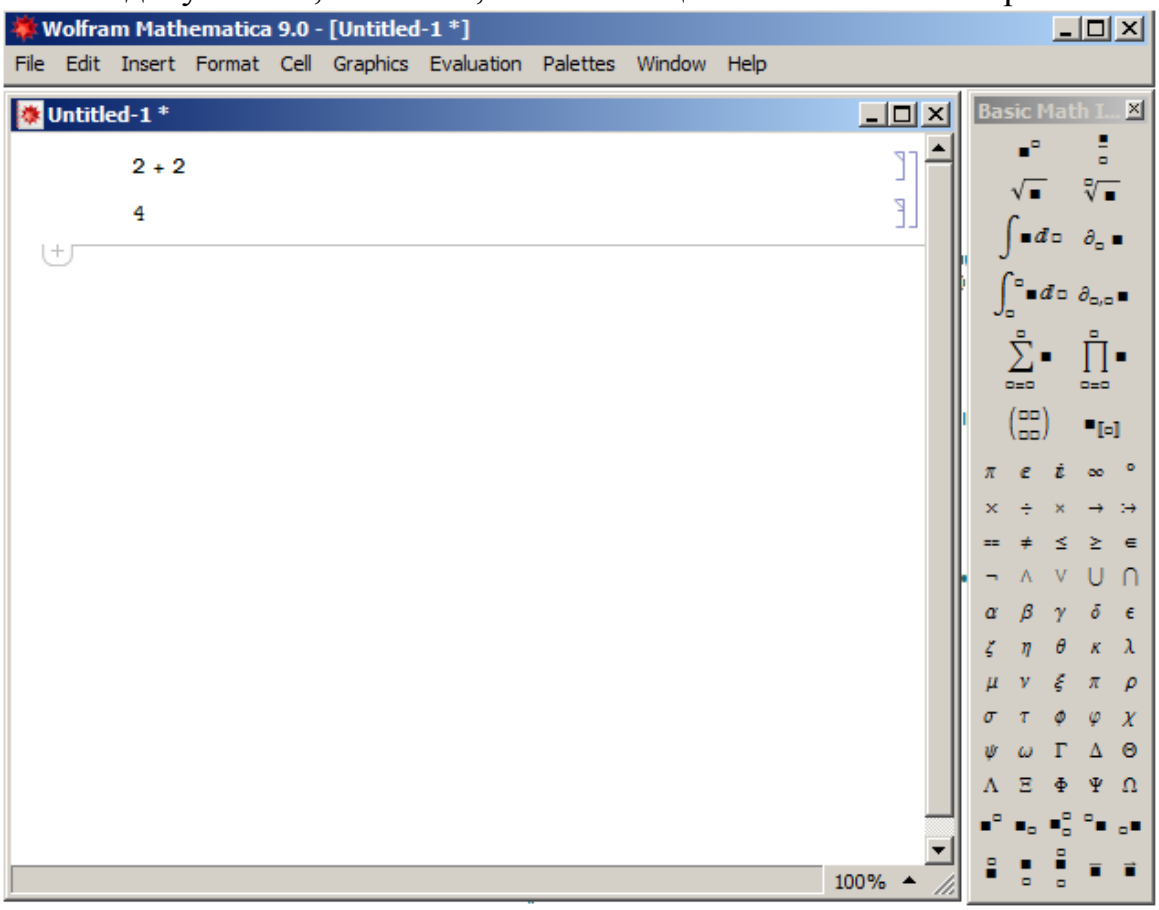


Рис. 1.1 Зовнішній вигляд вікна програми Mathematica.

Наберіть у вікні документа: **2+2** та використайте комбінацію клавіш **Shift-Enter** для того, щоб *Mathematica* почала обчислення. Ви побачите:

```
In[1]:= 2 + 2
Out[1]:=4
```

У вікні справа від введеного тексту з'являться квадратні дужки, які ідентифікують розділи документа (секції). Віднесіться до них як до розмітки листів паперу, на яких ви робите математичні викладки. Якщо ви бажаєте виконати обчислення даної секції, курсор миші повинен знаходитися в її межах. Символи, які стоять зліва, `In[1]:=` та `Out[1]:=` позначають та нумерують вхідні та вихідні секції документа. Їх наявність або відсутність залежить від налаштувань програми. На рис. 1.1 їх немає.

У наступних розділах посібника інструкції, набранні шрифтом формульного редактора **Math Type – Bold**, ви можете вводити у вікні документа та виконувати шляхом натискування комбинації клавіш **Shift-Enter**.

Нижче наведені приклади виконання математичних операцій, які містять різноманітні знаки (символи) операцій. Уводьте інструкції в `In` секціях та натискайте комбінацію клавіш **Shift-Enter**. Результат обчислення відобразиться у `Out` секціях. Ми не будемо наводити значки `In` вхідних та `Out` вихідних секцій. У нашому посібникові ці секції розрізняються шрифтом.

1. * (символ «зірочка») означає множення.

34 * 89

3026

34*89 це 34 помножити на 89.

2. / (символ «слеш») означає ділення.

34/89

$$\frac{34}{89}$$

34/89 це 34 поділити на 89. Результат автоматично не приводиться до десяткового вигляду

3. ^ (символ «капелюшок») означає піднесення до степеня.

2^3

8

2^3 це 2 у третьому степені.

4. Пробіл може служити для позначення множення: **34 89** це теж саме, що і **34*89** (іноді система автоматично між множниками замість пробілу ставить символ ×). Часто пробіли нічого не означають; **Sin[x]** і **Sin [x]** це теж саме, що і **Sin[x]**.

Ось короткий перелік основних математичних позначень, що використовується у системі *Mathematica*:

- ( ) – (круглі дужки) служать для вказання порядку обчислень: $(x+3)/x$ це $x+3$ поділене на x. Не використовуйте квадратні або фігурні дужки для вказання порядку обчислень.
- [ ] – (квадратні дужки) використовують для вказання аргументів функцій; **Sin[x]** – це синус від x. Якщо написати **Sin(x)**, то цю операцію неможливо виконати.
- { } – (фігурні дужки) позначають список; {1,2,3,4} – це список з чотирьох чисел. У системі *Mathematica* фігурні дужки можуть позначати вектор або матрицю.
- ! – (знак оклику) означає факторіал; **5!** це п'ять факторіал.
- = – (дорівнює) означає присвоєння; $a=5$ це a присвоїти 5. Значення змінних, присвоєні або обчислені в одній секції, доступні в інших секціях.
- == – (дорівнює, дорівнює) перевірка на рівність; $a==5$ повертає True (ІСТИНА), якщо a дорівнює 5.
- != – (знак оклику, дорівнює) перевірка на нерівність; $a!=5$ повертає True, якщо a не дорівнює 5.
- <, <=, >, >= позначають нерівності.

Набрана формула, як правило, не закінчується ніяким символом. У цьому випадку результат обчислення буде відображатися у вікні документа. Якщо ви бажаєте виконати обчислення, а результат не виводити в документ, то завершуйте такі формули точкою з комою.

Основою пакета є символьні обчислення. *Mathematica* вміє виконувати алгебраїчні перетворення, розв'язувати рівняння та їх системи, а також має можливість виконувати багато інших видів обчислень.

Mathematica може виконати алгебраїчну операцію, де відповідь не просто число. Наприклад, вона може спрощувати вирази.

27x + 8x

```
35x
```

Вона може у виразі розкрити дужки.

Expand[(a + b)^3]

$a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$

Тут функція `Expand[...]` розкриває у виразі дужки. Навпаки, *Mathematica* може вираз розкласти на множники.

Factor[x^2 − 6 * x + 8]

```
(-4 + x) (-2 + x)
```

Щоб над виразом виконати математичні перетворення потрібно використовувати спеціальні функції, такі як `Expand[...]` або `Factor[...]`. Власне знайомство з пакетом *Mathematica* і полягає у вивченні таких функцій.

Mathematica може виконувати дії з дробами і, приводячи їх до спільного знаменника, отримувати точну відповідь.

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

$\frac{11}{15}$

Для вводу останнього виразу ми використали трафарет дробу на панелі спеціальних символів, однак можна було б написати просто `1/3+2/5`.

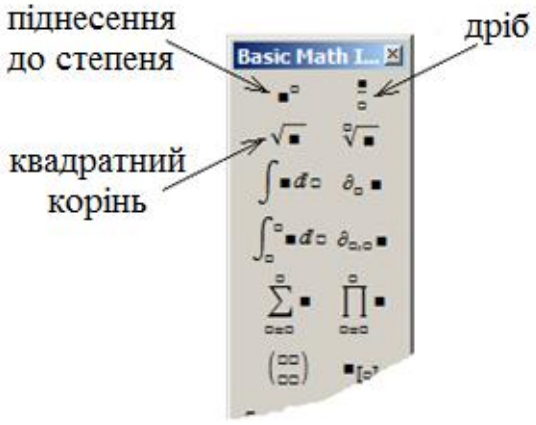


Рис. 1.2 Панель спеціальних символів Basic Math Input.

Панель спеціальних символів використовується для вводу виразів, які незручно вводити з клавіатури. Зазвичай вона розташована справа від вікна вводу. Але якщо на екрані ви її не бачите, то відобразити її можна через меню: `Palettes – Other – Basic Math Input`.

Основний принцип *Mathematica* – не робити жодних наближень, окрім затребуваних. Так вираз

$\frac{11}{15}$

не приводиться до десяткового вигляду до тих пір, доки ви не виконаєте спеціальну команду. Якщо ви бажаєте отримати чисельне наближення, то використовуйте функцію **N**.

$$\mathbf{N}[\mathbf{11/15}]$$

```
0.73333333
```

Функція **N[…]** може мати два аргумента. Іншим необов'язковим аргументом можна задати точність результату (кількість цифр).

$$\mathbf{N}[\mathbf{11/15, 40}]$$

```
0.7333333333333333333333333333333333333333
```

$$\mathbf{N}[\boldsymbol{\pi}, \mathbf{40}]$$

```
3.1415926535897932384626433832795028841971
```

Тут букву $\boldsymbol{\pi}$ потрібно ввести з панелі спеціальних символів, або можна ввести просто Pi.

Однак, якщо хоча б одне з чисел задано з десятковою точкою, то результат буде наближеним.

$$\mathbf{11.0/15}$$

```
0.73333333
```

Для запам'ятовування результатів обчислень зручно використовувати змінні. При визначенні змінної використовується знак рівності. Зліва від знака дорівнює стоїть ім'я змінної, а справа – її значення або вираз для обчислення.

$$\boldsymbol{a = 5^3 + 4\frac{12 + 2^5}{2^4}}$$

```
136
```

Таку змінну можна використовувати у різних виразах:

$$\boldsymbol{a + 7}$$

```
143
```

$$\boldsymbol{(a - 130)^3}$$

```
216
```

Змінна може містити будь-який тип даних – число, символ, список, матрицю, функцію, текст, графічний фрагмент та ін. Для роботи з нею можна використовувати будь-які допустимі для такого типу даних функції. Наприклад, будь-яке ім'я, що не містить значення, інтерпретується системою як ідентифікатор (замінник) числа і для роботи з ним використовуються алгебраїчні функції. Будь-який набір імен можна чергувати знаками арифметичних операцій і виконувати над ним стандартні алгебраїчні перетворення.

Особливе значення має операція присвоювання. В системі є дві операції: « = » – безпосереднє присвоювання і « := » – відкладене присвоювання. У виразі `name=expr` відбувається обчислення правої частини виразу `expr` і відразу ж результат присвоюється змінній `name`. Обчислення правої частини `expr` виразу відкладеного присвоювання `name:=expr` виконується в час, коли знадобилося значення лівої частини, тобто тоді, коли `name` знадобилося для виводу або обчислення.

Окрім присвоювання, вам, навпаки, іноді знадобиться видаляти імена змінних. Для цього використовується функція `Remove[x]`. Вона видаляє з робочого простору системи символ *x* так, що його ім'я більше не розпізнається системою, зокрема, не розпізнається тип змінної. Функція `Clear[x]` очищає значення символу *x*. Видалити значення однієї змінної можна командою `x=.` (*x* присвоїти точку), а функціям `Remove` та `Clear` можна передавати імена декількох змінних, які перелічуються через кому. Наприклад,

```
x = 3; f = 1; {x, f}
{3,1}
Clear[x, f]; {x, f}
{x,f}
```

Якщо довжина формули більша за ширину вікна документа, то система автоматично виконає перенесення частини формули на наступний рядок. Жодних спеціальних знаків продовження рядка не використовується.

Всі вбудовані в *Mathematica* імена функцій починаються з великої букви (`Sin`, `Log`, `Expand`, `Factor` та ін.) Ви повинні писати ці імена так, як показано, або код не буде працювати. Аргументи функцій заключають у квадратні дужки, а не круглі (`Sin[x]`). Якщо ви бажаєте отримати правильну відповідь, не використовуйте `Sin(x)` або `sin(x)`, або `sin[x]`, ви повинні використовувати тільки `Sin[x]`. Наведемо позначення деяких основних елементарних функцій: `Sin[x]`, `Cos[x]`, `Tan[x]` (тангенс), `ArcSin[x]`, `ArcCos[x]`, `ArcTan[x]` (арктангенс), `Log[x]` ($\ln x$ – натуральний логарифм), `Log10[x]` ($\lg x$ – десятковий логарифм), `Exp[x]` (e^x – експонента), `Sqrt[x]` ($\sqrt{x}$ – корінь квадратний), `Sinh[x]` ($(e^x - e^{-x})/2$ – синус гіперболічний), `Cosh[x]` ($(e^x + e^{-x})/2$ – косинус гіперболічний).

Можна створювати свої функції. При визначенні функції необхідно використовувати підкреслені символи після кожного імені аргументу у лівій частині і знак присвоювання = або відкладеного присвоювання `:=`. Справа від цього знака повинен стояти вираз для обчислення значення функції.

```
f[x_] := x^2
```

Зверніть увагу на символ підкреслювання в лівій частині. Він обов'язковий!

Функцію можна викликати з різними типами аргументів, наприклад, з числовим аргументом

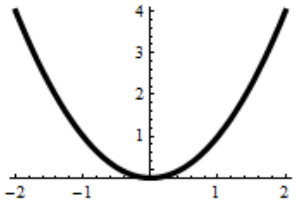
```
f[5]
25
```

Можна використовувати функцію також з символьним виразом у якості аргументу:

```
f[c + b]
(b + c)^2
```

Можна побудувати графік функції. Наберіть точно таку команду, и ви отримаєте аналогічний рисунок.

Plot$[f[x],\{x,-2,2\}]$



У пакеті *Mathematica* немає векторів і матриць, але є списки, які їх заміняють. Будь-який набір елементів, взятий у фігурні дужки є списком.

До списку можна додати число. В цьому випадку число додається до кожного елемента списку.

5 + {10, 20, 30, 40}

```
{15,25,35,45}
```

Список можна помножити на число.

5 * {10, 20, 30, 40}

```
{50,100,150,200}
```

В цьому випадку кожний елемент списку множиться на відповідне число. Можна піднести до квадрату кожний елемент списку.

{10, 20, 30, 40}^2

```
{100,400,900,1600}
```

Зазначимо, що піднесення до степеня можна виконувати за допомогою операції **^** (капелюшок), з використанням спеціального трафарету □■ панелі спеціальних символів (рис. 1.2), або можна ввести комбінацією клавіш **Ctrl - ^** (**Ctrl –** капелюшок).

Там, де може стояти число або змінна може стояти список.

Sin $\left[\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}\right]$

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right\}$$

Тут функція `Sin` застосовується до кожного елемента списку, а результати обчислень також повертаються у вигляді списку.

Можна скласти (або відняти) поелементно два списки. В цьому випадку списки повинні мати однакову кількість елементів.

{10, 20, 30, 40} + {100, 200, 300, 400}

```
{110,220,330,440}
```

Можна помножити поелементно два списки. Це множення не є скалярним добутком.

{10, 20, 30, 40} * {100, 200, 300, 400}

```
{1000,4000,9000,16000}
```

Для отримання одного елемента списку використовуються подвійні квадратні дужки, в середині яких вказується номер (індекс) елемента списку.

L = {10, 20, 30, 40, 50, 60};

L[[3]]

```
30
```

Елементами списку можуть бути інші списки. Список, який складається із списків, які мають однакову кількість елементів, заміняє матрицю (таблицю чисел). Наприклад,

$\mathbf{A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}}$;

Однак у такому вигляді з матрицями незручно працювати. Щоб зобразити список списків у матричному вигляді можна використати функцію `MatrixForm`.

MatrixForm[**A**]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

В пакеті *Mathematica* є можливість префіксного (перед аргументом) або постфіксного (після аргументу) використання імені функції однієї змінної. Якщо ім'я функції стоїть попереду аргументу, то він береться у квадратні дужки, наприклад, `Sin[Pi/4]`. Якщо ім'я функції стоїть після аргументу, то аргумент відокремлюється від нього подвійною косою рискою, наприклад, `Pi/4//Sin`. Обидва способи повертають однаковий результат $1/\sqrt{2}$.

Функція `MatrixForm` показує списки списків у матричному вигляді. Її зручно використовувати в постфіксній нотації. Порівняйте:

A // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Таким чином, запис `{{a,b},{c,d}}//MatrixForm` означає застосування функції `MatrixForm` до списку`{{a,b},{c,d}}`.

{{a, b}, {c, d}} // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Аналогічно, щоб побачити список списків у вигляді таблиці (без круглих дужок), можна використати функцію `TableForm`. Її також зручно використовувати в постфіксній нотації. Порівняйте:

TableForm[{{**a, b**}, {**c, d**}}]

або

{{a, b}, {c, d}} // TableForm

$a \quad b$

$c \quad d$

Списки можна об'єднувати (пристикувати один список до іншого)

Join[{**a, b**}, {**1, 2**}]

```
{a, b, 1, 2}
```

або

Join[{**a, b**}, {**1, 2**}]**// MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тут об'єднання виконувалось за першим (та єдиним) індексом, обох списків. Але для двовимірних списків об'єднання можна виконувати за будь-яким з них.

При цьому номер індексу (1 або 2) вказується додатковим (останнім) аргументом функції Join.

Join[{{a, b}, {c, d}}, {{1, 2}, {3, 4}}, 1] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

За замовчуванням об'єднання списків виконується за першим індексом. Тому в попередній команді одиницю можна було не вказувати.

У наступній інструкції об'єднання двовимірних списків (матриць) виконується за другим індексом

Join[{{a, b}, {c, d}}, {{1, 2}, {3, 4}}, 2] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 2 \\ c & d & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ми вже зазначали, що подвійні квадратні дужки означають вибір елемента зі списку. З їх допомогою можна також отримати частину списку (проміжок).

L = {10, 20, 30, 40, 50, 60};

L[[2;;4]]

```
{20, 30, 40}
```

Тут пара символів `';;'` (дві точки з комою) означає вибір діапазону. Якщо треба вибрати весь діапазон від початку до кінця, то можна ввести слово All. Це корисно при роботі з індексами двовимірних списків. Наприклад, нехай дана матриця

M = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}};

M // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Вибрати з неї матрицю, яка складається з другого та третього рядків, можна наступною інструкцією

M[[2 ;; 3, All]] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Існують різноманітні функції для генерування списків. Основною з них є функція Table. Наприклад, наступною командою створюється список з квадратів цілих чисел:

Table[n^2, {n, 1, 10}]

```
{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100}
```

Перший аргумент функції Table – вираз для формування елементів списку. Другий аргумент - «ітераційна специфікація». Тут вона означає, що n змінюється від 1 до 10 з кроком 1. Ви можете змінити розмір кроку, додавши четвертий параметр у список:

Table[n^2, {n, 1, 10, 1/2}]

Можна створювати список символьних виразів.

$\mathbf{Table}[\mathbf{Expand}[(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}],\{\boldsymbol{n},\mathbf{1},\mathbf{3}\}]$

$\{1+x, 1+2x+x^2, 1+3x+3x^2+x^3\}$

Можна створювати список списків. Наприклад,

$\mathbf{Table}[\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}},\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}},\boldsymbol{n}^{\mathbf{4}}\},\{\boldsymbol{n},\mathbf{1},\mathbf{3}\}]$

```
{{1,1,1,1},{2,4,8,16},{3,9,27,81}}
```

або

$\mathbf{Table}[\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{a}},\{\boldsymbol{n},\mathbf{2},\mathbf{4}\},\{\boldsymbol{a},\mathbf{1},\mathbf{4}\}]$

```
{{2,4,8,16},{3,9,27,81},{4,16,64,256}}
```

В такому форматі перший аргумент функції `Table` також є виразом, який визначає елементи списку. Другий аргумент – «повільний» ітератор (змінюється при переході від одного внутрішнього списку до іншого). Третій аргумент – «швидкий» ітератор (змінюється при переході від елемента до елемента кожного внутрішнього списку).

Багато спеціальних символів, для яких немає відповідних клавіш на клавіатурі, можна ввести, використовуючи панель спеціальних символів, яка зазвичай розміщена справа від вікна документа (рис. 1.1). Вона дозволяє вводити математичні формули у вигляді близькому до природного математичного запису. Існують і інші панелі. Вивести панель на екран можна з меню `Palettes`, в якому обрати ім'я – назву однієї з панелей. Панель спеціальних символів, яка показана на рис. 1.1 справа та на рис. 1.2, має ім'я `Basic Math Input` і викликається з меню `Palettes – Other – Basic Math Input`.

У пакеті *Mathematica* ви можете використовувати будь-які знайомі вам з алгебри типи даних: цілі числа, раціональні, ірраціональні, комплексні. З основними з них ви познайомилися вище. Залишилося показати, як працювати з комплексними числами.

Для наступної інструкції символ уявної одиниці $\boldsymbol{i}$ візьміть з панелі спеціальних символів

$(\mathbf{2}+\mathbb{i})(\mathbf{10}-\mathbb{i})$

$21+8\mathbb{i}$

Для вводу комплексних чисел можна використовувати стандартні позначення, використовуючи для уявної одиниці символ I (прописна буква I) або спеціальний символ $\mathbb{i}$, який можна ввести послідовною комбінацією клавіш **`Esc – i – i – Ecs`** (два рази символ $\boldsymbol{i}$), а також з панелі спецсимволів. Знаки арифметичних операцій використовують ті ж, що і для дійсних чисел.

$\boldsymbol{a}=\mathbf{2}+\boldsymbol{I};\boldsymbol{b}=\mathbf{3}-\boldsymbol{I};\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$

$7+\mathbb{i}$

$\frac{1}{2}+\frac{\mathbb{i}}{2}$

Нагадаємо, що точка з комою в кінці виразу відміняє відображення результатів роботи інструкції у вікні документа. Тому значення змінних a і b при виводі не повторюються.

Функції `Re[z]` та `Im[z]` обчислюють дійсну та уявну частину комплексного числа `z`.

$\boldsymbol{a = 2 + I; b = 3 - I; c = a * b}$

$\boldsymbol{z = a + b * c - c/a}$

$21 - 2\,i$

$\mathbf{Re}[\boldsymbol{z}]$

$\mathbf{Im}[\boldsymbol{z}]$

```
21
-2
```

Функції `Abs[z]` та `Arg[z]` обчислюють модуль та аргумент комплексного числа `z`.

$\mathbf{Abs}[\boldsymbol{z}]$

$\mathbf{Arg}[\boldsymbol{z}]$

$\sqrt{445}$

$-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2}{21}\right]$

Природно, що функція `Abs[z]` використовується і для обчислення модулів дійсних чисел.

Для пояснень інструкцій у код можна вставляти коментарі – це текст, який система не буде намагатися виконати. Коментар виділяється спеціальними символами: `'(*'` (дужка зірочка) означає початок коментаря, `'*)'` (зірочка дужка) означає його кінець. Наприклад

$\mathbf{z = 5;}$ (* це коментар *)

Довідникова система викликається з меню `Help–Documentation Center` або клавішею **`F1`**. Якщо в документі виділити назву якої-небудь функції та натиснути **`F1`**, то відкриється вікно із довідкою про цю функцію Приклади можна виконувати у вікні довідки так само, як і у вікні основного документа, натисканням комбінації клавіш **`Shift-Enter`**.

Робота з «Математикою» оформлюється у вигляді окремого файлу, який має розширення імені `*.nb`. Файл поділяється на секції або комірки, секції мають стиль, який визначає, що можна робити із вмістом. Наприклад, секції, що містять обчислювані вирази, мають стиль «Input», секції, які містять результат, мають стиль «Output». Бувають секції із стилем «Text» або із заголовними стилями. Для виконання обчислень у секції використовується комбінація клавіш **`Shift-Enter`** або клавіша **`Enter`** на цифровій області клавіатури.

Після виконання обчислень, за вихідною секцією з'являється «Панель пропозиції подальших дій». На ній можна обрати дію, яку ви бажаєте виконати далі. Зазвичай ви будете її ігнорувати. Для продовження роботи просто натисніть мишею в порожній області документа нижче всіх секцій і починайте набирати далі потрібний вам код.

2. Алгебраїчні обчислення.

Свою назву «системи символьних обчислень» отримали у зв'язку з їх вмінням виконувати різноманітні перетворення алгебраїчних виразів. Для того щоб виконати будь-яке перетворення, вираз треба передати аргументом до відповідної функції.

Приклад. Знайти *x* з наступної рівності $\frac{(3x-54)\cdot 8-159}{21}=21$. Для розв'язання задачі наберіть наступний код.

$$\mathbf{Solve}[\frac{(3*x-54)*8-159}{21}==21,x]$$

Натисніть комбінацію клавіш **Shift – Enter**, та отримайте відповідь.

```
{{x -> 43}}
```

Щоб набрати інструкцію, наведену вище, введіть слово `Solve` та відкриваючу квадратну дужку. Потім натисніть комбінацію клавіш **Ctrl-/** (**Ctrl –** поділити). Замість комбінації клавіш можна клацнути мишею по трафарету «дріб» на панелі спеціальних символів (рис. 1.2). Ви побачите **Solve** $\left[\frac{\blacksquare}{\square}\right.$. Натисніть мишею по чорному квадратику та введіть чисельник виразу. Аналогічно, в нижній квадратик введіть знаменник. Потім, справа від дробу, введіть подвійний знак рівності (ознака рівняння) і праву частину – число 21. Після коми введіть ім'я шуканої невідомої – у нашому прикладі *x*. Введіть закриваючу квадратну дужку, та натисніть комбінацію клавіш **Shift – Enter.** Це змусить систему виконати команду `Solve` (розв'язуй), яка використовується завжди, коли потрібно розв'язати рівняння (лінійне, квадратне або більш високого степеня). Відповідь 43 відобразиться у наступній секції. Запис `x->43` можна читати так: в якості *x* треба підставити число 43, щоб ліві і праві частини рівняння співпали. Фігурні дужки навкруги означають «список». Функція `Solve` повертає результат у вигляді списку розв'язків, оскільки зустрічаються задачі з декількома розв'язками. У нашому випадку список складається з одного розв'язку.

Приклад. Перевірити справедливість рівності

$$108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$$

Для цього в новій секції введіть наведений вираз, але з двома знаками рівності між лівою та правою частинами, а потім натисніть комбінацію клавіш **Shift – Enter.**

$$\mathbf{108^2+109^2+110^2==133^2+134^2}$$

```
True
```

Піднесення до степеня можна позначити символом «капелюшок» `108^2` або використовуючи трафарет «піднесення до степеня» на панелі спеціальних символів (рис. 1.2). Також можна використати комбінацію клавіш **Ctrl - ^** (**Ctrl –** капелюшок), яка також створює трафарет вводу $\square^{\blacksquare}$.

Результат `True` (істина) означає, що рівність справедлива. Якби система повернула `False` (брехня), то це означало б невиконання рівності.

Приклад. Знайти числове значення виразу $a^3 - b^3 - 3\,a\,b\,(a-b)$, якщо a=−27, b=−33. Для цього введіть наступну інструкцію

$$\boldsymbol{f = a^3 - b^3 - 3 * a * b * (a - b)}$$

і виконайте її комбінацією клавіш **Shift – Enter**.

Тут ми створили змінну *f*, яка співпадає із виразом, який введений правіше. Фактично f є «синонімом» виразу.

Для підстановки значення у вираз використовується операція «/.» (поділити – точка), після якої слід вказати список підстановки. Список завжди позначається фігурними дужками, а що замість чого підставляється вказується за допомогою стрілок. Стрілка -> вводиться за допомогою символів – (мінус) та > (більше). Зазвичай пара цих символів автоматично трансформується у єдиний символ →.

У новій секції документа введіть другу інструкцію та виконайте її.

$$\boldsymbol{f/.\{a \to -27, b \to -33\}}$$

```
216
```

Результат підстановки 216 з'являється у наступній секції документа.

Приклад. Розкласти на множники вираз $a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab$. Для цього введіть інструкцію

$$\mathbf{Factor}[\boldsymbol{a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2a\,b}]$$

та виконайте її комбінацією клавіш **Shift – Enter**. Результат обчислень з'являється у наступній секції документа.

```
(a - b) (2 + a - b)
```

Функція Factor є командою розкладу на множники того виразу, який записаний у квадратних дужках. Зверніть увагу на те, що у виразі ми опустили знак операції множення *. Її ми замінили символом пробіл. Однак пробіл погано видно і, якщо ви його пропустите, то отримаєте повідомлення про помилку, яку важко буде виявити. Тому рекомендуємо вам завжди використовувати символ ∗ (зірочка) для позначення операції множення.

Приклад. Розкласти на множники вираз $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

Вводимо та виконуємо наступну команду.

$$\mathbf{Factor}[\boldsymbol{2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6}]$$

```
(-2 + x) (3 + x) (1 + 2 x)
```

Ще раз звертаємо вашу увагу на те, що у виразі замість символу множення стоять пробіли. Наприклад, в одночлені 11 *x* між константою 11 та змінною x стоїть пробіл. Якщо ви пропустите пробіл, то буде помилка.

Приклад. Чи можна $x^4 + 4$ розкласти на множники. Подивимось, що скаже *Mathematica*.

$$\mathbf{Factor}[\boldsymbol{x^4 + 4}]$$

$$(2 - 2x + x^2)(2 + 2x + x^2)$$

■

Функція Expand обернена до функції Factor. Вона вміє розкривати дужки в алгебраїчному виразі.

Expand[$(a+b)$^**3** $*$ $(a-b)$^**2**]

$a^5 + a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 + b^5$

Приклад. Скоротити дріб $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$. Для цього введіть інструкцію

Cancel $\left[\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}\right]$

та виконайте її. Результат обчислень з'являється в наступній секції.

$-1 + a$

Використана тут функція `Cancel` є командою скорочення спільних множників у чисельнику та знаменнику дробу.

Приклад. Спростіть вираз

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

Для цього введіть інструкцію

Together $\left[\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}\right]$

і виконайте її. Результат обчислень буде наступним

$$\frac{1}{a\ b\ c}$$

■

Функція `Together` приводить суму дробів до спільного знаменника і скорочує спільні множники в чисельнику та знаменнику. Наприклад:

Together $\left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right]$

$$\frac{b\ c + a\ d}{b\ d}$$

Навпаки, функція `Apart` виконує розклад дробів:

Apart $\left[\frac{\mathbf{b\ c + a\ d}}{\mathbf{b\ d}}\right]$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

У виразі збирання коефіцієнтів при однакових степенях змінної можна виконати за допомогою функції `Collect`. Її першим аргументом є вираз, а другим – ім'я (або список імен) змінних.

Collect[$a\ x + b\ x + c\ y + d\ y, x$]

$(a+b)x + cy + dy$

або

Collect[$a\ x + b\ x + c\ y + d\ y, \{x, y\}$]

$(a+b)x + (c+d)y$

Приклад. Спростіть вираз:

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a(c-b)}{bc}+\frac{b(a-c)}{ac}+\frac{c(b-a)}{ab}}$$

Для цього введіть інструкцію

$$\boldsymbol{f = \frac{a^2(1/b - 1/c) + b^2(1/c - 1/a) + c^2(1/a - 1/b)}{a/(b*c)*(c-b) + b/(a*c)*(a-c) + c/(a*b)*(b-a)}}$$

Потім натисніть клавішу **Enter** (а не **Shift – Enter**). Це переведе курсор у другий рядок поточної секції, не виконуючи інструкцій. У другому рядку введіть команду

Simplify[***f***]

і лише тільки після цього натисніть комбінацію клавіш **Shift – Enter**. Секція, яка складається тепер з двох інструкцій, буде обчислена, і у вихідній секції з'явиться результат

```
a + b + c
```

Функція `Simplify[f]` (спростити) є командою виконання всіх алгебраїчних обчислень у виразі *f*. `Simplify` пробує знайти найпростішу форму виразу. Часто буває не зовсім зрозуміло, яка з форм буде простіше, і різні люди можуть мати різні думки про простоту. *Mathematica* вважає найпростішим вираз з найменшою кількістю елементів. Наприклад:

Simplify[**Sin**[x]^2 + **Cos**[x]^2]

1

Однак іноді *Mathematica* не може нічого зробити із виразом і тому вам потрібно самим викликати функції `Factor`, `Expand` та ін., щоб виконати перетворення.

Функцію `Simplify` можна використовувати для перетворення тригонометричних виразів.

Simplify[**2Tan**[x]/(**1** + **Tan**[x]^**2**)]

Sin[$2x$]

Simplify[**4 Sin**[x]^2 * **Cos**[x]^2 + **4 Sin**[x] * **Cos**[x] + **1**]

(Cos[x] + Sin[x])^4

Однак вона не завжди робить те, що ми від неї очікуємо. Наприклад:

Simplify[**Sin**[**3**x]]

Sin[$3x$]

Тому для виконання тригонометричних перетворень є окремі функції. Так функції `TrigExpand` та `TrigReduce` виконують дії, аналогічні `Expand` та `Factor`, стосовно до тригонометричних виразів.

TrigExpand[**Sin**[**3**x]]

3Cos[x]^{2}Sin[x] − Sin[x]^3

TrigReduce[**Sin**[x] * **Cos**[x]]

$\frac{1}{2}$Sin[$2x$]

$\mathbf{TrigReduce}[\mathbf{Sin}[x]\mathbf{Cos}[2y]]$

$\frac{1}{2}(\mathrm{Sin}[x-2y]+\mathrm{Sin}[x+2y])$

Більшість алгебраїчних перетворень ми можемо виконати самостійно. Однак розв'язання рівнянь є більш складною задачею. І у цьому питанні допомога *Mathematica* може бути значною.

Для символьного розв'язання рівнянь використовується функція `Solve`.

$\mathbf{Solve}[\frac{2}{x-1}+1==\frac{3}{x-1},x]$

$\{\{x\to 2\}\}$

Корінь рівняння один, і він дорівнює 2.

Якщо функція `Solve` повертає пусті одинарні фігурні дужки, то це означає, що розв'язків немає. Наприклад:

$\mathbf{Solve}[\frac{x-3}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2}-x==\frac{x}{12},x]$

```
{}
```

Квадратні рівняння можуть мати два кореня.

$\mathbf{Solve}[x^2-2x==0,x]$

$\{\{x\to 0\},\{x\to 2\}\}$

Імена невідомих, які фігурують у рівняннях, не повинні містити значення. Якщо, наприклад, змінній *x*, яка використовується у прикладі, раніше було присвоєно значення, то його (значення) потрібно «забути». Спробуйте, наприклад, виконати команди

$x=5;$

$\mathbf{Solve}[x^2-3x+2==0,x]$

```
Solve::ivar: _5_ is not a valid variable>>
Solve[False,5]
```

Ви отримаєте повідомлення про помилку і результат `Solve[False,5]`. Що відбулося? Перед розв'язанням алгебраїчного рівняння ви присвоїли змінній *x* значення 5. Система підставила у вираз x^2-3x+2 замість *x* значення 5, отримала значення 12, що не співпадає з 0. В результаті, замість очікуваного рівняння $x^2-3x+2==0$ перший аргумент функції `Solve` дорівнює `False` (брехня).

Щоб такого не відбувалося, шукане ім'я не повинно містити значення. Для цього перед викликом функції, яка розв'язує рівняння або систему рівнянь, шукану змінну (в даному випадку *x*) слід «очистити» від можливих значень. Це можна зробити функцією `Remove[x]` або `Clear[x]`.

$x=5;$

$\mathbf{Clear}[x];$

$\mathbf{Solve}[x^2-3x+2==0,x]$

$\{\{x\to 1\},\{x\to 2\}\}$

Ви можете розв'язувати системи рівнянь, які містять більш ніж одну невідому, використовуючи для цього список рівнянь та список невідомих.

$\mathbf{Clear}[x, y]$

$\mathbf{Solve}[\{2x + 3y == 13, 3x - 2y == 0\}, \{x, y\}]$

$\{\{x \to 2, y \to 3\}\}$

Перший аргумент функції `Solve` – список рівнянь (набір розділених комами рівнянь, взятий у фігурні дужки). Другий аргумент – список змінних, відносно яких розв'язуються рівняння.

Розв'язок рівнянь повертається функцією `Solve` у формі списку правил підстановки. Пояснимо ці правила на прикладі. Виконайте інструкцію:

$x^2 /. x \to 5$

```
25
```

Тут сказано, що у виразі x^2 треба *x* замінити на 5. Оператор `/.` (поділити точка) читається «замінити», та → (стрілка) читається як «на». Весь вираз слід читати «в x^2 замінити *x* на 5».

Повернемося до розв'язання квадратного рівняння, але тепер результат роботи функції `Solve` присвоїмо змінній `s`:

$\mathbf{s = Solve}[x^2 - 2x == 0, x]$

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 2\}\}$

Після обчислення у змінну `s` занесено розв'язок у вигляді списку списків правил підстановки. Зараз `s` можна використовувати для заміни значень *x* у будь-яких виразах. Наприклад, ми можемо перевірити, що відповідь вірна, підставляючи розв'язок у вихідне рівняння:

$x^2 - 2x /. s$

```
{0,0}
```

Список з двох нулів означає, що обидва розв'язки дають нульові значення, коли ми підставляємо їх у початковий вираз. У наступній команді ми підставляємо у вираз $x^2 - 3x$ тільки другий розв'язок.

$x^2 - 3x /. s[[2]]$

```
-2
```

Для звернення до елемента списку `s` ми використовуємо індекс (номер) елемента у списку. Він вказується у подвійних квадратних дужках. Зокрема, `s[[2]]` є другим елементом списка `s`. Але список `s` у нас дорівнює `{{x→0},{x→2}}` і його другим елементом є `{x→2}`. Таким чином, остання наша команда має вигляд: $x^2 - 3x /. \{x -> 2\}$.

Розв'яжемо ще одне рівняння.

$\mathbf{Solve}[\frac{x-3}{x+1} == \frac{8-x}{x-4} + \frac{20}{4+3x-x^2}, x]$

$\{\{x \to 3\}\}$

Функцію `Solve` можна використати, щоб отримати загальну формулу розв'язку квадратного рівняння. Для цього у рівнянні треба використати «буквенні» значення коефіцієнтів.

$\mathbf{Clear}[a, b, c, x]$

$\mathbf{Solve}[a\, x^2 + b\, x + c == 0, x]$

$$\{\{x \to \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\},\{x \to \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\}\}$$

Не забувайте при записі рівняння між коефіцієнтами та невідомими вставляти пробіл (символ множення).

3. Елементи лінійної алгебри.

3.1 Вектори, матриці та визначники.

В пакеті *Mathematica* немає самостійних типів даних вектор та матриця. Замість них використовуються списки. Будь-який набір елементів, який поміщений у фігурні дужки, є списком. Його можна інтерпретувати як вектор.

Вектори можна додавати, віднімати, множити на число. Але це можна робити і зі списками. Наприклад, введіть в одній секції наступні інструкції (після вводу кожного рядка натискайте клавішу **Enter**).

```
v1 = {1, 2, 3};
v2 = {-3, 5, 4};
v1 + v2
v1 - v2
5 * v1
```

Виконайте секцію комбінацією клавіш **Shift – Enter**. Ви отримаєте нові списки, елементи яких отримані із списків `v1` та `v2` звичайними векторними операціями додавання, віднімання та множення на константу.

```
{-2, 7, 7}
{4, -3, -1}
{5, 10, 15}
```

Довжина (модуль) вектора (списку) може бути отримана за допомогою функції `Norm`.

```
Norm[v1]
```

$\sqrt{14}$

Перевіримо:

```
Sqrt[1^2 + 2^2 + 3^2]
```

$\sqrt{14}$

Щоб ввести квадратний корінь, використайте трафарет «кореня» $\sqrt{\blacksquare}$ на панелі спеціальних символів.

Скалярний добуток векторів обчислюється за допомогою функції `Dot`.

```
Dot[v1, v2]
```

```
19
```

Перевіримо:

```
Sum[v1[[i]] * v2[[i]], {i, 3}]
```

```
19
```

Функція `Sum` додає вирази, вказані у першому аргументі, коли індекс `i` змінюється від 1 до 3. Підсумовуваний вираз, який залежить від індексу, вказується першим аргументом, а другим – діапазон зміни індексу у вигляді

списку. Початкове значення 1 індексу використовується за замовчуванням (якщо воно не вказано явно).

Проекція вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ визначається за формулою $\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$. В системі є функція `Projection[a,b]`, яка виконує цю операцію, тобто повертає список, який містить координати вектора проекції.

Projection[{**4**, −**6**, **3**}, {**1**, **2**, **3**}]

$\left\{\frac{1}{14}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right\}$

Для обчислення кутів між векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ призначена функція `VectorAngle[a,b]`. Для векторів з дійсними координатами вона реалізує обчислення кута за формулою $\alpha = \arccos\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. Наприклад:

u = {**1**, **0**, **1**};
v = {**1**, **1**, **1**};
VectorAngle[**u**, **v**]

ArcCos[$\sqrt{2/3}$]

Векторний добуток векторів обчислюється функцією `Cross`.

Cross[{**1**, **2**, **3**}, {**2**, **4**, **5**}];

```
{-2,1,0}
```

Замість функції `Cross` можна використовувати оператор '**×**' (хрест). Він вводиться як **Esc − cross − Esc** (слово `cross`).

{$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$} × {$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$}

{$cy - bz, -cx + az, bx - ay$}

Приклад. Знайти довжини сторін, величини кутів та площу трикутника з вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Розв'язання. В пакеті *Mathematica* деякі символи захищені від зміни. Зокрема, є захищеним символ `C`. Щоб з таким символом можна було працювати, наприклад, присвоювати змінній будь-яке значення, потрібно з її імені зняти захист інструкцією `Unprotect [ім'я_змінної]`.

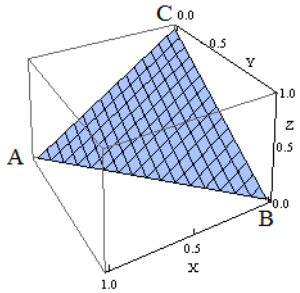
Unprotect[**C**]

Після цього змінній `C` можна присвоювати значення. Задамо координати вершин трикутника.

A = {**1**, **0**, **0**};
B = {**0**, **1**, **0**};
C = {**0**, **0**, **1**};

Зобразимо поверхню трикутника інструкцією

ListPlot3D[{$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$}, **AspectRatio** → **1**]



Тут функція `ListPlot3D` приймає список координат вершин та зображує за ними поверхню. Опція (необов'язковий аргумент) `AspectRatio->1` каже про те, що на малюнку довжини одиничних відрізків вздовж координатних осей повинні бути однаковими.

Тепер обчислимо вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$.

```
AB = B - A
AC = C - A
BC = C - B
{-1, 1, 0}
{-1, 0, 1}
{0, -1, 1}
```

Після цього знаходимо довжини векторів.

```
LAB = Norm[AB];
LAC = Norm[AC];
LBC = Norm[BC];
{LAB, LAC, LBC}
```

$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Довжини векторів однакові. Отже, трикутник рівнобічний і його кути дорівнюють $\pi/3$. Для тренування обчислимо їх.

```
aA = VectorAngle[AB, AC];
aB = VectorAngle[-AB, BC];
aC = VectorAngle[-AC, -BC];
{aA, aB, aC}
```

$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

Знаки мінусів, які стоять у другій та третій формулах, використовуються для зміни напряму векторів на протилежний.

Залишилося обчислити площу трикутника, яка визначається як половина модуля векторного добутку векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, тобто $S = \frac{1}{2}|[\vec{AB}, \vec{AC}]|$. Маємо

```
S = 1/2 Norm[Cross[AB, AC]]
```

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

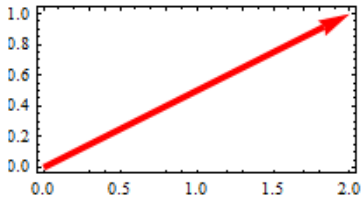
■

У системі можна зображати стандартні геометричні фігури, які називаються графічними примітивами (круг, прямокутник, стрілка та ін.). Для їх створення

треба викликати функцію, яка будує необхідний математичний об'єкт (примітив). Потім такий об'єкт (двовимірний або трьохвимірний) функціями `Graphics` або `Graphics3D` перетворюється у графічний об'єкт. Ці функції додають в структуру примітива колір, товщину лінії та ін. Отримані графічні об'єкти можуть бути відображені у вікні документа безпосередньо або за допомогою інших функцій, наприклад, функції `Show`.

Зараз ми хочемо показати, як можна намалювати вектор. Для цього слід використати функцію `Arrow` створювання графічного примітива «стрілка». Функція може приймати два списки, які представляють координати початкової та кінцевої точок вектора. Для відображення примітива його слід передати аргументом функції `Graphics` або `Graphics3D`. Перед примітивом можна вставляти «директиви» (спеціальні інструкції), які використовуються для оформлення, визначаючи колір, товщину й стиль ліній, та ін.

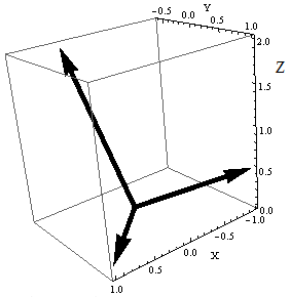
```
Graphics[{Thickness[0.02], Red, Arrowheads[0.1],
                    Arrow[{{0, 0}, {2, 1}}]}, Frame → True]
```



Тут ми зобразили вектор, який має початок у точці (0, 0) і кінець в точці $(2,1)$. При цьому була задана товщина (`Thickness[0.02]`), колір (`Red`) та розмір «наконечника» стрілки (`Arrowheads[0.1]`).

В наступному коді ми обчислюємо векторний добуток $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, і потім зображуємо стрілки, які представляють ці вектори.

```
z = {0, 0, 0};
a = {1, 1, 0.1};
b = {-1, 1, 0.5};}
c = a × b
{0.4,-0.6,2}
Graphics3D[{Thickness[0.02], Arrowheads[0.1], Arrow[{z, a}], Arrow[{z, b}],
                    Arrow[{z, c}]}, Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
```



Приклад. Розкласти вектор $\boldsymbol{u} = (1,1,1)$ на складові: вздовж вектора $\boldsymbol{v} = (3,2,1)$ та ортогональний до **v** вектор.

```
u = {1, 1, 1};
v = {3, 2, 1};
```

upar = Projection[u, v]

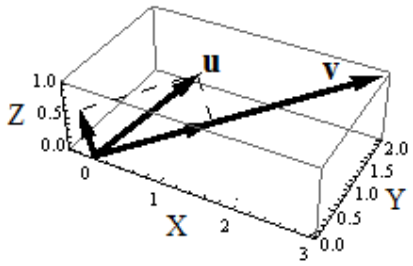
$\left\{\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right\}$

uort = u − upar

$\left\{-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right\}$

Намалюємо вектори, виконавши інструкції:

```
z = {0, 0, 0};
Graphics3D[{Thickness[0.02], Arrowheads[0.1], Arrow[{z, u}], Arrow[{z, v}],
            Arrow[{z, upar}], Arrow[{z, uort}]}, Axes -> True,
            AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"}]
```



Наведена тут команда `Graphics3D` не створює пунктирні лінії і позначення векторів, які вставлені у рисунок для наочності.

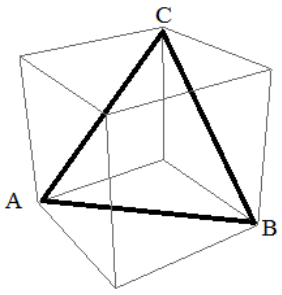
Перевіримо, що вектори `uort` та `upar` у сумі дають вектор `u` та що вони ортогональні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю.

```
upar + uort
{1,1,1}
Dot[upar, uort]
0
```

■

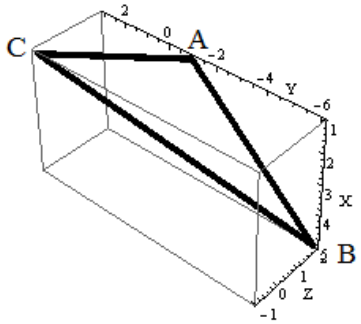
Ще одним корисним графічним примітивом є «ламана», яка створюється функцією `Line`. Функція приймає список координат вершин ламаної (на площині або у просторі) і повертає об'єкт/примітив «ламана». Передавши його функції `Graphics3D` (або `Graphics`, якщо лінія плоска), ламану можна намалювати. Наприклад, контур трикутника можна побудувати інструкціями

```
A = {1, 0, 0}; B = {0, 1, 0}; C = {0, 0, 1};
Graphics3D[Line[{A, B, C, A}]]
```



Тут ідентифікатори A, B та C є тривимірними списками, які містять координати вершин трикутника.

Приклад. У трикутника з вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ та $C(1,3,-1)$ знайти висоту $h=|\vec{BD}|$.



Введемо списки, які містять координати точок, і побудуємо зображення трикутника.

```
Unprotect[C];
A = {1, -1, 2};
B = {5, -6, 2};
C = {1, 3, -1};
Graphics3D[{Thickness[0.02], Line[{A, B, C, A}]}];   (* рисунок вище *)
```

Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів його сторін $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Отже

```
AB = B - A;
AC = C - A;
S = 1/2 Norm[Cross[AB, AC]]
```

З іншого боку, $S=\frac{1}{2}h\,|\vec{AC}|$. Щоб знайти висоту трикутника розв'яжемо це рівняння відносно невідомої h.

```
LAC = Norm[AC]
Solve[1/2 h * LAC == S, h]
```

$\{\{h \to 5\}\}$

Таким чином, висота трикутника дорівнює 5.

■

Матриці в пакеті *Mathematica* задаються у вигляді списку списків. При цьому операції додавання та віднімання матриць повністю відповідають операціям додавання та віднімання списків. Наприклад:

```
A = {{1, 2}, {3, 4}};
B = {{1, 1}, {1, 1}};
A + B
{{2,3},{4,5}}
```

Однак у такому вигляді з матрицями незручно працювати. Щоб представити список списків у матричному вигляді можна використати функцію `MatrixForm`.

При цьому функцію MatrixForm, на відміну від математичних функцій, зручніше використовувати у постфіксній нотації. Наприклад,

A + B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Для матриць визначені різноманітні математичні операції. Приклад додавання був показаний вище. Аналогічно виконується віднімання матриць. Матрицю можна множити на константу. У пакеті *Mathematica* це виконується звичайним множенням:

5 * A

```
{{5,10},{15,20}}
```

або

5 * A // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Щоб виконати матричне множення потрібно списки, які відповідають матрицям, передати аргументами у функцію Dot.

Dot[{{1, 2}, {3, 4}}, {{1, 4}, {2, 5}}]

```
{{5,14},{11,32}}
```

або, що те ж саме,

A = {{1, 2}, {3, 4}};

B = {{1, 4}, {2, 5}};

Dot[A, B] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 11 & 32 \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти матрицю $G = AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для цього виконайте інструкції

A = {{2, 3, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 2, -1}};

B = {{1, 2, 1}, {0, 1, 2}, {3, 1, 1}};

G = Dot[A, B] - Dot[B, A] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Вони показують, що операція множення матриць не комутативна.

■

Ранг матриці обчислює функція MatrixRank.

MatrixRank[{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}]

```
2
```

Транспонування матриці виконується функцією Transpose.

Transpose[{{a, b}, {c, d}}] // MatrixForm

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Операцію транспонування можна позначати значком ^{T} (піднесена англійська буква Т). Щоб цей символ ввести, треба встановити курсор після подвійного списку, натиснути клавішу **Esc**, потім ввести два символи **tr**, потім знову **Esc**.

$\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}\}^{\mathrm{T}}$//MatrixForm

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Приклад. Знайти матрицю $M = 2A - B^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для цього виконаємо інструкції

$\mathbf{A} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\};$

$\mathbf{B} = \{\{1,-1\},\{0,2\},\{-2,3\}\};$

$\boldsymbol{M = 2 * A - B^T}$//MatrixForm

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

■

Щоб у *Mathematica* обчислити визначник спочатку потрібно створити список списків, який містить елементи визначника і представляє матрицю, а потім застосувати до нього функцію `Det`.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. Для цього виконайте команду

Det[{{3, 2}, {1, 4}}]

```
10
```

Зверніть увагу на те, що перший внутрішній список {3, 2} містить елементи першого рядка визначника, а другий {1, 4} – елементи другого рядка.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Для цього виконайте команду

Det[{{*a*, *b*}, {*c*, *d*}}]

```
-b c + a d
```

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}$. Маємо:

Det[{{1, 2, 3}, {4, −1, 5}, {6, 7, −3}}]

```
154
```

Тут аналогічно попередньому прикладу рядки визначника задаються у вигляді внутрішніх списків подвійного списку.

Приклад. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$. Спочатку обчислюємо визначник:

```
d = Det[{{1, x, x}, {x, 1, x}, {0, x, 1}}]
```

$1 - 2x^2 + x^3$

Отриманий кубічний вираз міститься у змінній d. Тому для розв'язання задачі достатньо виконати інструкцію

```
Solve[d == 0, x]
```

$\{\{x \to 1\}, \{x \to \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}, \{x \to \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}\}$

У кубічного рівняння може бути три кореня. Ми їх і отримали.

Приклад. Обчислити визначник

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

```
M = {{1, 1, 1, 1}, {a, b, c, d}, {a^2, b^2, c^2, d^2}, {a^3, b^3, c^3, d^3}};
M//MatrixForm
Simplify[Det[M]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

$(a-b)(a-c)(b-c)(a-d)(b-d)(c-d)$

■

Якщо вектори $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ задані своїми координатами, то їх мішаний добуток обчислюється за допомогою визначника

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити мішаний добуток векторів $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

```
v1 = {1, 0, 0};
v2 = {0, 2, 0};
v3 = {0, 0, 3};
Det[{v1, v2, v3}]
```

```
6
```

Для пояснення коду надрукуємо список

```
{v1, v2, v3}
```

```
{{1,0,0},{0,2,0},{0,0,3}}
```

Як бачите, список `{v1,v2,v3}` є списком списків, який представляє матрицю, складену з координат векторів. ■

Ви бачили, для того щоб виконати матричне множення потрібно подвійні списки, які відповідають матрицям, передати аргументами в функцію `Dot`. Ця функція може також виконати множення матриці на вектор або обчислити скалярний добуток векторів. Замість імені функції `Dot`, можна використовувати символ `'.'` (точка), яка стоїть між множниками. Наприклад:

$\{\{a,b\},\{c,d\}\}.\{x,y\}$
$\{ax+by, cx+dy\}$
еквівалент $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\,x+b\,y \\ c\,x+d\,y \end{pmatrix}$

$\{x,y\}.\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
$\{ax+cy, bx+dy\}$
еквівалент $(x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\,x+c\,y \\ b\,x+d\,y \end{pmatrix}$

В першому випадку список `{x,y}` виступає, як вектор-стовпець, у другому – як вектор-рядок. В наступному виразі присутні обидва типи.

$\{x,y\}.\{x,y\}$
x^2+y^2
еквівалент $(x,\,y)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^2+y^2$

Можна використовувати табличне представлення векторів та матриць, але результат все одно буде списком списків.

$(x \quad y).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\{\{x^2+y^2\}\}$

Для вводу попередньої команди наберіть круглі дужки (обидві, відкриваючу та закриваючу), всередині дужок введіть `x`, потім натисніть комбінацію клавіш **`Ctrl-кома`**. У перетвореному рядку `(x ■)` замість ■ введіть `y`. Перемістіть курсор вправо за межі дужок, введіть точку, наберіть знову відкриваючу та закриваючу дужки. Всередині цих дужок введіть `x`, потім наберіть комбінацію клавіш **`Ctrl-Enter`**. Замість трафарету ■, який з'явився, введіть `y`.

Використовуйте функцію `MatrixForm`, якщо бажаєте результат матричного множення бачити у вигляді вектора або матриці.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ **//MatrixForm**
$\begin{pmatrix} a\,e+b\,f \\ c\,e+d\,f \end{pmatrix}$

Ввід останньої інструкції виконується аналогічно попередній. При вводі матриць додавання рядків виконується комбінацією клавіш **`Ctrl - Enter`**, а додавання стовпців **`Ctrl -,`**(кома).

Існують функції для автоматичного створення матриць деяких типів. Насправді такі функції створюють список списків, який ми можемо інтерпретувати як матрицю. Функція `IdentityMatrix[dim]` створює одиничну матрицю вказаного розміру.

MatrixForm[IdentityMatrix[3]]
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Функція `DiagonalMatrix[список]` створює діагональну матрицю.

DiagonalMatrix[{*a*, *b*, *c*}]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Приклад. Знайти значення матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, якщо E одинична матриця та $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Маємо:

A = {{1, 1, 2}, {1, 3, 1}, {4, 1, 1}};

B = 2 * A.A + 3 * A + 5 * IdentityMatrix[3];

B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$$

Тут функція `IdentityMatrix[3]` генерує одиничну матрицю E розміру 3×3. Зверніть також увагу на точку, яка стоїть в одночлені **2*A.A**. Вона заміняє функцію `Dot` матричного добутку. Якщо замість неї поставити зірочку *, то буде виконано почленне множення матриці `A` на `A`.

■

Функція `Inverse` обчислює обернену матрицю (якщо вона існує).

A = Inverse $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\{\{-2,1\},\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}\}$

MatrixForm[*A*]

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Аналогічно

Inverse $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$//MatrixForm

або

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$//Inverse//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{-bc+ad} & -\frac{b}{-bc+ad} \\ -\frac{c}{-bc+ad} & \frac{a}{-bc+ad} \end{pmatrix}$$

Приклад. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, розв'язок має вигляд $X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

A = {{2, 5}, {1, 3}};
B = {{4, −6}, {2, 1}};
X = Inverse[A]. B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

представивши її у вигляді матричного рівняння.

Перепишемо систему у вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання матричного рівняння має вигляд $X = A^{-1}B$. Тоді спочатку знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

A = {{2, 3, 2}, {1, 2, −3}, {3, 4, 1}};
B = {9, 14, 16};
IA = Inverse[A];
IA // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Розв'язком системи буде

X = IA. B

```
{2, 3, -2}
```

Отже, $x = 2, y = 3, z = -2$.

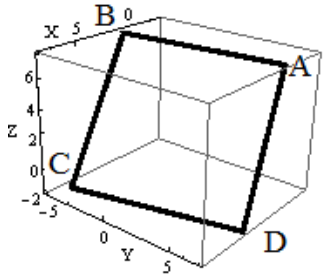
■

Приклад. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-3,5,6)$, $B(1,-5,7)$, $C(8,-3,-1)$, $D(4,7,-2)$ – квадрат. Для цього достатньо показати, що чотирикутник – ромб та один з кутів (будь-який) дорівнює $\pi/2$. Але ще треба перевірити, що всі чотири точки розташовані в одній площині. Для цього достатньо перевірити, що вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$ компланарні (паралельні одній площині).

Спочатку задамо списки, які містять координати точок, та побудуємо зображення чотирикутника.

Unprotect[C, D];
A = {−3, 5, 6};

```
B = {1, −5, 7};
C = {8, −3, −1};
D = {4, 7, −2};
Graphics3D[Line[{A, B, C, D, A}]]
```



Потім обчислимо вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ та перевіримо їх компланарність. Нагадаємо, що умовою компланарності трьох векторів є обернення в нуль визначника, рядки якого складені з їх координат.

```
AB = B − A;
AC = C − A;
AD = D − A;
Det[{AB, AC, AD}]
0
```

Тут список `{AB,AC,AD}={{4,-10,1},{11,-8,-7},{7,2,-8}}` представляє матрицю, рядки якої складені з координат відповідних векторів. Визначник цієї матриці співпадає із мішаним добутком векторів. Результат 0 означає, що вектори компланарні, а точки A, B, C та D розташовані в одній площині.

Тепер перевіримо, що довжини всіх сторін чотирикутника однакові.

```
BC = B − C;
CD = D − C;
Norm[AB] == Norm[BC] == Norm[CD] == Norm[AD]
True
```

Значення `True` каже, що це так. Тепер знайдемо кут при вершині A. Маємо:

```
VectorAngle[AB, AD]
```

$$\frac{\pi}{2}$$

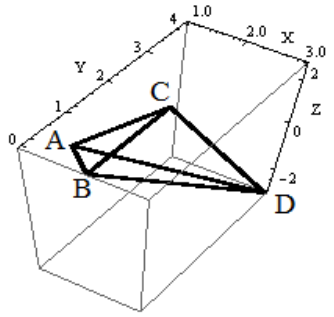
Таким чином, всі чотири точки лежать в одній площині, довжини сторін чотирикутника однакові (тобто він ромб), і кут при вершині A прямий. Це означає, що чотирикутник ABCD – квадрат.

Приклад. У тетраедрі з вершинами в точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ та $D(3,4,-3)$ обчислити висоту $h = |\vec{DE}|$.

Задамо списки, які містять координати точок, та побудуємо зображення тіла.

```
Unprotect[C, D];
A = {1, 1, 1};
B = {2, 0, 2};
C = {2, 2, 2};
```

D = {3, 4, −3};
Graphics3D[{Thickness[0.02], Line[{A, B, C, A, D, B, C, D}]}]



Об'єм тетраедра дорівнює одній шостій модуля мішаного добутку векторів його ребер $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$.

AB = B − A;
AC = C − A;
AD = D − A;
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}\,Abs[Det[\{AB, AC, AD\}]]}$$
2

Площа основи (трикутника ABC) дорівнює половині модуля векторного добутку векторів його сторін $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$.

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\,Norm[Cross[AB, AC]]}$$
$\sqrt{2}$

З іншого боку $V = \frac{1}{3}h\ S$. Щоб знайти висоту тетраедра розв'яжемо це рівняння відносно невідомої *h*.

$$\boldsymbol{Solve[\frac{1}{3}S * h == V, h]}$$
$\{\{h \to 3\sqrt{2}\}\}$

Таким чином, висота тетраедра дорівнює $3\sqrt{2}$.

3.2 Системи лінійних рівнянь.

Для розв'язання систем лінійних рівнянь невеликого розміру зручно застосовувати правило Крамера. Нагадаємо його для випадку трьох рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Нехай Δ позначає визначник матриці коефіцієнтів цієї системи рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а Δ_i $(i = 1,2,3)$ позначають визначники отримані з Δ заміною *i*-го стовпця елементами (b_1, b_2, b_3) правих частин системи. Якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_i відмінне від нуля, то розв'язків у системи немає. При $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ система може бути несумісною або мати нескінченну кількість розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою правила Крамера.

$$\begin{cases} 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \\ 2x - 4y + 9z = 28 \end{cases}.$$

Розв'язання. Створимо матрицю коефіцієнтів та матриці, отримані з неї заміною *i* – го стовпця елементами правих частин.

```
A = {{7, 3, -6}, {7, 9, -9}, {2, -4, 9}};
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

```
B = {-1, 5, 28};
A1 = Join[Transpose[{B}], A[[All, 2 ;; 3]], 2];
A1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -9 \\ 28 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Тут інструкція `Transpose[{B}]` створює вектор-стовпець `M1` вільних членів, а інструкція `A[[All, 2 ;; 3]]` створює матрицю `M2`, складену з другого та третього стовпців матриці `A`. Функція `Join[M1,M2,2]` поєднує матриці за другим індексом (пристиковує справа матрицю `M2` до стовпця `M1`).

Аналогічно, наступна інструкція виділяє перший та третій стовпці матриці `A`, та між ними вставляє стовпець вільних членів.

```
A2 = Join[A[[All, 1;; 1]], Transpose[{B}], A[[All, 3;; 3]], 2];
A2 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -6 \\ 7 & 5 & -9 \\ 2 & 28 & 9 \end{pmatrix}$$

У такий же спосіб конструюється третя матриця `A3`.

```
A3 = Join[A[[All, 1 ;; 2]], Transpose[{B}], 2];
A3 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 2 & -4 & 28 \end{pmatrix}$$

Маючи відповідні матриці, можна використати правило Крамера.

$\{x, y, z\} = \{\mathbf{Det}[\mathbf{A1}], \mathbf{Det}[\mathbf{A2}], \mathbf{Det}[\mathbf{A3}]\}/\mathbf{Det}[A]$

```
{2, 3, 4}
```

■

Застосовувати метод Крамера доволі складно. Тому для розв'язання систем лінійних рівнянь в пакеті *Mathematica* є спеціальна функція `LinearSolve`.

Функція `LinearSolve[M,b]` знаходить вектор *x*, який задовольняє матричному рівнянню $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, де `M` – матриця коефіцієнтів, $\mathbf{b}$ – вектор вільних членів. Наприклад,

$\mathbf{LinearSolve}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4}' & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ еквівалент $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$

$$\left\{\{-1\}, \left\{\frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Таким чином, розв'язком є пара чисел `-1` та `3/2`.

Якщо розв'язок не єдиний, то функція `LinearSolve` повертає тільки один розв'язок.

$\boldsymbol{s} = \mathbf{LinearSolve}[(\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix}), \{-\mathbf{1}, \mathbf{3}\}]$ еквівалент $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

```
{9, -5, 0}
```

В цьому прикладі ми повинні були б отримати нескінченну множину розв'язків. Для отримання загального розв'язку у подібних випадках потрібно використовувати функцію `Solve`.

$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix};$

$\boldsymbol{v} = \{-\mathbf{1}, \mathbf{3}\};$

$\mathbf{Solve}[\boldsymbol{m}.\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} == \boldsymbol{v}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}]$

```
Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

$\{\{b \to 13 - 2a, c \to -9 + a\}\}$

При цьому ми отримали попереджувальне повідомлення про те, що функція `Solve` не впевнена, що змогла визначити всі розв'язки системи. Зверніть увагу також на спосіб запису системи рівнянь у цьому прикладі. Вона має вигляд:

$\boldsymbol{m}.\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} == \boldsymbol{v}$

$\{a + 2b + 3c, 2a + 3b + 4c\} == \{-1,3\}$

Тут запис $\boldsymbol{m}.\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ представляє скалярний добуток матриці $\boldsymbol{m}$ на вектор невідомих $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Приклад. Знайти координати вектора $\boldsymbol{X}$, якщо він перпендикулярний векторам $\boldsymbol{a} = (2, -3, 1)$ та $\boldsymbol{b} = (1, -2, 3)$, а також задовольняє умові $\boldsymbol{X}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 10$.

Р о з в ' я з а н н я . Спочатку створюємо вектори, які фігурують в умові.

$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\};$

$\mathbf{a} = \{2, -3, 1\};$
$\mathbf{b} = \{1, -2, 3\};$
$\mathbf{c} = \{1, 2, -7\};$
Умова перпендикулярності векторів еквівалентна умові рівності нулю їх скалярного добутку $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{X} = 0$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{X} = 0$. Враховуючи це, складаємо та розв'язуємо систему рівнянь.

$\mathbf{Solve}[\{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{X} == \mathbf{0},\ \boldsymbol{b}.\boldsymbol{X} == \mathbf{0},\ \boldsymbol{c}.\boldsymbol{X} == \mathbf{10}\},\ \boldsymbol{X}]$

$\{\{x \to 7, y \to 5, z \to 1\}\}$

Отже, $x = 7, y = 5, z = 1$.

■

Якщо розв'язку системи не існує, то *Mathematica* друкує відповідне повідомлення, а також повторює ввід.

$$\mathbf{LinearSolve}[\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}, \{-\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3}\}]$$

```
LinearSolve::nosol: Linear equation encountered that has no
solution.
LinearSolve[{{1,2},{3,4},{5,6}},{-1,2,-3}]
```

При розв'язанні системи $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$ з використанням функції LinearSolve$[M, b]$ аргумент b може бути вектором або матрицею. Якщо він матриця, то визначаються розв'язки, які відповідають кожному стовпцю матриці b.

$$\boldsymbol{s} = \mathbf{LinearSolve}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{12} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\right]$$

```
{{2, 1}, {4, 0}, {-1, 0}}
```

$\mathbf{s}$ // **MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут перший розв'язок {2,4,-1} міститься у першому стовпці матриці **s**, а другий {1,0,0} – у другому.

Для розв'язання систем лінійних рівнянь корисною є функція зведення матриці до діагонального вигляду (якщо це можливо). Функція RowReduce[Matr] виконує зведення матриці методом Гауса. При цьому невироджена матриця буде зводитися до одиничної.

$$\mathbf{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \end{pmatrix}\right] \mathbf{//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}\right] \mathbf{//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RowReduce}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6}\\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9}\end{pmatrix}\right]\mathbf{//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

В останній інструкції у ненульовій виродженій матриці (визначник нуль) третій рядок після зведення виявився рівним нулю.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y-z=0\\ 3x+2y+z=5,\\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$$

використовуючи функції `Solve`, `LinearSolve` та `RowReduce`.

Ось три різних способи розв'язання цієї системи.

$$\mathbf{Solve}[\{\mathbf{x+y-z==0,\ 3x+2y+z==5,\ 4x-y+5z==3}\},\{\mathbf{x,y,z}\}]$$

$$\{\{x\to -1, y\to 3, z\to 2\}\}$$

$$\mathbf{LinearSolve}[\{\{\mathbf{3,2,1}\},\{\mathbf{1,1,-1}\},\{\mathbf{4,-1,5}\}\},\{\mathbf{5,0,3}\}]$$

```
{-1, 3, 2}
```

$$\mathbf{RowReduce}[\{\{\mathbf{1,1,-1,0}\},\{\mathbf{3,2,1,5}\},\{\mathbf{4,-1,5,3}\}\}]\mathbf{//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

В останній інструкції ми використали зведення розширеної матриці системи до діагонального вигляду. Після зведення розв'язок міститься в останньому стовпці результуючої матриці.

Відзначимо, що ви можете розв'язати останній приклад ще одним способом – використовуючи правило Крамера.

4. Функції та графіки.

В системі *Mathematica* будь-які інструкції виконуються за допомогою функцій. У цій главі мова йтиметься про математичні функції та про функції, які призначені для побудови їх графіків.

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X поставлено у відповідність число y, то кажуть, що y є функцією x, і пишуть $y=f(x),\ x\in X$. Буква x називається незалежною змінною, або аргументом, а y – залежною змінною, або функцією. Під символом f розуміють правило, за яким для кожного x визначається y. Множина X називається областю визначення функції.

Основні способи задання функції: аналітичний (за допомогою формул), графічний та табличний. При аналітичному способі задання існує деякий базовий набір функцій, які зустрічаються найчастіше. Такі функції вивчаються у школі. Це степенева, показникова, логарифмічна та тригонометричні функції. Їх зазвичай називають елементарними функціями. Всі вони, звісно, є в системі *Mathematica*. Однак при роботі з ними слід враховувати деякі особливості. Так

всі вбудовані в *Mathematica* імена функцій починаються з великої літери (Sin, Log, та ін.). Аргументи функцій заключають у квадратні дужки, а не круглі (Sin[x]). Якщо ви бажаєте отримати правильну відповідь, не використовуйте Sin(x) або sin(x) або sin[x], ви повинні використовувати тільки Sin[x].

Комбінуючи елементарні функції, можна створювати свої функції. Наприклад, інструкція

$$\boldsymbol{g[\text{x\_}] := x^2 + \text{x Sin}[x]}$$

створює функцію, значення якої обчислюється за правилом, записаним справа після знака присвоювання = (або відкладеного присвоювання :=). Тут `g` – ім'я функції (таке як `Sin` для функції `Sin[x]`). Знак := представляє відкладене присвоювання, яке виконується в той момент, коли відбувається конкретне обчислення значення функції. Якщо використовується знак =, то створення функції в робочому просторі системи виконується негайно.

При створенні функції в лівій частині необхідно використовувати ім'я аргументу з підкресленням, а в правій – без підкреслення. Наприклад:

$$\boldsymbol{f[\text{x\_}] := x^2}$$

Функцію можна викликати з різними типами аргументів, наприклад, з числовим аргументом

$$\boldsymbol{f[5]}$$

25

Можна використовувати функцію з символьним виразом в якості аргументна.

$$\boldsymbol{f[c + b]}$$

$$\boldsymbol{(b + c)^2}$$

В правій частині операції присвоювання можна використовувати декілька інструкцій, розділених точкою з комою. Результатом такої функції буде значення останнього виразу у ланцюжку. Наприклад, інструкція

$$\boldsymbol{f[\text{x\_}] := (y = 3;\ x^y);}$$

створює функцію $f(x) = x^3$.

Загальний спосіб створення функції користувача полягає у використанні ключового слова `Function`.

```
func = Function[x, body]
```

Так визначається функція з одним формальним параметром (змінною) *x*. Тут `func` ім'я функції, таке як `Sin`, `Log`, а `body` – вираз, який визначає правило обчислення. Наприклад,

$$\boldsymbol{z = \text{Function}[x, x^2];}$$

$$\boldsymbol{z[2]}$$

4

Ідентифікатор `z`, який стоїть зліва, є ім'ям функції. Перше входження *x* у правій частині позначає ім'я аргументу, потім слідує вираз, який описує правило обчислення значення функції. Вираз може складатися з декількох інструкцій, розділених точкою з комою. Результат обчислення останнього виразу в такій послідовності буде результатом обчислення функції.

Функцію можна визначити без зазначення імен її аргументів. В такому випадку для звернення до них слід використовувати позначки #1 (перший аргумент), #2 (другий аргумент) і т.д.

`func=Function[body]`

де `func` ім'я функції, `body` – вираз, який визначає правило обчислення. Наприклад:

$$\mathbf{f2 = Function[\#1^2]}$$

$$\#1^2\&$$

Ідентифікатор #1 заміняє ім'я першого (та єдиного) аргументу. Після цього у виразах можна використовувати `f2[x]` або замість *x* підставляти конкретні значення, наприклад, `f2[2]`.

Синонімом основного визначення функції є її постфіксне визначення. Наприклад:

$$\mathbf{funcname = (\#1^2)\&}$$

$$\#1^2\&$$

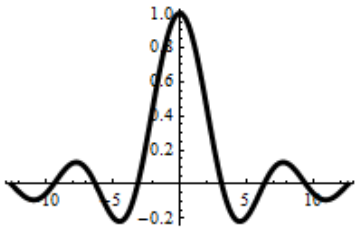
Такий запис часто повертається системою. Значок **&** використовується замість ключового слова `Function` після вказання тіла функції. Таким чином, останній запис рівнозначний постфіксному використанню слова `Function`.

$$\mathbf{funcname} = \overbrace{\left(\#1^2\right)//\text{Function}}^{\&}$$

У тілі функції аргумент позначається як # (або #1). Саме ім'я функції позначається #0; ## використовується для позначення всього списку аргументів, ##n позначає список аргументів, починаючи з n-того.

Графік функції, яка задана формулою $y = f(x)$, будується за допомогою інструкції `Plot[f(x),...]`. Наприклад:

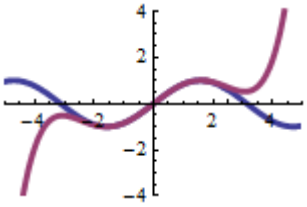
$$\mathbf{Plot[Sin[x]/x, \{x, -4 * Pi, 4 * Pi\}, PlotStyle \rightarrow \{Thickness[0.01], Black\}]}$$



Перший аргумент – вираз `f[x]` (права частина рівняння $y = f(x)$), графік якого треба побудувати. Другий аргумент визначає інтервал зміни незалежної змінної *x*. *Mathematica* автоматично обирає масштаб по вертикальній осі та обирає достатню кількість точок, щоб крива була гладкою. Окрім того, можна задати колір, товщину та стиль лінії (пунктирна, штрих-пунктирна та ін.). Всі ці параметри можна змінювати за допомогою опцій (необов'язкових аргументів). Вони задаються у вигляді `ім'я_опції->значення`. В останній інструкції за допомогою опції `PlotStyle` ми задали товщину та колір лінії. Якщо значення опціям не надаються, то система сама обирає для них значення, прийняті за замовчуванням.

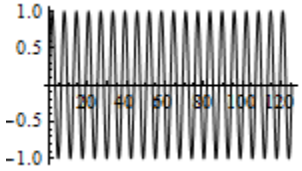
Можна зобразити два і більше графіка в спільних осях, використовуючи список функцій (виразів) в якості першого аргументу команди `Plot`.

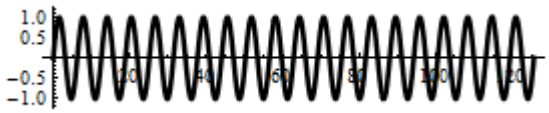
Plot[{**Sin**[x], $x - x^3/6 + x^5/120$}, {x, −**5**, **5**}]



Mathematica зазвичай будує графіки з відношенням довжина/ширина $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$, що приблизно дорівнює 1.61803 (відоме, як Золотий Переріз). Змінити екранне відношення висоти та ширини графічної області можна за допомогою опції `AspectRatio`. Наприклад, наступний графік зліва виглядає занадто густо.

Plot[**Sin**[x], {x, **0**, **40**π}] (* наступний графік зліва *)





Графік буде виглядати краще, якщо його трохи розтягнути (тобто зменшити відношення висота/ширина)

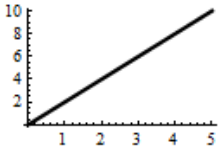
Plot[**Sin**[x], {x, **0**, **40Pi**}, **AspectRatio** → **0.2**] (* попередній графік справа *)

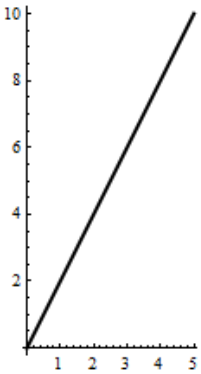
Опція `AspectRatio->число` визначає відношення довжин осей графіка (висота/довжина). У наступному прикладі фізичний нахил лінії відрізняється від того, як ми собі це уявляємо із вигляду функції.

Plot[**2**x, {x, **0**, **5**}] (* наступний рисунок зліва *)

Так виходить тому, що за замовчуванням задається різний масштаб в горизонтальному та вертикальному напрямках. Установка `AspectRatio-> Automatic` забезпечує для цього прикладу однаковий масштаб по *x* та *y*.

Plot[**2**x, {x, **0**, **5**}, **AspectRatio** → **Automatic**] (* наступний рисунок справа *)



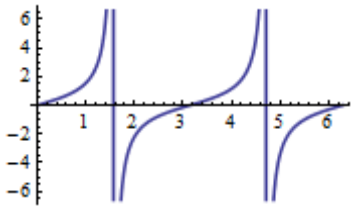
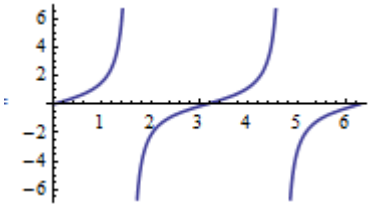


Для виключення з графіка особливих точок використовується опція `Exclusions`, якій передається список точок, для яких графік не слід будувати. Порівняйте

Plot[**Tan**[x], {x, **0**, **2Pi**}] (* наступний графік зліва *)

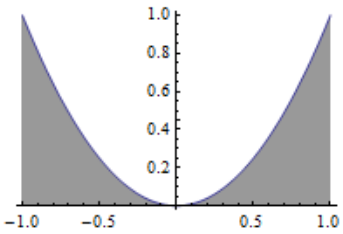
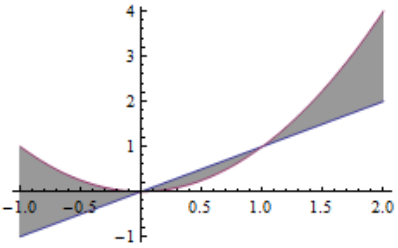
Plot[**Tan**[x], {x, **0**, **2Pi**}, **Exclusions** → {x = **Pi/2**, **3Pi/2**}];

(* наступний графік справа *)

Функцію `Plot` можна використовувати для побудови графіків із зафарбованими областями між кривими. Для цих цілей існує опція `Filling->level`. З її допомогою можна задати способи заповнення: між кривою та віссю (`Axis`), між кривою та горизонтальною прямою на заданому рівні (`число`), та ін. Наприклад:

Plot$[x^2, \{x, -1, 1\}$, **Filling** $\rightarrow$ **Axis**$]$ (* наступний графік зліва *)

Опцію `Filling` можна використовувати для вказання того, між якими кривими графіка слід заповнювати область.

Plot$[\{x, x^2\}, \{x, -1, 2\}$, **Filling** $\rightarrow \{1 \rightarrow \{2\}\}]$ (* попередній рисунок справа *)

Тут опція `Filling ->{1->{2}}` вказує системі зафарбувати область між першою та другою кривою.

Функції декількох змінних створюються аналогічно функціям однієї змінної. Наприклад:

Remove$[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}]$;

$z[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = x^2 + y^2$;

Тут `z` – ім'я функції двох змінних. При цьому у лівій частині використовуються імена аргументів з підкресленням, а у правій – без підкреслення.

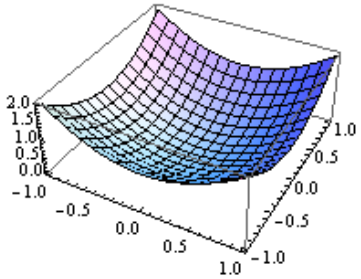
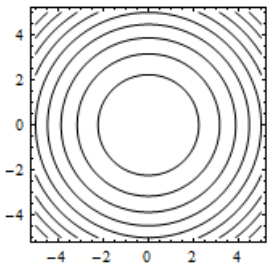
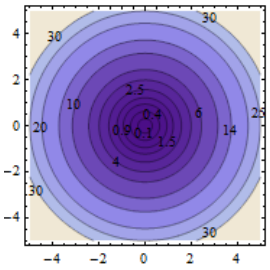
З функцією $z(x, y)$ можна працювати як із звичайною математичною функцією. Наприклад, можна обчислити значення функції в точці.

$\mathbf{z}[2, 3]$

```
13
```

За допомогою функції `Plot3D` можна будувати графік функції 2-х змінних. Це буде поверхня у просторі.

Plot3D$[z[x, y], \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}]$ (* наступний рисунок зліва *)

Для зображення функцій двох змінних часто бувають корисними графіки ліній рівня (ліній сталого значення). Такий графік може бути побудований функцією `ContourPlot`.

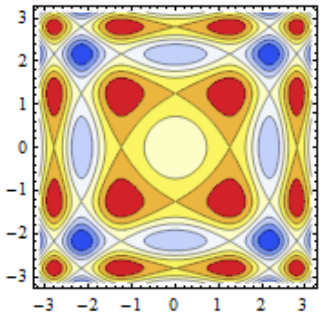
```
ContourPlot[z[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, ContourShading → False]
                                        (* попередній рисунок по центру *)
```

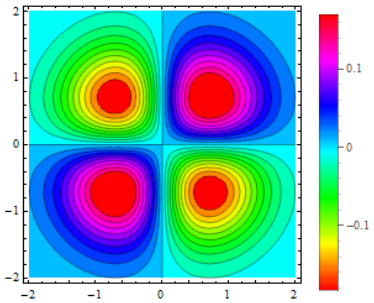
Опція `ContourShading->False` відміняє режим фарбування областей між лініями рівня. Кількість ліній рівня на графіку можна задати опцією `Contours->num` або `Contours->список_значень`. У списку задаються конкретні значення, які функція повинна приймати на лініях. Опція `ContourLabels->True` дозволяє відмітити на лініях рівня ці значення.

```
ContourPlot[z[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, ContourLabels-> True,
                    Contours → {0.1, 0.4, 0.9, 1.5, 2.5, 4, 6, 10, 14, 20, 25, 30}]
                                        (*  попередній рисунок справа  *)
```

Області між лініями рівня можна залити кольором, задавши палітру, яка підходить.

```
ContourPlot[Sin[x^2] + Sin[y^2], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}, ColorFunction →
                    "TemperatureMap"]     (* наступний рисунок зліва *)
```





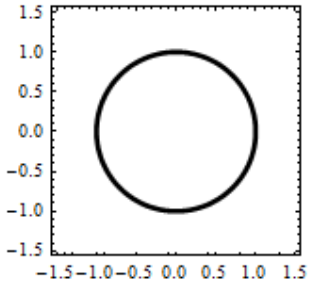
Тут рядок `"TemperatureMap"` позначає одну з багатьох колірних палітр, яку можна використовувати при фарбуванні. Кожний колір відповідає деякому діапазону значень функції. Щоб дізнатися який колір відповідає якому значенню, біля графіка можна зобразити шкалу кольорів. Для цього призначена опція `PlotLegends`.

```
ContourPlot[x y Exp[-x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ColorFunction → Hue,
                    Contours → 20, PlotLegends → Automatic]
                                        (* попередній рисунок справа*)
```

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, яке розв'язане відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана явно. Під неявним зображенням розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної y. Будь-яку явно задану функцію $y = f(x)$ можна представити у неявній формі, записавши рівняння $f(x) - y = 0$.

Для побудови графіка неявно заданої функції використовується та ж інструкція `ContourPlot`, тільки першим аргументом замість виразу записується неявне рівняння: `ContourPlot[f(x,y)==0,...]`.

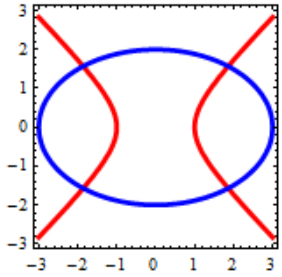
```
ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}]
```



Перший аргумент – рівняння. В *Mathematica* рівняння позначаються символом подвійної рівності (==). Другий та третій аргументи задають діапазони зміни горизонтальної та вертикальної координати.

Можна зображувати декілька кривих на одному графіку, задаючи список рівнянь в якості першого параметра. У наступній інструкції ми будуємо гіперболу та еліпс за їх неявними рівняннями: $x^2 - y^2 - 1 = 0$ та $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$.

```
ContourPlot[{x^2 - y^2 - 1 == 0, x^2/9 + y^2/4 - 1 == 0}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  ContourStyle → {{Red, Thickness[0.02]}, {Blue, Thickness[0.02]}}]
```

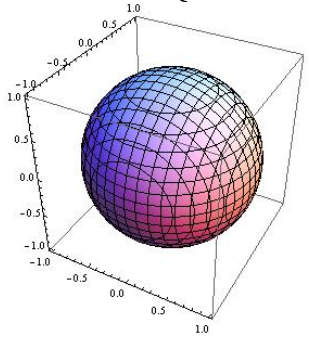


Зверніть увагу на те, що стиль кривих задається опцією `ContourStyle`, а не `PlotStyle` як у функції `Plot`.

Під неявним заданням функції двох змінних розуміють рівняння $F(x, y, z) = 0$, не розв'язане відносно залежної змінної z.

Функція `ContourPlot3D` призначена для побудови поверхонь сталого значення (поверхонь рівня) функцій трьох змінних $F(x, y, z)$ та, зокрема, для побудови поверхонь (функцій) заданих неявно. Наприклад, канонічне рівняння одиничної сфери має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Тоді сферу можна побудувати наступною інструкцією:

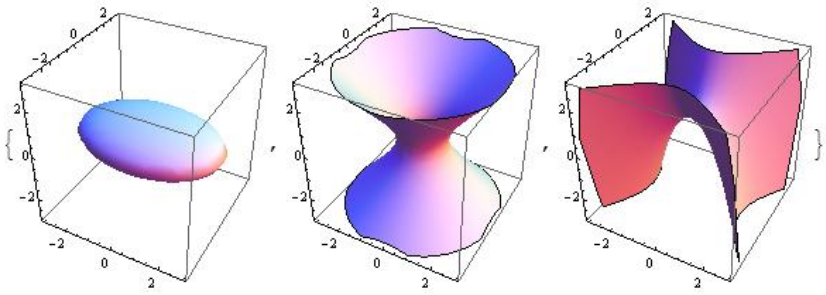
```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 - 1 == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```



Перший аргумент функції `ContourPlot3D` – рівняння. Другий, третій та четвертий аргументи задають діапазони зміни незалежних (*x* та *y*) та залежної змінної `z`.

Приклад. Побудувати графіки еліпсоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$, однополого гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=1$, та гіперболічного параболоїда $x^2-y^2+z=1$.

```
c1 = ContourPlot3D[x^2/9 + y^2/4 + z^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3},
                                                        Mesh → None];
c2 = ContourPlot3D[x^2 + y^2 - z^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3},
                                                        Mesh → None];
c3 = ContourPlot3D[x^2 - y^2 + z == 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3},
                                                        Mesh → None]
{c1, c2, c3}
```



Тут опція `Mesh→None` відміняє відображення координатної сітки на поверхні. Замість списку `{c1, c2, c3}` можна виконати інструкцію:

```
GraphicsRow[{c1, c2, c3}]
```

Вона відобразить графічні об’єкти у рядок без фігурних дужок.

■

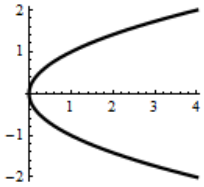
Нехай задані дві функції

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (1)$$

однієї незалежної змінної *t*, яка називається параметром. Якщо *t* змінюється, то точка (x,y) на площині переміщується, описуючи деяку лінію. Такий спосіб задання кривої називається параметричним. Якщо з першого рівняння (1) виключити параметр *t* (виразити *t* через *x*), і результат підставити у друге рівняння (1), то вийде функція $y=\psi(t(x))=f(x)$. Але таке перетворення не завжди доцільне і не завжди можливе. Тому для задання функції доводиться користуватися формулами (1), які називають параметричним способом задання функції.

Графіки кривих на площині, які задаються параметрично, будуються за допомогою функції `ParametricPlot`.

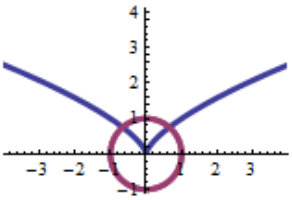
```
ParametricPlot[{t^2, t}, {t, -2, 2}, PlotStyle → {Black, Thickness[0.02]}]
```



Перший аргумент – список двох виразів $\{\varphi(t),\psi(t)\}$, які визначають координати *x* та *y* як функції параметра *t*. Другий аргумент визначає діапазон зміни параметра *t*. Більшість опцій функції `ParametricPlot` використовуються так само, як опції функції `Plot`. Наприклад, опція `AspectRatio->Automatic` використовується для однакового масштабування по осям. Опція `PlotStyle` може бути використана для зображення кривих з різним штрихуванням, товщиною та кольором.

Якщо ви бажаєте зобразити більш ніж одну параметричну функцію, використовуйте список списків.

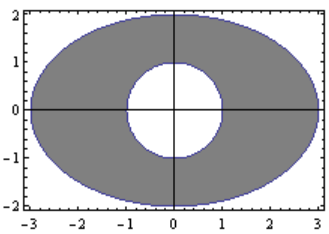
```
ParametricPlot[{{t^3, t^2}, {Cos[πt], Sin[πt]}}, {t, -2, 2},
                                    PlotStyle → Thickness[0.02]]
```



Функція `ParametricPlot` не має опції `Filling`. Для заповнення кольором області між двома кривими $\mathbf{r}_1(u)=(x_1(u),y_1(u))\ (u_0\le u\le u_1)$ та $\mathbf{r}_2(u)=(x_2(u),y_2(u))\ (u_0\le u\le u_1)$, заданими параметрично, потрібно записати «параметричне рівняння області», обмеженої цими кривими, і у функції `ParametricPlot` задати діапазон зміни двох параметрів. Рівняння області може мати вигляд $\mathbf{r}(u,v)=v\,\mathbf{r}_1(u)+(1-v)\mathbf{r}_2(u)\ \ (u_0\le u\le u_1,\ 0\le v\le 1)$, або у покоординатній формі $x(u,v)=v\,x_1(u)+(1-v)x_2(u),\ \ y(u,v)=v\,y_1(u)+(1-v)y_2(u)$.

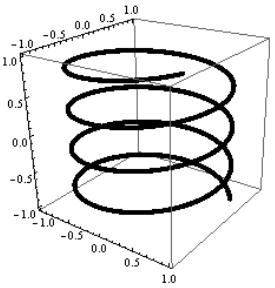
Зафарбуємо, наприклад, область між одиничним колом $\mathbf{r}_1(u)=(\cos u,\sin u)\ (0\le u\le 2\pi)$ та еліпсом $\mathbf{r}_2(u)=(3\cos u,2\sin u)\ (0\le u\le 2\pi)$.

```
r1[u_] = {Cos[u], Sin[u]};
r2[u_] = {3 Cos[u], 2 Sin[u]};
ParametricPlot[{v r1[u] + (1 - v)r2[u]}, {u, 0, 2π}, {v, 0, 1},
                                    Mesh-> None, PlotStyle → Gray]
```



Для побудови тривимірних кривих та поверхонь за їх параметричними рівняннями призначена функція `ParametricPlot3D`. Наприклад:

```
ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], t/12}, {t, -12, 12},
        AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Black, Thickness[0.02]}]
```



Перший аргумент – це список трьох виразів, які визначають *x*, *y* та *z* координати, як функції параметра *t*. Другий аргумент визначає область зміни параметра. Інші опції аналогічні опціям функції `Plot`.

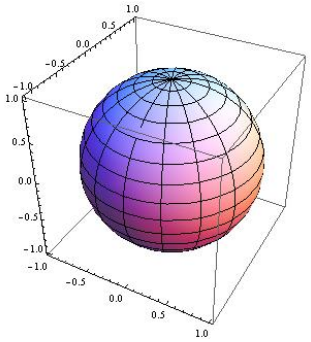
Щоб дізнатися, які опції має функція, можна виконати інструкцію `Options`. В якості аргументу їй треба передати ім'я функції, опції якої ви бажаєте дізнатися.

Options[ParametricPlot3D]

У вікні документа буде відображений список всіх опцій функції та їх значення за замовчуванням.

Для побудови поверхні за її параметричним рівнянням функції `ParametricPlot3D` в якості першого аргументу передається список трьох виразів, які містять два параметри. Наприклад:

ParametricPlot3D[{Cos[*u*]Cos[*v*], Cos[*u*]Sin[*v*], Sin[*u*]},
{*u*, −*π*/2, *π*/2}, {*v*, 0, 2*π*}]



Перший аргумент – це список трьох виразів, які визначають *x*, *y* та *z* координати, як функції двох параметрів *u* та *v*. Другий та третій аргументи – списки, які визначають діапазони зміни параметрів *u* та *v*.

5. Геометричні побудови.

Побудова геометричних об'єктів в системі *Mathematica* зазвичай виконується за допомогою рівнянь або нерівностей. Точки зображаються за їх координатами, криві та поверхні – за їх рівняннями, області – за допомогою нерівностей. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M\left(5/2, \sqrt{6}/4\right)$ та $N\left(-2, \sqrt{15}/5\right)$.

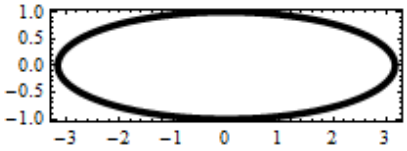
Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Йому повинні задовольняти координати точок M та N. Підставивши їх у рівняння, отримаємо систему відносно невідомих *a* та *b*. Маємо

$$\mathbf{Clear[a, b]}$$
$$\mathbf{\{Mx, My\} = \{5/2, \sqrt{6}/4\};}$$
$$\mathbf{\{Nx, Ny\} = \{-2, \sqrt{15}/5\};}$$
$$\boldsymbol{s = Solve[\{\frac{Mx^2}{a^2} + \frac{My^2}{b^2} == 1, \frac{Nx^2}{a^2} + \frac{Ny^2}{b^2} == 1\}, \{a, b\}]}$$
$$\{\{a \to -\sqrt{10}, b \to -1\}, \{a \to -\sqrt{10}, b \to 1\}, \{a \to \sqrt{10}, b \to -1\}, \{a \to \sqrt{10}, b \to 1\}\}$$

У системи 4 пари розв'язків. Можна вибрати будь-яку з них, але геометричний зміст має лише пара додатних значень. Використовуючи останню пару значень параметрів *a* та *b*, намалюємо еліпс.

$$\mathbf{\{a, b\} = \{a, b\}/.s[[4]];}$$ (* присвоюємо параметрам *a* та *b* значення *)

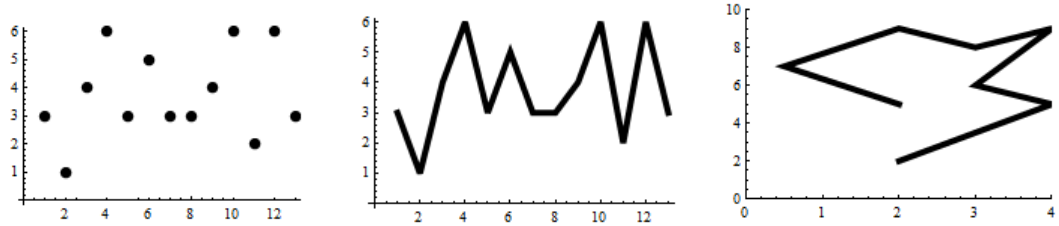
$$\mathbf{ContourPlot[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1, \{x, -a, a\}, \{y, -b, b\},}$$
$$\mathbf{ContourStyle \to \{Black, Thickness[0.02]\},\ AspectRatio -> Automatic]}$$



■

Функція `ListPlot` графічно зображає список значень у двох вимірах. Номер елемента у списку представляє горизонтальну координату точки, а саме значення – вертикальну.

$$\mathbf{ListPlot[\{3, 1, 4, 6, 3, 5, 3, 3, 4, 6, 2, 6, 3\}]}$$ (* наступний рисунок зліва *)



Розмір точок, які використовуються для графіка, можна збільшити за допомогою опції `PlotStyle`.

$$\mathbf{ListPlot[\{3, 1, 4, 6, 3, 5, 3, 3, 4, 6, 2, 6, 3\}, PlotStyle \to PointSize[0.02]]}$$

В цьому прикладі число 0.02 в опції `PointSize` визначає розмір точки, як долю розміру графіка.

Для з'єднання точок використовується опція `Joined->True`.

$$\mathbf{ListPlot[\{3, 1, 4, 6, 3, 5, 3, 3, 4, 6, 2, 6, 3\}, PlotStyle -> Thickness[0.01],}$$
$$\mathbf{Joined -> True]}$$ (* попередній рисунок всередині*)

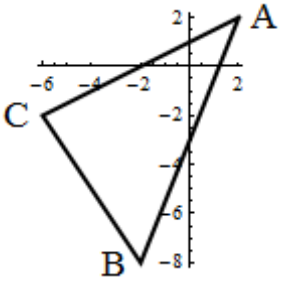
Якщо потрібно задати координати *x* та *y* кожної точки, то слід використовувати список пар чисел.

$$\mathbf{ListPlot[\{\{2, 5\}, \{0.5, 7\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{2, 2\}\},}$$
$$\mathbf{PlotRange -> \{\{0, 4\}, \{0, 9\}\}, PlotStyle -> \{Thickness[0.01], Black\},}$$
$$\mathbf{Joined -> True]}$$ (* попередній рисунок справа *)

Приклад. Дано вершини трикутника $A(2,2)$, $B(-2,-8)$, $C(-6,-2)$. Скласти рівняння медіани CD та висоти CE. Намалювати трикутник, медіану та висоту.

Спочатку задаємо координати вершин та зображаємо трикутник.

$\mathbf{Unprotect[C, D]};$
$\mathbf{A} = \{\mathbf{2, 2}\};$
$\mathbf{B} = \{\mathbf{-2, -8}\};$
$\mathbf{C} = \{\mathbf{-6, -2}\};$
$\mathbf{p1 = ListPlot[\{}\boldsymbol{A, B, C, A}\mathbf{\}, Joined \to True,}$
$\mathbf{PlotStyle \to \{Black, Thickness[0.01]\}]}$



Зверніть увагу на те, що результат малювання, який повертається функцією `ListPlot`, збережений у змінній `p1`.

Знаходимо координати точки D – середини сторони AB, та складаємо рівняння прямої, яка проходить через точки C та D.

$\mathbf{D = (A + B)/2}$

$$\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{1}]]}{\boldsymbol{D}[[\mathbf{1}]] - \boldsymbol{C}[[\mathbf{1}]]} == \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{2}]]}{\boldsymbol{D}[[\mathbf{2}]] - \boldsymbol{C}[[\mathbf{2}]]}$$

$$\frac{6 + x}{6} == -2 - y$$

Будуємо медіану за неявним рівнянням, але не відображаємо її графік. Для цього закінчуємо графічну інструкцію точкою з комою (звичайно, можна відобразити). Результат малювання, який знаходиться в пам'яті системи, зберігаємо у змінній `p2`.

$$\mathbf{p2 = ContourPlot[}\frac{\mathbf{x - C[[1]]}}{\mathbf{D[[1]] - C[[1]]}} == \frac{\mathbf{y - C[[2]]}}{\mathbf{D[[2]] - C[[2]]}}\mathbf{, \{x, -8, 3\}, \{y, -8, 2\},}$$
$$\mathbf{ContourStyle -> \{Blue, Thickness[0.02]\}];}$$

Якщо $\vec{AB} = \alpha\, \boldsymbol{i} + \beta\, \boldsymbol{j}$, то рівнянням висоти CE буде $\alpha(x - x_C) + \beta(y - y_C) = 0$. У позначеннях системи відповідний код буде мати вигляд:

$\mathbf{AB = B - A}$

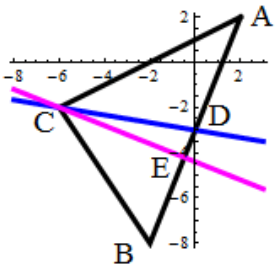
$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{1}]]) * \mathbf{AB}[[\mathbf{1}]] + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{2}]]) * \mathbf{AB}[[\mathbf{2}]] == \mathbf{0}$

Аналогічно попередньому, зображаємо в пам'яті висоту CE та не відображаємо її.

$\mathbf{p3 = ContourPlot[}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{1}]]) * \mathbf{AB}[[\mathbf{1}]] + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}[[\mathbf{2}]]) * \mathbf{AB}[[\mathbf{2}]] == \mathbf{0},$
$\mathbf{\{}\boldsymbol{x}\mathbf{, -8, 3\}, \{}\boldsymbol{y}\mathbf{, -8, 2\}, ContourStyle \to \{Magenta, Thickness[0.02]\}];}$

Щоб на одному графіку відобразити три графічних об'єкта `p1`, `p2` та `p3`, використовуємо функцію `Show`. Для цього їй через кому передаються імена змінних, які вказують на ці об'єкти.

$\mathbf{Show[p1, p2, p3, PlotRange \to All]}$



У функції `Show` є опції, багато з яких аналогічні опціям функції `Plot`. Використана нами в прикладі опція `PlotRange→All` примушує систему відображати графіки повністю (без обрізання країв).

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1,2,3)$, $B(-2,-1,1)$, $C(0,4,2)$. Графічно зобразити точки та площину.

Спочатку вводимо координати точок і «малюємо» точки в пам'яті системи.

```
Unprotect[C];
A = {1, 2, 3};
B = {-2, -1, 1};
C = {0, 4, 2};
p1 = ListPointPlot3D[{A, B, C},
                     PlotStyle → {Directive[PointSize[0.03], Red]}];
```

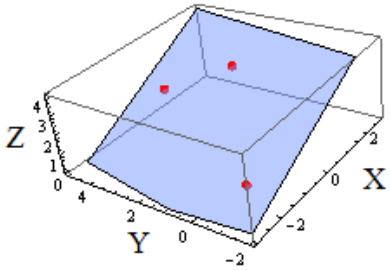
Тут використана функція `ListPointPlot3D`, яка призначена для зображення множини точок у просторі.

Рівняння площини, яка проходить через точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, може бути записане у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

Код обчислення визначника, зображення площини за отриманим рівнянням, і накладення зображення точок може мати наступний вигляд:

```
P = {x, y, z};
Eq = Det[{P - A, B - A, C - A}]
22 + 7 x - y - 9 z
p2 = ContourPlot3D[Eq == 0, {x, -3, 3}, {y, -2, 5}, {z, 0, 4},
                   Mesh → None, ContourStyle → Opacity[0.5]];
Show[p1, p2, PlotRange → All, AspectRatio-> Automatic]
```



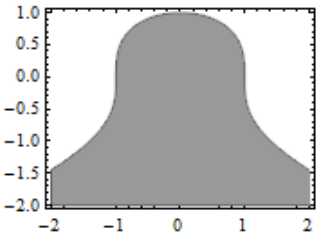
■

Для побудови графіків плоских областей призначена функція `RegionPlot`, яка має наступний формат:

RegionPlot[вираз,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},...].

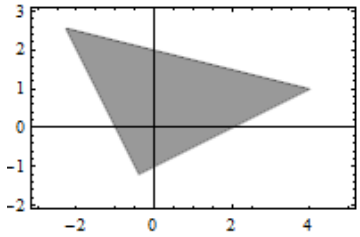
Першим її аргументом є вираз, який залежить, наприклад, від змінних *x* та *y*, і який повинен приймати значення True (Істина) або False (Брехня). Другим або третім аргументами є діапазони зміни параметрів *x* та *y*, які задаються у вигляді списків. Функція зафарбовує сірим кольором ту частину площини (*x*, *y*), в якій вираз приймає значення True.

RegionPlot$[x^2 + y^3 < 1, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 1\},$ **AspectRatio** $\rightarrow$ **Automatic**$]$



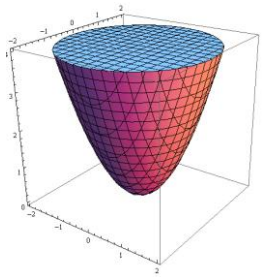
Вирази можна об'єднувати за допомогою логічних операцій And(&&) – логічне 'І', Or(||) – логічне 'АБО', та деяких інших.

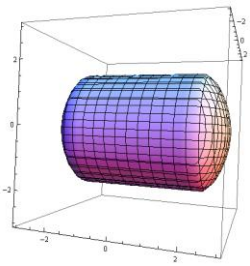
RegionPlot$[\{-x + 2y + 2 \geq 0$ && $x + 4y - 8 \leq 0$ && $2x + y + 2 \geq 0\},$
$\{x, -3, 5\}, \{y, -2, 3\},$ **Axes** $\rightarrow$ **True**, **AspectRatio** $\rightarrow$ **Automatic**$]$



Функція RegionPlot3D[expr,...] зображує тривимірні області, використовуючи логічний вираз expr від трьох змінних, який повинен приймати значення True або False. Функція зображує поверхню тривимірної області, в середині якої вираз expr приймає значення True.

RegionPlot3D$[x^2 + y^2 - z < 0, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, 0, 4\}]$
(* наступний рисунок зліва *)



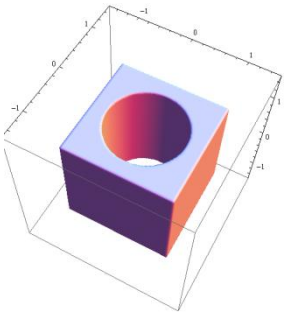


Вирази можна об'єднувати з використанням логічних операцій.

RegionPlot3D$[x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ && $y^2 + z^2 \leq 4,$
$\{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \{z, -3, 3\}]$ (* попередній рисунок справа *)

При цьому логічний вираз може бути складений з будь-якої комбінації нерівностей.

RegionPlot3D$[-1 \leq x \leq 1$ && $-1 \leq y \leq 1$ && $-1 \leq z \leq 1$ &&
$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}, \{x, -1.5, 1.5\}, \{y, -1.5, 1.5\}, \{z, -1.5, 1.5\},$
Mesh $\rightarrow$ **None**, **PlotPoints** $\rightarrow$ **100**$]$

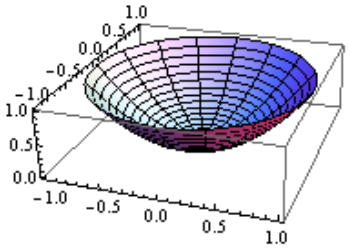


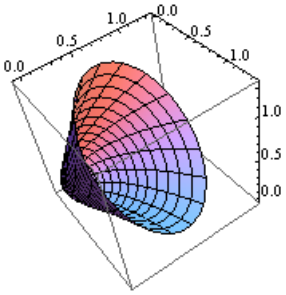
Іноді вам буде потрібно зобразити поверхню обертання. Для цього можна використати функцію `RevolutionPlot3D`. У форматі

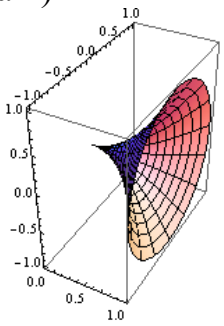
`RevolutionPlot3D[fz(x),{x,`x_{min}`,`x_{max}`}]`

вона будує поверхню обертання кривої $z = f_z(x)$, заданою в площині XZ, навколо осі Z.

RevolutionPlot3D$[x^2, \{x, 0, 1\}]$ (* наступний рисунок зліва *)







За допомогою опції `RevolutionAxis->{v1,v1,v1}` можна задати вісь обертання (напрямний вектор осі).

RevolutionPlot3D$[x^2, \{x, 0, 1\}, \mathbf{RevolutionAxis} \to \{1, 1, 1\}]$

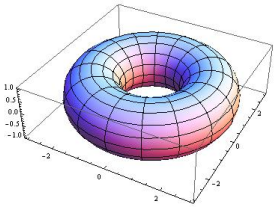
(* попередній рисунок посередині *)

RevolutionPlot3D$[x^2, \{x, 0, 1\}, \mathbf{RevolutionAxis} \to \{1, 0, 0\}]$

(* попередній рисунок справа *)

У форматі `RevolutionPlot3D[{fx,fz},{t,`t_{min}`,`t_{max}`}]` функція будує поверхню обертання кривої $x = f_x(t), z = f_z(t)$ навколо осі Z (крива задана параметрично в площині XZ).

RevolutionPlot3D$[\{2 + \mathbf{Cos}[t], \mathbf{Sin}[t]\}, \{t, 0, 2\mathbf{Pi}\}]$



У функції `RevolutionPlot3D` є і інші можливості. Її можна використовувати для побудови поверхонь, рівняння яких задані в циліндричних координатах. Можна будувати поверхню обертання просторової кривої. Можна побудувати тільки частину поверхні обертання, задавши, наприклад, діапазон кута повороту кривої відносно площини XZ. Зі всіма цими можливостями ви можете ознайомитися самостійно, користуючись довідковою системою.

6. Диференціальне числення.

6.1 Обчислення границь

Для обчислення границь використовується функція `Limit`.

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{\mathbf{Sin}[x]}{x}, x \to 0\right]$$

```
1
```

Перший аргумент функції `Limit` – вираз, границя якого відшукується. Другий аргумент визначає змінну і значення, до якої вона прямує. Запис `x⟶0` читається, як «*x* прямує до нуля». Розв'яжемо декілька прикладів.

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, x \to 0\right]$$

```
1
```

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{(1+x)^2-1}{x}, x \to 0\right]$$

```
2
```

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{10^x-1}{x}, x \to 0\right]$$

Log[10]

$$\mathbf{Limit}[x\,\mathbf{Log}[x], x \to 0]$$

0

Можна обчислювати границі, коли змінна прямує до нескінченності. Вона (нескінченність) позначається ідентифікатором `Infinity` або символом ∞.

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2}, x \to \infty\right]$$

```
1
```

$$\mathbf{Limit}\left[\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}, x \to -\infty\right]$$

```
-1
```

$$\mathbf{Limit}\left[\left(1+\frac{z}{x}\right)^x, x \to \mathbf{Infinity}\right]$$

e^z

$$\mathbf{Limit}\left[\left(\frac{2n+z}{2n-z}\right)^n, n \to \infty\right]$$

e^z

Приклад. Знайти асимптоти функції $\frac{x^4+2x+3}{2x^3+x^2+1}$. Маємо.

$$f[\mathbf{x\_}] = \frac{x^4+2x+3}{2x^3+x^2+1};$$

$$a = \mathbf{Limit}\left[\frac{f[x]}{x}, x \to \infty\right]$$

$$\frac{1}{2}$$

$$b = \text{Limit}[f[x] - a\,x, x \to \infty]$$

$$-\frac{1}{4}$$

Таким чином, похила асимптота має рівняння $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Розв'язавши рівняння $2x^3 + x^2 + 1 = 0$, знаходимо точки, в яких можуть знаходитися вертикальні асимптоти.

$$\text{Solve}[1 + x^2 + 2x^3 == 0, x]$$

$$\{\{x \to -1\}, \{x \to \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{7})\}, \{x \to \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{7})\}\}$$

Оскільки

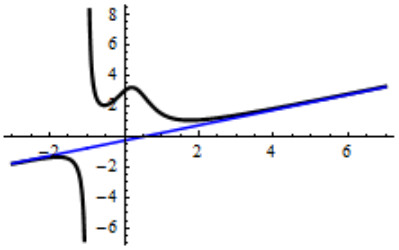
$$\text{Limit}[f[x], x \to -1]$$

$$\infty$$

то в точці $x = -1$ існує вертикальна асимптота.

Побудуємо графік функції та її похилу асимптоту, а точку $x = -1$ виключимо з графіка.

$$\text{Plot}[\{f[x], a\,x + b\}, \{x, -3, 7\}, \text{PlotStyle} -> \{\{\text{Black}, \text{Thickness}[0.01]\}, \{\text{Blue}, \text{Thickness}[0.007]\}\}, \text{Exclusions} \to \{-1\}]$$



■

Можна обчислювати односторонні границі. Для цього в третьому необов'язковому аргументі функції `Limit` потрібно вказати напрям, використовуючи опцію `Direction`. Наступна команда обчислює ліву границю (рухаючись з нуля направо, тобто у додатному напрямку)

$$\text{Limit}\left[\text{Tan}[x], x \to \frac{\pi}{2}, \text{Direction} \to 1\right]$$

$$\infty$$

В наступному прикладі відбувається наближення справа.

$$\text{Limit}\left[\text{Tan}[x], x \to \frac{\pi}{2}, \text{Direction} \to -1\right]$$

$$-\infty$$

Значення опції `Direction` визначає, куди ви бажаєте рухатися, а не звідки ви йдете. Таким чином, від'ємне значення вказує на рух у від'ємному напрямку, тобто на наближення справа.

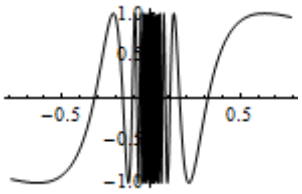
У випадках, коли границя не може бути обчислена, функція `Limit` повертає інтервал зміни значень функції.

$$\text{Limit}[\text{Sin}[1/x], x \to 0]$$

```
Interval[{-1,1}]
```

Щоб зрозуміти, що це означає, побудуємо графік функції.

$\mathbf{Plot}[\mathbf{Sin}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right], \{\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}\}]$



В околі нуля функція $\sin(1/x)$ коливається від -1 до +1, не наближаючись ні до якого значення.

Якщо обчислюється границя функції, про яку немає певної інформації, то повертається неопрацьований ввід.

$\mathbf{Limit}[\boldsymbol{xf}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}]$

$\mathrm{Limit}[xf[x], x \to 0]$

Ви можете використовувати `Limit` для обчислення похідних «реальних» функцій, використовуючи означення похідної, як границі відношення приросту функції до приросту аргументу. Наприклад:

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{x}^{\mathbf{4}};$

$\mathbf{Limit}[\frac{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x} + \mathbf{dx}] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]}{\mathbf{dx}}, \mathbf{dx} \to \mathbf{0}]$

$4x^3$

Звичайно, функція `Limit` не призначена для обчислення похідних. Для цього в системі є більш «розумні» функції. З ними ви познайомитесь в наступному параграфі.

6.2 Похідні та їх застосування.

Будь-яку стандартну функцію або функцію користувача можна диференціювати. Для обчислення похідних в символьній формі використовуються функції `Derivative` та `D`. Перша з них призначена для диференціювання функцій, друга – для диференціювання виразів. Під функцією в системі розуміється правило для обчислення, яке позначається унікальним іменем, наприклад, `Sin`. Якщо після імені функції в квадратних дужках стоїть аргумент, наприклад, `Sin[x]`, то це вже вираз.

Функція `Derivative[n][f]` обчислює `n`–у похідну функції `f` одного аргументу. Наприклад,

$\mathbf{Derivative}[\mathbf{1}][\boldsymbol{f}]$

f'

Замість використання повного імені функції `Derivative` можна писати звичайне позначення зі штрихом. Так записи f', f'' еквівалентні `Derivative[1][f]` та `Derivative[2][f]`. Наприклад:

$\boldsymbol{y}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}};$

$\boldsymbol{y}'$

```
2#1&
```

Тут `y'` – функція, і система повернула постфіксне визначення функції. Однак, `y'[x]` вже вираз (функція `y'` застосовується до аргументу `x`).

$\boldsymbol{y'[x]}$

$3x^2$

Аналогічно, в наступному прикладі `y''` – функція, а `y''[x]` – вираз.

$\boldsymbol{y''[x]}$

$6x$

Так само

$\boldsymbol{f[x\_] := x^2 \mathbf{Sin}[x]}$

$\boldsymbol{f'}$

$2\mathrm{Sin}[\#1]\#1 + \mathrm{Cos}[\#1]\#1^2\&$

результатом інструкції f' є постфіксне визначення функції. Однак, якщо функції передати аргумент, то утворюється вираз

$\boldsymbol{f'[x]}$

$x^2\mathrm{Cos}[x] + 2x\mathrm{Sin}[x]$

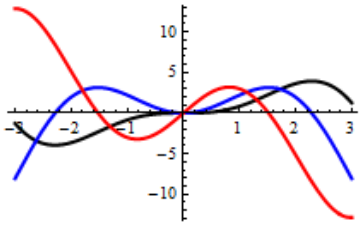
або число

$\boldsymbol{f'[\pi/2]}$

π

Функція `Derivative` зручна при побудові графіків похідних.

$\mathbf{Plot}[\{\boldsymbol{f[x]}, \boldsymbol{f'[x]}, \boldsymbol{f''[x]}\}, \{\boldsymbol{x}, \mathbf{-3}, \mathbf{3}\}]$



Загальна форма функції `Derivative[n1, n2, ...][f]` обчислює похідну `f` за першою змінною n_1 разів, n_2 разів за другою змінною і т.д.

$\boldsymbol{g[x\_, y\_] = \mathbf{Sin}[x\, y]};$

$\mathbf{Derivative}[\mathbf{2}, \mathbf{3}][\boldsymbol{g}][\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ (* $\dfrac{\partial^5 \sin(x\,y)}{\partial x^2 \partial y^3}$ *)

$-6x\mathrm{Cos}[xy] + x^3y^2\mathrm{Cos}[xy] + 6x^2y\mathrm{Sin}[xy]$

Тут інструкція `Derivative[2,3][g]` створює функцію, яку ми застосовуємо до пари аргументів `[x,y]` та отримуємо вираз.

Функція `D` використовується для диференціювання виразів. У форматі `D[expr,x]` вона обчислює частинну похідну виразу `expr` за змінною *x*. Якщо *x* єдина змінна, то обчислюється звичайна похідна функції /виразу однієї змінної.

$\boldsymbol{D[x^n, x]}$

$n\, x^{-1+n}$

У форматі `D[expr,{x,n}]` обчислюється частинна похідна `n`-го порядку виразу `expr` за змінною *x*.

$\boldsymbol{D[x^n, \{x, 4\}]}$

$(-3+n)(-2+n)(-1+n)nx^{-4+n}$

Приклад. Показати, що функція $y = x + \sin 2x$ задовольняє рівнянню $y'' + 4y = 4x$. Маємо.

```
y = x + Sin[2 x];
Simplify[D[y, {x, 2}] + 4 y] == 4 x
True
```

Результат `True` означає, що ліва та права частини рівняння, яке перевіряється, співпадають, тобто функція y йому задовольняє.

Вище ми створили вираз $y = x + \mathrm{Sin}[2x]$. Тому використали оператор диференціювання `D`. Але якщо ви бажаєте використати штрих для диференціювання, то необхідно створити функцію.

```
y[x_] = x + Sin[2x];
Simplify[y''[x] + 4y[x]] == 4x
True
```

■

У форматі `D[f,`x_1`,`x_2`,...]` обчислюється мішана похідна $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots}$ виразу `f`. При цьому диференціювання виконується спочатку за змінною x_1, потім за x_2 і т.д.

```
D[(x^2 + y^2)^3, x, y]
```

(* $\dfrac{\partial^2\left((x^2+y^2)^3\right)}{\partial x \partial y}$ *)

$24\,x\,y\,(x^2 + y^2)$

```
f[x_, y_] := Sin[x y];
D[f[x, y], x, {y, 2}]
```

(* $\dfrac{\partial^3 \sin(x y)}{\partial x \partial y^2}$ *)

$-x^2 y\mathrm{Cos}[xy] - 2x\mathrm{Sin}[xy]$

Зокрема, інструкція `D[f[x],x]` аналогічна запису $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$.

Команда `D[f,{{x1,x2,...}}]` повертає список частинних похідних $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots\right\}$ скалярного виразу `f`.

```
Remove[f, x, y]
D[f[x, y], {{x, y}}]
{f^(1,0)[x, y], f^(0,1)[x, y]}
D[(x^2 + y^2)^2, {{x, y}}]
{4x(x^2 + y^2), 4y(x^2 + y^2)}
```

Запис `D[f,x]` можна замінити на $\partial_x f$. Для такого вводу необхідно використати відповідний трафарет $\partial_{\blacksquare}$ на панелі спеціальних символів, або набрати комбінацію клавіш **`Esc-pd-Esc`** (`p` та `d` це букви). Потім слід ввести **`Ctrl-_`**(підкреслення). З'явиться трафарет вводу частинної похідної $\partial_{\blacksquare}$. У чорний квадратик введіть x та, перемістивши курсор вправо, введіть вираз.

```
∂_x Sin[x]
Cos[x]
```

$\partial_x(a\,x^2)$

$2a\,x$

Запис `D[f,x,y]` може бути введений у вигляді $\partial_{x,y} f$. Вводити треба також як попередній символ $\partial_x f$. При цьому кому між x та y треба вводити, але вона може бути непомітною. Для вводу невидимої коми слід набрати комбінацію клавіш **Esc–,**(кома)**–Esc**.

$\partial_{x\,y}(x^2+y^2)^3$ (* невидима кома *)

$24\,x\,y\,(x^2+y^2)$

$\partial_{x,x,y}\mathrm{Sin}[xy]$ (* видимі коми *)

$-xy^2\mathrm{Cos}[xy]-2y\mathrm{Sin}[xy]$

Ви можете диференціювати «невизначені» функції. Ось, наприклад, правило диференціювання складної функції.

$\mathbf{Remove[f,g]}$

$\partial_x f[g[x]]$

$f'[g[x]]g'[x]$

Ось формула диференціювання добутку двох функцій.

$\partial_x(f[x]g[x])$

$g[x]f'[x]+f[x]g'[x]$

Приклад. Знайти екстремум та точки перегину функції $y=2x^3+3x^2-36x$.

$\mathbf{Clear}[f]$

$f[\mathrm{x\_}]=2\,x^3+3x^2-36x$

Для визначення точок екстремуму знаходимо корені похідної.

$s=\mathbf{Solve}[D[f[x],x]==0,x];$

$\{\mathbf{x1},\mathbf{x2}\}=x/.s$

```
{-3, 2}
```

$\{f''[\mathbf{x1}],f''[\mathbf{x2}]\}$

```
{-30, 30}
```

Оскільки в точці `x1` друга похідна від'ємна, то в ній знаходиться максимум. В точці `x2` друга похідна додатня, отже, в цій точці розташований мінімум.

Для визначення точок перегину знаходимо корені другої похідної.

$\mathbf{Solve}[D[f[x],\{x,2\}]==0,x]$

$\{\{x\to-\frac{1}{2}\}\}$

Таким чином точка `x=-1/2` є критичною точкою другого роду. Щоб переконатися, що вона є точкою перегину, треба дослідити знак другої похідної. Це можна зробити за допомогою функції `Reduce[expr,vars]`. Вона перетворює вирази `expr`, спрощуючи або розв'язуючи рівняння та нерівності, які в них містяться, відносно змінних `vars`.

$\mathbf{Reduce}[\mathbf{D}[\mathbf{f}[\mathbf{x}],\{\mathbf{x},\mathbf{2}\}]<0,x]$

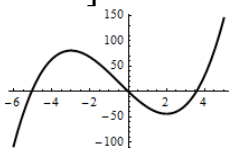
$x<-\frac{1}{2}$

Reduce[D[f[x], {x, 2}] > 0, x]

$x > -\frac{1}{2}$

Лівіше точки `x=-1/2` друга похідна від'ємна, отже, функція опукла. Правіше – функція вгнута. Таким чином, точка `x=-1/2` є точкою перегину. Для перевірки наших висновків побудуємо графік функції.

Plot[$f[x]$, {x, −6, 5}, PlotRange → All]



На графіку добре помітні точки екстремуму. Однак визначити за графіком розміщення точки перегину складно.

■

З курсів вищої математики відомо, що в точці x_0 рівняння дотичної до кривої, заданої явно $y = f(x)$, має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Приклад. Побудувати дотичну до графіка функції $y = \sin \pi x$.

Для цього спочатку створюємо функцію `y[x]`, яка обчислюється за формулою (1).

f[x_] = Sin[πx];

f1[x_] = f'[x]

π Cos[πx]

x0 = 0.6; (* абсциса точки дотику *)

y[x_] = f[x0] + f1[x0](x − x0) (* рівняння дотичної *)

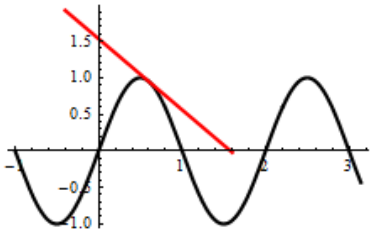
```
0.95105652 - 0.97080552 (-0.6 + x)
```

Після цього окремо створюємо в пам'яті графіки початкової функції та дотичної. Графіки не відображаються (в кінці інструкції стоїть точка з комою) для того, щоб не зображувати лінії окремо. Потім функцією `Show` відображаємо обидва графічних об'єкта.

p1 = Plot[$f[x]$, {x, −1, π}, PlotStyle−> {Black, Thickness[0.01]}];

p2 = Plot[$y[x]$, {x, x0 − 1, x0 + 1}, PlotStyle−> {Red, Thickness[0.01]}];

Show[p1, p2, PlotRange → All]



Змінивши в коді абсцису точки дотику `x0`, ви отримаєте інше рівняння дотичної, і по-іншому зображену пряму.

Відзначимо, що графіки кривої та дотичної були побудовані окремо для того, щоб використати різні діапазони зміни параметра *x*.

■

Нехай крива задана неявним рівнянням $F(x,y)=0$, і точка (x_0,y_0) належить кривій. Рівняння дотичної до кривої в цій точці має вигляд

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0, \qquad (2)$$

а рівняння нормалі

$$F'_x(x_0,y_0)(y-y_0)-F'_y(x_0,y_0)(x-x_0)=0. \qquad (3)$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної та нормалі до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Легко бачити, що параметричне рівняння еліпса має вигляд: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Тоді положення точки на еліпсі можна задавати одним параметром t_0: $x_0=a\cos t_0$, $y_0=b\sin t_0$.

Введемо початкові дані і створимо функцію `F(x,y)`.

```
Remove[x, y, x0, y0, eqT, eqN];
a = 3; b = 2;
F[x_, y_] = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1;
```

Потім побудуємо в пам'яті еліпс.

```
pc1 = ContourPlot[F[x, y] == 0, {x, -a - 1, a + 1}, {y, -b - 1, b + 1},
                  ContourStyle -> {Black, Thickness[0.01]}];
```

Задаючи параметр `t0`, обираємо точку дотику на еліпсі.

```
t0 = π/4;
{x0, y0} = {aCos[t0], bSin[t0]}
```

$$\left\{\frac{3}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right\}$$

Таким чином, точка дотику має координати $\left(3/\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Далі створюємо вирази для лівих частин рівнянь (2) та (3).

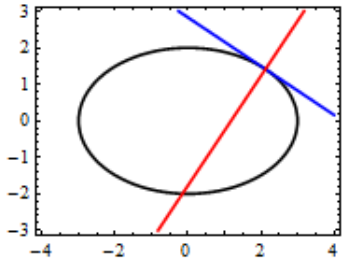
```
eqT = Derivative[1, 0][F][x0, y0](x - x0) +
                  Derivative[0, 1][F][x0, y0](y - y0);
eqN = Derivative[1, 0][F][x0, y0](y - y0) -
                  Derivative[0, 1][F][x0, y0](x - x0);
```

Потім створюємо в пам'яті зображення дотичної та нормалі до еліпса.

```
pc2 = ContourPlot[{eqT == 0, eqN == 0}, {x, -a - 1, a + 1},
      {y, -b - 1, b + 1},
      ContourStyle -> {{Blue, Thickness[0.01]}, {Red, Thickness[0.01]}}];
```

Нарешті малюємо графічні об'єкти (еліпс та прямі).

```
Show[pc1, pc2, AspectRatio -> Automatic]
```



Змінивши значення `t0`, ви поміняєте положення точки дотику. Відповідно до цього зміниться і малюнок.

■

Якщо крива на площині задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, то для точки, в якій $t = t_0$, рівняння дотичної можна записати у вигляді:

$$x = x(t_0) + t \cdot x'(t_0),\ y = y(t_0) + t \cdot y'(t_0). \quad (4)$$

Рівняння нормалі в цій точці можна записати у вигляді:

$$x = x(t_0) + t \cdot y'(t_0),\ y = y(t_0) - t \cdot x'(t_0). \quad (5)$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної та нормалі до циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ в точці $t = 4\pi/3$. Маємо.

```
x[t_] = t - Sin[t];
y[t_] = 1 - Cos[t];
t0 = 4π/3;
```

Створюємо функції `xt(t)`, `yt(t)`, які обчислюються за формулами (4).

```
xt[t_] = x[t0] + t * x'[t0]
yt[t_] = y[t0] + t * y'[t0]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} + \frac{3t}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

Отримані два вирази представляють праві частини параметричних рівнянь (4) дотичної.

Функції, які обчислюються за формулами (5), позначимо `xn(t)`, `yn(t)`.

```
xn[t_] = x[t0] + t * y'[t0]
yn[t_] = y[t0] - t * x'[t0]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3t}{2}$$

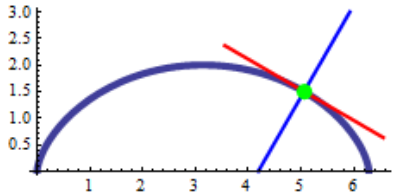
Два останніх вирази представляють праві частини параметричних рівнянь (5) нормалі.

Створимо графічні об'єкти `p1`, `p2`, `p3`, `p4`, які представляють графік циклоїди, точку дотику, графіки дотичної та нормалі.

```
p1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π},
                    PlotStyle → Thickness[0.02], AspectRatio → Automatic];
p2 = Graphics[{Green, Disk[{x[t0], y[t0]}, 0.15]}];   (* зображення точки *)
p3 = ParametricPlot[{xt[t], yt[t]}, {t, -1, 1},
                    PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}];   (* дотична *)
p4 = ParametricPlot[{xn[t], yn[t]}, {t, -1, 1},
                    PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}];   (* нормаль *)
```

Відобразимо всі об'єкти на одному рисунку.

```
Show[p1, p3, p4, p2, PlotRange → All]
```



Примітив `Disk`, який використовується для створення об'єкта `p2`, є кругом на площині. Його перший аргумент – список, який містить координати центра, а другий – радіус. Щоб зобразити точку, ми створили невеликий зелений круг, використовуючи цей примітив.

■

Для поверхні, яка задана неявним рівнянням $F(x,y,z)=0$, рівняння дотичної площини в точці (x_0,y_0,z_0) має вигляд:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \quad (6)$$

Нормаль до поверхні має наступне канонічне рівняння:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \quad (7)$$

Приклад. Скласти рівняння та зобразити дотичну площину і вектор нормалі до еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z-H=0$.

Спочатку задаємо параметри параболоїда, створюємо функцію $F(x,y,z)$, яка представляє його рівняння, та задаємо точку дотику **P**.

```
a = 5; b = 5; H = 25;
F[x_, y_, z_] = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z - H;
x0 = 10; y0 = 4; z0 = H - x0^2/a^2 - y0^2/b^2;
P = {x0, y0, z0};
```

Потім обчислюємо похідні $F_x=F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $F_y=F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $F_z=F'_z(x_0,y_0,z_0)$ у точці дотику.

```
FX = Derivative[1, 0, 0][F][x0, y0, z0];
FY = Derivative[0, 1, 0][F][x0, y0, z0];
FZ = Derivative[0, 0, 1][F][x0, y0, z0];
```

Складаємо вираз, який представляє ліву частину рівняння (6).

```
eq = FX(x - x0) + FY(y - y0) + FZ(z - z0)
```

$$-\frac{509}{25}+\frac{4}{5}(-10+x)+\frac{8}{25}(-4+y)+z$$

З формули (7) випливає, що вектор нормалі до поверхні паралельний вектору $\mathbf{F}_n=(F_x,F_y,F_z)$. Створимо цей вектор.

```
Fn = {FX, FY, FZ};
```

Тепер створимо «невидимі» графічні об'єкти: поверхню параболоїда, дотичну площину, вектор та невелику сферу, яка зображає точку дотику.

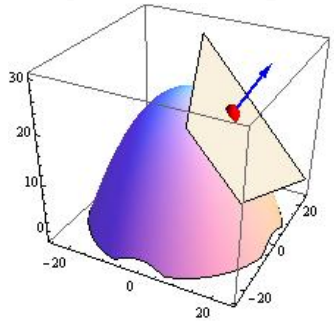
```
ps = ContourPlot3D[F[x, y, z] == 0, {x, -5a, 5a}, {y, -5b, 5b},
                                    {z, -2, 28}, Mesh-> None];
pp = ContourPlot3D[eq == 0, {x, -5a, 5a}, {y, -5b, 5b}, {z, -2, 28},
                                    Mesh-> None];
pa = Graphics3D[{Blue, Thickness[0.01], Arrow[{P, P + 10 * Fn}]}];
pt = Graphics3D[{Red, Sphere[{x0, y0, z0}, 2]}];     (* сфера *)
```

Функція `Show` зображає всі графічні об'єкти в загальних осях.

```
Show[ps, pp, pt, pa, PlotRange-> All]
```

При створенні примітиву «стрілка» (`Arrow`) ми вказуємо координати початкової точки вектора (точки дотику **P**) та кінцевої точки (**P**+10·**Fn**). Множник 10, який керує довжиною вектора, підібраний експериментально.

При створенні примітива «сфера» вказується список з трьох чисел (координат її центра), та радіус: `Sphere[{x0,y0,z0},R]`.



Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Очевидно, що функція визначена при $-1 \le x \le 1$. Спочатку знайдемо корені її похідної.

```
Remove[y];
y[x_] = x√(1 - x^2);
s = Solve[y'[x] == 0, x];
{x1, x2} = x /. s
```

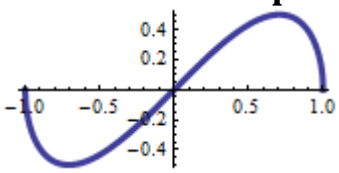
$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

Визначаємо знаки других похідних в точках `x1` та `x2`.

```
{y''[x1], y''[x2]}
{4, -4}
```

Оскільки $y''(x1) > 0$, то в точці `x1` функція має мінімум. Аналогічно робимо висновок, що в точці `x2` – максимум. Перевіримо це графічно.

```
Plot[y[x], {x, -1, 1}, PlotStyle → Thickness[0.02],
                                    AspectRatio → Automatic]
```



■

Якщо диференційована функція двох змінних $z(x,y)$ в точці (x_0,y_0) має екстремум, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $z'_x(x_0,y_0)=0, z'_y(x_0,y_0)=0$ (необхідна умова екстремуму).

Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними точками. Не всяка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Сформулюємо достатню умову екстремуму функції двох змінних. Нехай $M_0(x_0,y_0)$ - стаціонарна точка функції $z=z(x,y)$. Позначимо

$$A=\frac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},\quad C=\frac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial y^2},$$

та складемо дискримінант $\Delta=A\cdot C-B^2$. Тоді при $\Delta>0$ функція має в точці M_0 екстремум, а саме максимум, якщо $A<0$ (або $C<0$), або мінімум, якщо $A>0$ (або $C>0$). При $\Delta<0$ в точці M_0 екстремуму немає. Якщо $\Delta=0$, то потрібно додаткове дослідження.

Приклад. Знайти екстремум функції $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

Створимо функцію $z(x,y)$ та знайдемо розв'язок системи рівнянь $z'_x(x,y)=0, z'_y(x,y)=0$.

```
Unprotect[C];
z[x_, y_] = x^2 + x y + y^2 - 3x - 6y;
s = Solve[{∂_x z[x, y] == 0, ∂_y z[x, y] == 0}, {x, y}];
{{x0, y0}} = {x, y} /. s
{{0, 3}}
```

Відзначимо, що інструкція `{{x0,y0}}={x,y}/.s` працює, тільки коли система має одну пару розв'язків. Якби розв'язків було, наприклад, два, то для виділення двох пар розв'язків слід було б використати інструкцію `{{x0,y0},{x1,y1}}={x,y}/.s`.

Таким чином, існує одна стаціонарна точка $M(0;3)$. Обчислимо в ній другі похідні та дискримінант $\Delta=A\cdot C-B^2$.

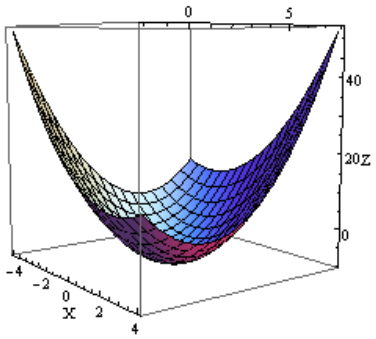
```
A = Derivative[2, 0][z][x0, y0]
2
B = Derivative[1, 1][z][x0, y0]
1
C = Derivative[0, 2][z][x0, y0]
2
dlt = A C - B^2
3
```

Оскільки $\Delta>0$ та $A>0$, то функція в точці $M(0;3)$ має мінімум. Значення функції в точці М дорівнює

```
z[x0, y0]
-9
```

Побудуємо графік функції $z(x,y)$.

```
Plot3D[z[x, y], {x, -4, 4}, {y, -2, 8}, BoxRatios → {1, 1, 1}]
```



Опція `BoxRatios→{1,1,1}` задає відношення довжин сторін координатного паралелепіпеда. На графіку довжини сторін однакові, але на них відкладено неоднакову кількість одиниць. Інакше графік міг би стати занадто витягнутим по вертикальній осі.

Приклад. Знайти екстремум функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Створимо функцію $z(x, y)$ та знайдемо дійсні розв'язки системи рівнянь $z'_x(x, y) = 0, z'_y(x, y) = 0$.

```
Remove[x, y, z];
z[x_, y_] = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;
s = Solve[{∂_x z[x, y] == 0, ∂_y z[x, y] == 0}, {x, y}, Reals]
```

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to -\sqrt{2}, y \to \sqrt{2}\}, \{x \to \sqrt{2}, y \to -\sqrt{2}\}\}$

Тут аргумент `Reals` говорить функції `Solve` шукати лише дійсні розв'язки системи. Знайдено три дійсних розв'язки. Отже, маємо три стаціонарні точки. Збережемо їх координати у змінних.

```
{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}} = {x, y} /. s
```

$\{\{0,0\}, \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}\}$

Остання інструкція присвоює відразу шести змінним відповідні значення.

Обчислимо в стаціонарних точках значення других похідних та дискримінант $\Delta = A \cdot C - B^2$.

```
F = {Derivative[2, 0][f], Derivative[1, 1][f], Derivative[0, 2][f]};
{A1, B1, C1} = Through[F[x1, y1]]
DD1 = A1 C1 - B1^2
{-4, 4, -4}
0
```

Тут інструкція

```
F={Derivative[2,0][f],Derivative[1,1][f],Derivative[0,2][f]}
```

створює список з трьох «чистих» функцій (кожний елемент списку є функцією, а не виразом), які представляють другі похідні. Щоб застосувати кожну функцію, яка знаходиться всередині цього списку, до пари аргументів, використовується функція `Through`. В нашому випадку інструкція `{A1,B1,C1}=Through[F[x1,y1]]` говорить, що треба пронести конструкцію `[x1,y1]` крізь список `F`, та використати її спільно з кожним елементом цього списку. Як результат, ідентифікатори `A1`, `B1` та `C1` містять значення других похідних в точці `x1,y1`. Значення дискримінанта $\Delta_1 = A_1 \cdot C_1 - B_1^2$ в цій точці заноситься у змінну `DD1`.

Аналогічно попередньому, знаходимо значення других похідних та дискримінант в двох інших стаціонарних точках.

$\{\mathbf{A2}, \mathbf{B2}, \mathbf{C2}\} = \mathbf{Through}[\boldsymbol{F}[\mathbf{x2}, \mathbf{y2}]]$

$\mathbf{DD2} = \mathbf{A2C2} - \mathbf{B2}^{\mathbf{2}}$

```
{20, 4, 20}
384
```

$\{\mathbf{A3}, \mathbf{B3}, \mathbf{C3}\} = \mathbf{Through}[\boldsymbol{F}[\mathbf{x3}, \mathbf{y3}]]$

$\mathbf{DD3} = \mathbf{A3C3} - \mathbf{B3}^{\mathbf{2}}$

```
{20, 4, 20}
384
```

У другій та третій точці $\Delta > 0$ та $f''_{xx} > 0$. Тому в них знаходяться локальні мінімуми зі значеннями

$\mathbf{z}[\mathbf{x2}, \mathbf{y2}]$

$\mathbf{z}[\mathbf{x3}, \mathbf{y3}]$

```
-8
-8
```

У першій точці $(0,0)$ дискримінант дорівнює нулю ($\Delta = 0$), тому достатню ознаку застосувати не можна. Переконаємося, що в цій точці екстремуму немає Дійсно, якщо $y = 0$, то маємо

$\mathbf{Factor}[\mathbf{z}[\mathbf{x}, \mathbf{0}]]$

$x^2(-2 + x^2)$

і функція від'ємна при невеликих *x* (наприклад, при $|x| < 1$). Навпаки

$\mathbf{Factor}[\mathbf{z}[\mathbf{x}, \mathbf{x}]]$

$2x^4$

і функція додатна. Таким чином, в околі точки $(0,0)$ значення z можуть бути як додатними, так і від'ємними. А це означає, що точка $(0,0)$ не є екстремальною. Відзначимо також, що інших екстремумів функція $z(x, y)$ не має, оскільки точок, в яких частинні похідні не існують, немає.

■

У системі *Mathematica* для пошуку мінімуму або максимуму виразу, заданого аналітично (тобто формулою), є функції `Maximize` та `Minimize`. Вони мають однакові формати виклику, та знаходять глобальні екстремуми у всій області визначення функції або в області, яка задана системою обмежень.

У форматі `Minimize[expr,x]` визначається мінімум виразу `expr` по змінній `x`.

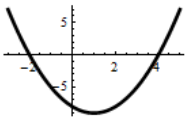
$\mathbf{Minimize}[\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{8}, \boldsymbol{x}]$

$\{-9, \{x \to 1\}\}$

Результат повертається у формі списку `{Мін_значення,{x→x`$_{min}$`}}`.

Ось графік нашої функції.

$\mathbf{Plot}[\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{8}, \{\boldsymbol{x}, -\mathbf{3}, \mathbf{5}\}]$



Оскільки максимум функції x^2-2x-8 дорівнює нескінченності, то

$\mathbf{Maximize}[\boldsymbol{x^2-2x-8, x}]$

```
Maximize::natt: The maximum is not attained at any point
satisfying the given constraints.≫
```

$\{\infty, \{x \to -\infty\}\}$

і інструкція `Maximize` вивела повідомлення.

Зверніть увагу, що першим аргументом функції `Maximize` та `Minimize` є вирази, хоча за звичкою ми говоримо про екстремум функції.

Функції `Maximize` та `Minimize` вміють працювати із символьними виразами.

$\mathbf{Minimize}[\boldsymbol{x^2-2ax, x}]$

$\{-a^2, \{x \to a\}\}$

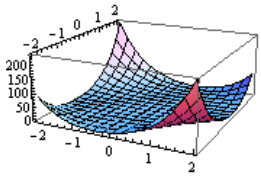
Вирази, які досліджуються на екстремуми цими функціями, можуть мати будь-яку скінченну кількість аргументів. Наприклад:

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_, y\_}] = \boldsymbol{(x^2+y^2+1)((xy-1)^2+1)}$

$\mathbf{Minimize}[\boldsymbol{f[x,y]}, \{\boldsymbol{x,y}\}]$

$\{2, \{x \to 0, y \to 0\}\}$

$\mathbf{Plot3D}[\boldsymbol{f[x,y]}, \{\boldsymbol{x,-2,2}\}, \{\boldsymbol{y,-2,2}\}, \mathbf{PlotRange \to All}]$



У форматі `Minimize[{expr,обмеження},{x1,x2,...}]` знаходиться мінімум виразу `expr` за змінними `x1,x2,...` із врахуванням `обмежень` (додаткових умов).

$\boldsymbol{f}[\mathbf{x\_}] = \boldsymbol{2x^3-3x^2-12x+1}$;

$\mathbf{Minimize}[\{\boldsymbol{f[x]}, \boldsymbol{-2 <= x \le 3}\}, \boldsymbol{x}]$

$\{-19, \{x \to 2\}\}$

$\mathbf{Maximize}[\{\boldsymbol{f[x]}, \boldsymbol{-2 <= x \le 3}\}, \boldsymbol{x}]$

$\{8, \{x \to -1\}\}$

Ось приклад для функції 2-х змінних

$\mathbf{Minimize}[\{\boldsymbol{1+x, x^2+y^2 \le 1}\}, \{\boldsymbol{x,y}\}]$

$\mathbf{Maximize}[\{\boldsymbol{1+x, x^2+y^2 \le 1}\}, \{\boldsymbol{x,y}\}]$

$\{0, \{x \to -1, y \to 0\}\}$

$\{2, \{x \to 1, y \to 0\}\}$

7. Інтегральне числення

7.1 Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$. Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається сукупність всіх її первісних.

Для обчислення невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ аналітично використовується функція `Integrate`. Її першим аргументом є вираз (не функція), а другим – ім'я змінної інтегрування.

$$\textbf{Integrate}[\textbf{Cos}[x]^2, x]$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{Sin}[2x]$$

Зверніть увагу, що константа інтегрування не додається.

Замість імені функції `Integrate` можна використовувати класичне позначення $\int$.

$$\int x^2 \, dx$$

$$\frac{x^3}{3}$$

Трафарет вводу позначки інтеграла можна знайти на панелі спеціальних символів «Basic Math Input». Можна використовувати також спеціальні комбінації клавіш. Для вводу «гачка» інтеграла наберіть **`Esc–int–Esc`**, потім введіть підінтегральний вираз, потім спеціальний значок диференціала **`Esc–dd–Esc`** та ім'я змінної інтегрування.

$$\int \textbf{Sqrt}[x + \textbf{Sqrt}[x]] \, dx$$

$$\frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{x} + x}(-3 + 2\sqrt{x} + 8x) + \frac{1}{8}\text{Log}[1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{\sqrt{x} + x}]$$

Різні форми одного і того ж невизначеного інтеграла можуть давати відповіді, які відрізняються константою. Наприклад:

$$\textbf{i1} = \textbf{Integrate}[\textbf{1} + (x + \textbf{1})\textbf{\^{}3}, x]$$

$$x + \frac{1}{4}(1 + x)^4$$

$$\textbf{i2} = \textbf{Integrate}[\textbf{Expand}[\textbf{1} + (x + \textbf{1})\textbf{\^{}3}], x]$$

$$2x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{4}$$

$$\textbf{Simplify}[\textbf{i1} - \textbf{i2}]$$

$$\frac{1}{4}$$

Mathematica вміє інтегрувати раціональні, тригонометричні та багато інших функцій.

$$\int \frac{x^5}{x^3 + 3x^2 + 7x} \, dx$$

$$2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{73\text{ArcTan}[\frac{3 + 2x}{\sqrt{19}}]}{\sqrt{19}} + \frac{15}{2}\text{Log}[7 + 3x + x^2]$$

В системі реалізовані практично всі відомі методи інтегрування і, якщо інтеграл системою не береться аналітично, то швидше за все, це просто неможливо зробити. Коли *Mathematica* не може взяти інтеграл, вона повертає команду інтегрування необчисленою.

Integrate $\left[\frac{1}{x+\mathbf{Cos}[x]}, x\right]$

$$\int \frac{1}{x+\mathrm{Cos}[x]}\,dx$$

Іноді для обчислення невизначеного інтеграла слід враховувати умови, які накладаються на незалежну змінну, оскільки без додаткових умов інтеграл не обчислюється. Ці умови накладаються за допомогою опції `Assumptions->умова`. У ролі умови можуть використовуватися рівняння, нерівності, їх список або логічна комбінація. Наприклад:

Integrate[**Abs**[x], x]

$$\int \mathrm{Abs}[x]\,dx$$

і система інтеграл не обчислила. Однак, у припущенні, що змінна інтегрування є дійсною, інтеграл системою береться.

Integrate[**Abs**[x], x, **Assumptions**$->x \in$ **Reals**] (* x – дійсний *)

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2}, x \le 0 \\ \frac{x^2}{2}, True \end{cases}$$

Припущення, що змінна *x* дійсна необхідно тому, що система за замовчуванням вважає всі змінні комплексними.

Припустивши, що $x > 0$, ви отримаєте однозначну відповідь.

Integrate[**Abs**[x], x, **Assumptions** $->$ $x > 0$]

$$\frac{x^2}{2}$$

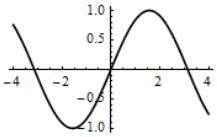
Ви можете побажати будувати графіки невизначених інтегралів. Але при цьому слід враховувати одну особливість. Вона полягає в тому, що інтегрування, яке виконується всередині функції `Plot`, не працює.

Plot[**Integrate**[**Cos**[x], x], {x, -4, 4}]

Однак буде працювати послідовність з двох команд.

F $=$ **Integrate**[**Cos**[x], x]

Plot[**F**, {x, -4, 4}]



Спочатку виконується інтегрування, а потім окремо будується графік. Таку поведінку функції `Plot` можна змінити, але це інша тема.

Функцію `Integrate` можна застосовувати до списків виразів. В результаті буде отриманий список їх інтегралів.

$$\mathbf{Integrate}[\{x, x^2, x^3, x^4\}, x]$$

$$\left\{\frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5}\right\}$$

$$\mathbf{Integrate}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 2x & 1 & 4x^3 \\ 3x^2 & 4x^3 & 1 \end{pmatrix}, x\right]\mathbf{//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x & x^4 \\ x^3 & x^4 & x \end{pmatrix}$$

7.2 Визначений інтеграл.

Для обчислення визначеного інтеграла використовується та ж сама функція `Integrate`, але другий аргумент задається у вигляді списку, який складається з імені змінної інтегрування, а також її нижньої та верхньої межі: `Integrate[f,{x,`x_{min}`,`x_{max}`}]`. Наприклад, наступна команда інтегрує x^2 від 0 до 1.

$$\mathbf{Integrate}[x^2, \{x, 0, 1\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

або

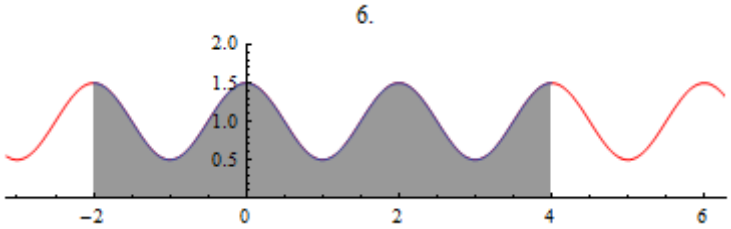
$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

Трафарет вводу визначеного інтеграла можна знайти на панелі спеціальних символів «Basic Math Input». Можна також використати спеціальні комбінації клавіш. Для вводу «гачка» інтеграла наберіть **`Esc-int-Esc`**. Потім потрібно ввести підрядковий та надрядковий індекси у значка інтеграла ∫. Для цього введіть **`Ctrl-_`** (підкреслення), потім **`Ctrl-%`** (або **`Ctrl-^`**, потім **`Ctrl-%`**), і задайте значення нижньої та верхньої межі інтегрування. **`Ctrl-пробіл`** повертає курсор на нормальний рівень вводу, де введіть підінтегральний вираз, потім введіть спеціальний значок диференціала **`Esc-dd-Esc`** та ім'я змінної інтегрування.

Пояснимо графічно сенс визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ як площі під кривою $y = f(x)$ на проміжку від *a* до *b*.

```
Clear[a, b, p1, p2]
a = -2; b = 4;
p1 = Plot[0.5 + Cos[πx/2]^2, {x, -π, 2π}, PlotStyle → Red,
                                    PlotRange-> {{-π, 2π}, {0, 2}}];
p2 = Plot[0.5 + Cos[πx/2]^2, {x, a, b}, Filling → 0];
s = Integrate[0.5 + Cos[πx/2]^2, {x, a, b}];
```

Show[**p1**, **p2**, **PlotLabel** −> *s*, *AspectRatio* −> *Automatic*]



Тут ми зобразили графік функції та область, площу якої представляє визначений інтеграл. Параметри *a* та *b* обмежують область інтегрування зліва та справа. Опція `Filling` функції `Plot[f[x],{x,a,b},Filling->y0]` каже системі зафарбувати сірим кольором область між кривою `f[x]` та горизонтальною прямою `y=y0`.

Опція `PlotLabel` функції `Show` створює заголовок графіка. Змінюючи в коді значення параметрів *a* та *b*, ви можете спостерігати за областю, площа якої обчислюється і значення якої відображається зверху.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y=(x-1)^2$ та гіперболою $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

Спочатку дамо геометричну інтерпретацію задачі, побудувавши фігуру, площу якої слід обчислити. Для цього зобразимо криві та область між ними.

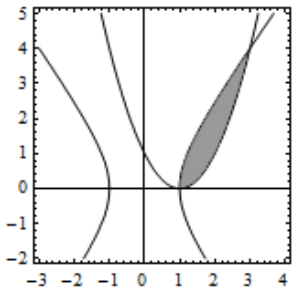
f[x_, y_] = **y** − (**x** − **1**)^**2**;

F[x_, y_] = **x**^**2** − **y**^**2**/**2** − **1**;

p1 = **ContourPlot**[{**f**[**x**, **y**] == **0**, **F**[**x**, **y**] == **0**}, {**x**, −**3**, **4**}, {**y**, −**2**, **5**},
Axes → **True**, **ContourStyle** → **Thickness**[**0.01**]];

p2 = **RegionPlot**[{**f**[**x**, **y**] ≥ **0** && **F**[**x**, **y**] >= 0}, {**x**, −**3**, **4**}, {**y**, −**2**, **5**}];

Show[**p1**, **p2**]



Знайдемо точки перетину параболи та гіперболи, для чого розв'яжемо спільно рівняння цих кривих.

s = **Solve**[{**f**[**x**, **y**] == **0**, **F**[**x**, **y**] == **0**}, {**x**, **y**}]

{{*x* → −*i*, *y* → 2*i*}, {*x* → *i*, *y* → −2*i*}, {*x* → 1, *y* → 0}, {*x* → 3, *y* → 4}}

Ігноруючи комплексні розв'язки, бачимо, що криві перетинаються у точках $A(1;0)$ та $B(3,4)$. Якщо на відрізку $[1;3]$ з площі, обмеженої зверху гіперболою, відняти площу, обмежену параболою, то отримаємо шукану площу, тобто $S=\int_1^3\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\,dx-\int_1^3(x-1)^2\,dx$. Таким чином, маємо

$$S = \int_1^3 \sqrt{2(x^2-1)}\,dx - \int_1^3 (x-1)^2\,dx$$

$$\frac{10}{3} - \frac{\text{Log}[3+2\sqrt{2}]}{\sqrt{2}}$$

```
N[S]
2.0868829
```

■

Визначений інтеграл від списку повертає список інтегралів.

$$\text{Integrate}[\{x, x^2, x^3, x^4\}, \{x, 0, 1\}]$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

Якщо під інтегралом є параметр, то результат буде від нього залежати, і в відповіді може бути присутня умова.

$$\int_0^1 x^n\,dx$$

$$\text{ConditionalExpression}[\frac{1}{1+n}, \text{Re}[n] > -1]$$

Тут `ConditionalExpression[expr,cond]` є символічною конструкцією, яка представляє вираз `expr` тільки, якщо умова `cond` істинна.

При обчисленні визначеного інтеграла умову можна враховувати відразу. Для цього використовується опція `Assumptions->умова`.

$$\text{Integrate}[x\text{^}n, \{x, 0, 1\}, \text{Assumptions} -> n > 0]$$

$$\frac{1}{1+n}$$

Можна відключити «умовний» вивід за допомогою опції `GenerateConditions → False`.

$$\text{Integrate}[x^n, \{x, 0, 1\}, \text{GenerateConditions} \to \text{False}]$$

$$\frac{1}{1+n}$$

Mathematica може обчислювати невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Integrate}[\text{Exp}[-cx^2],\ \{x, -\infty, \infty\},\ \text{Assumptions} \to \text{Re}[c] > 0]$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}$$

Можна обчислювати невласні інтеграли на скінченних відрізках (невласні інтеграли 2 – го роду).

$$\text{Integrate}[\frac{1}{\sqrt{x}}, \{x, 0, 1\}]$$

2

Визначені інтеграли, які залежать від параметра, можна диференціювати за цим параметром. Наприклад:

$$\mathbf{Integrate}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{t}],\{\boldsymbol{t},\mathbf{0},\boldsymbol{x}\}]$$

$$\int_0^x f[t]\,\mathbb{d}t$$

$$\boldsymbol{D}[\%,\boldsymbol{x}]$$

$$f[x]$$

Нагадаємо, що символ % (процент) позначає результат роботи останньої команди (останньої за часом, а не за положенням в документі).

Загальна формула диференціювання інтеграла, який залежить від параметра, може бути отримана наступною командою

$$\mathbf{Clear}[\boldsymbol{F},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]$$

$$\mathbf{Integrate}[\boldsymbol{F}[\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}],\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}],\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}]\}]$$

$$\int_{g[x]}^{f[x]} F[t,x]\,\mathbb{d}t$$

Тут параметр *x* присутній у підінтегральній функції, а також у верхній та нижній межах інтегрування.

$$\boldsymbol{D}[\%,\boldsymbol{x}]$$

$$\int_{g[x]}^{f[x]} F^{(0,1)}[t,x]\,\mathbb{d}t + F[f[x],x]f'[x] - F[g[x],x]g'[x]$$

Коли *Mathematica* не може взяти визначений інтеграл, вона повертає команду назад так само, як і при обчисленні невизначеного інтеграла.

$$\mathbf{Integrate}[\mathbf{1}/(\mathbf{x}+\mathbf{Cos}[\mathbf{x}]),\{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{1}\}]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\mathrm{Cos}[x]}\,\mathbb{d}x$$

Тоді ви можете знайти інтеграл наближено, використовуючи чисельне інтегрування. Для цього можна використовувати функцію `N`.

$$\boldsymbol{N}\left[\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{Cos}[\boldsymbol{x}]}\,\mathbb{d}\boldsymbol{x}\right]$$

```
0.75665638
```

Якщо ви відразу хочете інтегрувати чисельно, то можете використати функцію `NIntegrate`. Це не дозволить *Mathematica* спробувати обчислити інтеграл у символьному вигляді.

$$\mathbf{NIntegrate}[\mathbf{1}/(\mathbf{x}+\mathbf{Cos}[\mathbf{x}]),\{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{1}\}]$$

```
0.75665638
```

Основне призначення функції `NIntegrate` складається у наближеному обчисленні визначених інтегралів. Її можна використовувати для обчислення інтегралів по скінченному відрізку дійсної осі.

$$\mathbf{NIntegrate}[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{x}},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{2}\}]$$

```
2.8338767
```

Можна також чисельно знаходити інтеграл на нескінченій ділянці дійсної осі.

$$\mathbf{NIntegrate}[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\infty\}]$$

```
1.5708
```

У функції `NIntegrate` існують опції, які керують точністю обчислень. Опція `Method->назва` дозволяє обрати метод чисельного інтегрування, але, як правило, функція `NIntegrate` робить це добре сама. З усіма опціями функції `NIntegrate` ви можете ознайомитися самостійно за довідковою системою.

7.3 Кратні інтеграли.

Можна обчислювати первісну від первісної. Для цього в функцію `Integrate` достатньо додати третій аргумент з іменем ще однієї змінної інтегрування.

$$\mathbf{Integrate}[\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] \qquad (*\ \int\left(\int x^2 y^3\, d\,y\right) d\,x\ *)$$

$$\frac{x^3 y^4}{12}$$

Замість імені функції `Integrate` ви можете використати трафарет невизначеного інтеграла. Потрібно ввести трафарет однократного інтегрування $\int\blacksquare\,\boldsymbol{d}\,\square$, і в якості підінтегрального виразу використати ще один трафарет інтеграла $\int\blacksquare\,\boldsymbol{d}\,\square$. Повинно вийти $\int\int\blacksquare\,\boldsymbol{d}\,\square\,\boldsymbol{d}\,\square$. Після цього в «квадратики» вводьте необхідні вирази.

$$\int\int \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}}\,\text{d}\boldsymbol{y}\,\text{d}\boldsymbol{x}$$

$$\frac{x^3 y^4}{12}$$

Аналогічно, для обчислення багаторазових визначених інтегралів додайте більше аргументів в функцію `Integrate`. Наприклад, команда

```
Integrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]
```

обчислює повторний інтеграл $\int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} d\,x \int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x,y)\,d\,y$. Першим вказується інтервал зміни того параметра, інтегрування за яким виконується в останню чергу!

$$\mathbf{Integrate}[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}\},\{\boldsymbol{y},\mathbf{0},\boldsymbol{x}\}]$$

$$\frac{\pi^4}{8}$$

або по-іншому

$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\,y\,\text{d}\boldsymbol{y}\,\text{d}\boldsymbol{x}$$

$$\frac{\pi^4}{8}$$

Функцію `Integrate` можна використовувати для обчислення інтегралів по області. Для цього знадобиться спеціальна функція `Boole[expr]`, де `expr` – логічний вираз, який приймає значення `True/Істина` або `False/Брехня`.

Функція `Boole[expr]` повертає одиницю, якщо `expr` дорівнює `True` та 0 – якщо `False`.

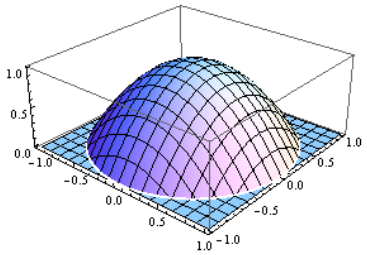
Наприклад, для інтегрування функції $f(x,y)=1-x^2-y^2$ по області одиничного круга слід інтегрувати по прямокутнику $[-1,1]\times[-1,1]$ функцію $\tilde{f}(x,y)=\left(1-x^2-y^2\right)\cdot \text{Boole}\left(x^2+y^2\le 1\right)$. Відповідний код має вигляд:

Integrate[(1 − x² − y²) Boole[x² + y² ≤ 1], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}]

$$\frac{\pi}{2}$$

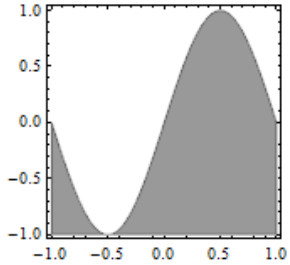
Нижче показаний графік «модифікованої» функції $\tilde{f}(x,y)$.

Plot3D[(1 − x² − y²)Boole[x² + y² < 1], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}]



Область може задаватися логічною комбінацією нерівностей. Нижче показана область **R**, по якій далі обчислюється подвійний інтеграл $\iint_{\mathbf{R}}(x+y)\,dx\,dy$.

R = −1 < x < 1 && y < Sin[πx] && y > −1;
RegionPlot[R, {x, −1, 1}, {y, −1, 1}]



Integrate[(x + y)Boole[R], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}] (* $\iint_{R}(x+y)\,dx\,dy$ *)

$$\frac{4-\pi}{2\pi}$$

Область може мати будь-яку розмірність. Наступною інструкцією ми обчислюємо об'єм 3D області, обмеженої напівсферою одиничного радіуса та площиною `z=0` (об'єм половини кулі).

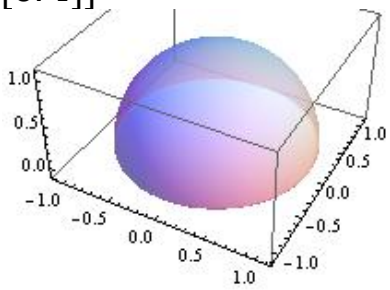
R = x² + y² + z² < 1 && 0 < z < 1;
Integrate[Boole[R], {x, −∞, ∞}, {y, −∞, ∞}, {z, −∞, ∞}]

$$\frac{2\pi}{3}$$

Змінна ***R*** містить логічний вираз, істинний тільки в середині напівкулі. Відповідна функція `Boole[R]` дорівнює одиниці всередині напівкулі і нулю поза нею. Тому інтегрування в останній інструкції представляє потрійний інтеграл по області ***R*** від одиниці $\iiint_{\mathbf{R}} dz\,dy\,dx$.

Використовуючи той же логічний вираз $\boldsymbol{R}$, можна зобразити область інтегрування.

```
RegionPlot3D[R, {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}, {z, -0.1, 1.1},
    PlotPoints → 100, BoxRatios → {2.2, 2.2, 1.2}, Mesh → None,
    PlotStyle → Opacity[0.4]]
```

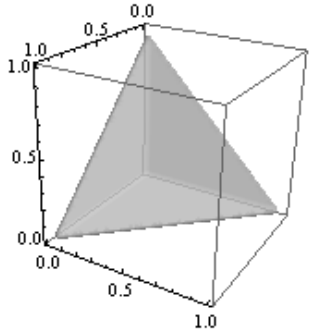


Тут опція `PlotStyle→Opacity[0.4]` задає ступінь прозорості тіла (число від нуля до одиниці). Опція `PlotPoints→100` задає кількість точок розбиття вздовж координатних осей. Чим більше точок розбиття, тем більш гладка поверхня виходить. Однак, тим більше використовується комп'ютерних ресурсів, и тим повільніше може виконуватися обертання зображення комп'ютерною мишею.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_{\mathbf{R}} \frac{d\,x\,d\,y\,d\,z}{(1+x+y+z)^3}$, розповсюджений на тетраедр, обмежений площинами $x=0,\ y=0,\ z=0$ та $x+y+z=1$.

Спочатку зобразимо область інтегрування, задавши її системою нерівностей.

```
R = x > 0 && y > 0 && z > 0 && x + y + z ≤ 1;
RegionPlot3D[R, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, PlotPoints → 50,
    Mesh → None, PlotStyle → Opacity[0.5]]
```



Потім обчислюємо інтеграл.

```
Integrate[1/(1 + x + y + z)^3 Boole[R], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}]
```

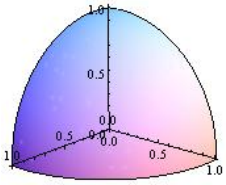
$$\frac{1}{16}(-5+8\text{Log}[2])$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{\substack{x,y,z\ge 0\\ x^2+y^2+z^2\le 1}} \frac{x\,y\,z\,d\,x\,d\,y\,d\,z}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}$ $(\alpha>\beta>\gamma>0)$.

Спочатку зобразимо область інтегрування.

```
R = x ≥ 0 && y ≥ 0 && z ≥ 0 && x^2 + y^2 + z^2 ≤ 1;
```

```
RegionPlot3D[R, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, PlotPoints -> 50,
             Mesh -> None, AxesOrigin -> {0, 0, 0}, Boxed -> False]
```



Опція `AxesOrigin→{0,0,0}` задає точку, в якій будуть зображені прямі з координатними зарубками. Опція `Boxed→False` відміняє відображення координатного паралелепіпеда.

Тепер обчислимо інтеграл.

```
Clear[x, y, z];
Integrate[x y z / Sqrt[a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2] Boole[R], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, -∞, ∞},
          Assumptions -> {a > b && b > c && c > 0}]
```

$$\frac{ab+ac+bc}{15(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Зверніть увагу на те, що для обчислення інтеграла знадобилися додаткові умови, які ми задали за допомогою опції `Assumptions->умови`.

■

Якщо багатократний інтеграл не вдається обчислити аналітично, то його можна знайти чисельно. Для цього потрібно використати все ту ж функцію `NIntegrate`. Наприклад:

```
NIntegrate[Exp[-x^2 + y], {x, 0, ∞}, {y, 0, 1}]   (*  ∫_0^∞ dx ∫_0^1 e^(-x^2+y) dy  *)
```

```
1.5227876
```

Внутрішній список $\{x, 0, \infty\}$ визначає зовнішній діапазон інтегрування. Останнім вказується інтервал зміни того параметра, інтегрування за яким виконується в першу чергу. При цьому межі інтегрування можуть залежати від змінної зовнішнього інтеграла. Наприклад, площу одиничного круга можна обчислити за допомогою наступного інтеграла

```
NIntegrate[1, {x, -1, 1}, {y, -Sqrt[1 - x^2], Sqrt[1 - x^2]}]   (*  ∫_-1^1 dx ∫_-√(1-x^2)^√(1-x^2) dy  *)
```

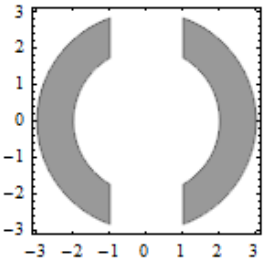
```
3.1415927
```

За допомогою функції `NIntegrate` можна чисельно знаходити багатократні інтеграли по області. Для цього, так як і для функції `Integrate`, використовується функція `Boole`.

Приклад. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\mathbf{R}} \frac{x+y^2}{x+\cos x}\,dy\,dx$ по області кругового кільця $4 \le x^2+y^2 \le 9$, з якого вирізана смужка $-1 \le x \le 1$.

Спочатку зобразимо область інтегрування.

$\boldsymbol{R = 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \;\&\&\; (x \ge 1 \;||\; x \le -1);}$
$\boldsymbol{\text{RegionPlot}[R, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}]}$



Потім обчислюємо інтеграл.

$$\boldsymbol{\text{NIntegrate}[\frac{y^2 + x}{x + \text{Cos}[x]} \text{Boole}[R], \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}]}$$

```
10.744863
```

Зверніть увагу на те, що спроба обчислити цей інтеграл символьно за допомогою функції `Integrate` не приводить до результату.

7.4 Застосування інтегрального числення.

Довжина кривої. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в декартових координатах явним рівнянням $y = y(x)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, d\,x, \qquad (1)$$

де x_0 та x_1 визначають початкову та кінцеву точки дуги.

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ від x=0 до x=1 $(y \ge 0)$. Маємо:

$\boldsymbol{y[x\_] = x\sqrt{x};}$

$$\boldsymbol{L = \int_0^1 \sqrt{1 + y'[x]^2}\, dx}$$

$$\frac{1}{27}(-8 + 13\sqrt{13})$$

■

Довжина дуги плоскої кривої, заданої в параметричному вигляді $x = x(t)$, $y = y(t)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, d\,t, \qquad (2)$$

де t_0 та t_1 – значення параметра в початковій та кінцевій точках дуги.

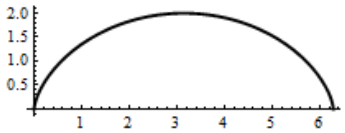
Приклад. Знайти довжину однієї гілки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Маємо:

$\boldsymbol{\text{Clear}[a]}$
$\boldsymbol{x[t\_] = a(t - \text{Sin}[t]);}$
$\boldsymbol{y[t\_] = a(1 - \text{Cos}[t]);}$
$\boldsymbol{L = \text{Integrate}[\sqrt{D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2}, \{t, 0, 2\pi\}, \text{Assumptions} \to a > 0]}$

```
8a
```

Побудуємо графік ділянки кривої, довжину якої визначаємо.

```
a = 1; ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π}]
```



■

Довжина дуги просторової кривої, заданої параметрично $x = x(t),\ y = y(t), z = z(t)$, обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, d\,t, \qquad (3)$$

де t_0 та t_1 – значення параметра в початковій та кінцевій точках дуги.

Приклад. Знайти довжину гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$ від точки $t = 0$ до точки $t = T$.

```
Clear[a, c, x, y, z]
{x[t_], y[t_], z[t_]} = {a Cos[t], a Sin[t], ct};
L = ∫_0^T √(x'[t]^2 + y'[t]^2 + z'[t]^2) 𝕕t
√(a^2 + c^2) T
```

■

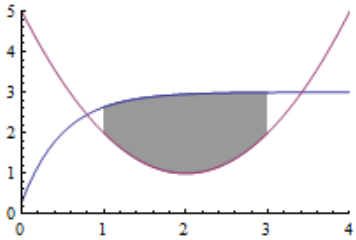
Площа плоскої області. Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ $(f_1(x) < f_2(x))$, та прямими $x = a$ та $x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, d\,x. \qquad (4)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривими $y = 3 - e^{1-2x}$, $y = x^2 - 4x + 5$, та прямими $x = 1$ і $x = 3$.

Спочатку зобразимо криві та область, площа якої буде визначатися.

```
y1[x_] = 3 - Exp[-2 x + 1];
y2[x_] = x^2 - 4x + 5;
p1 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 0, 4}, PlotRange -> {{0, 4}, {0, 5}}];
p2 = Plot[{y1[x], y2[x]}, {x, 1, 3}, Filling -> {1 -> {2}}];
Show[p1, p2]
```



Тут опція `Filling ->{1->{2}}` функції `Plot` вказує системі зафарбувати область між першою кривою та другою.

Використовуючи формулу (4), знайдемо площу області.

$$S = \int_1^3 (y1[x] - y2[x])\, dx$$

$$\frac{10}{3} - \frac{-1 + e^4}{2e^5}$$

■

Використовуючи подвійний інтеграл, площа плоскої області R, знаходиться за формулою

$$S = \iint_R d\,x\,d\,y\,. \tag{5}$$

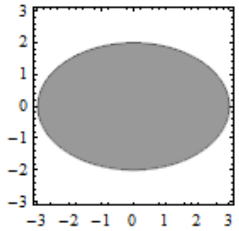
Якщо область R задана нерівностями $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то

$$S = \int_a^b d\,x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} d\,y\,. \tag{6}$$

Приклад. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Спочатку зобразимо еліпс при деяких значеннях параметрів a, b.

```
a = 3; b = 2;
RegionPlot[x^2/a^2 + y^2/b^2 <= 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



Потім спробуємо обчислити площу, використовуючи формулу (5).

```
Clear[a, b];
R = x^2/a^2 + y^2/b^2 <= 1;
Integrate[Boole[R], {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                    Assumptions -> {a ∈ Reals && b ∈ Reals}]
```

Після тривалого роздуму *Mathematica* повідомить, що не змогла обчислити інтеграл по області при довільних значеннях a та b. Зазначимо, що при конкретних значеннях, наприклад, $a = 3, b = 2$, вона зі своєю задачею впорається. Проте, використовуючи формулу (6), ми легко отримаємо правильну відповідь для довільних a та b.

```
phi[x_] = b Sqrt[1 - x^2/a^2];
Integrate[1, {x, -a, a}, {y, -phi[x], phi[x]}]      (* Integrate[1, {x, -a, a}, {y, -b Sqrt[1 - x^2/a^2], b Sqrt[1 - x^2/a^2]}] *)
```

$a\,b\,\pi$

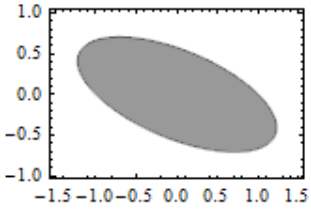
Приклад. Обчислити площу поверненого еліпса $a x^2 + 2b x y + c y^2 = 1$ $\left(a c - b^2 > 0, c > 0\right)$. Маємо.

```
Clear[a, b, c];
Integrate[Boole[a x^2 + 2 b x y + c y^2 <= 1], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞},
                    Assumptions → {c > 0, a c - b^2 > 0}]
```

$$\frac{\pi}{\sqrt{-b^2 + ac}}$$

Зобразимо еліпс при деяких значеннях параметрів a, b, c.

```
a = 1; b = 1; c = 3;
RegionPlot[a x^2 + 2 b x y + c y^2 <= 1, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1., 1.},
                                        AspectRatio → Automatic]
```



Приклад. Обчислити площу області, обмеженої зверху та знизу кривими $y_1(x) = 4x^2 - 1$, $y_2(x) = \cos \pi x$, а зліва та справа точками їх перетину.

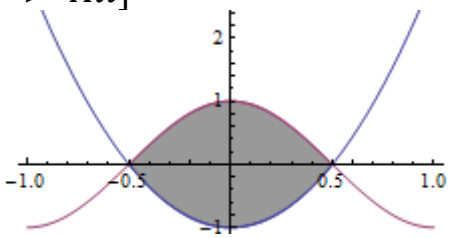
Знайдемо точки перетину кривих.

```
s = Solve[4 x^2 - 1 == Cos[π x], x, Reals];
{x1, x2} = x /. s
```

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Зобразимо область інтегрування

```
p1 = Plot[{4 x^2 - 1, Cos[π x]}, {x, x1, x2}, Filling -> 1 -> {2}];
p2 = Plot[{4 x^2 - 1, Cos[π x]}, {x, -1, 1}];
Show[p1, p2, PlotRange -> All]
```



Використовуючи формулу (4), обчислимо площу між кривими як одноразовий інтеграл.

```
∫_x1^x2 (Cos[π x] - (4 x^2 - 1)) 𝕕x
```

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}$$

Використовуючи формулу (5), обчислимо площу між кривими як подвійний інтеграл.

```
Integrate[Boole[4 x^2 - 1 < y < Cos[π x]], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

$$\frac{2(3 + \pi)}{3\pi}$$

Використовуючи формулу (6), обчислимо площу між кривими як повторний інтеграл.

Integrate[**1**, {$\boldsymbol{x}$, **x1**, **x2**}, {$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{4x^2 - 1}$, **Cos**[$\boldsymbol{\pi x}$]}]

$\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}$

■

Площа плоскої області, контур якої заданий параметрично. Розглянемо область, обмежену замкненою кривою з рівнянням $x = x(t),\ y = y(t),$ $t_{\min} \le t \le t_{\max}$. Площу області можна обчислити за однією з наступних формул:

$$S = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t)\,y'(t)\,dt,\quad S = -\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} y(t)\,x'(t)\,dt,\quad S = \frac{1}{2}\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \left(x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\right)dt. \qquad (7)$$

У всіх формулах припускається, що при зростанні параметра t від $t_{\min}$ до $t_{\max}$, контур обходиться у додатному напрямку (проти годинникової стрілки).

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),$ $t_{\min} \le t \le t_{\max},$ то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x = a,\ x = b$ та відрізком $[a, b]$ осі OX обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt, \qquad (8)$$

а t_1 та t_2 визначаються з рівнянь $a = x(t_1), b = x(t_2),$ та $y(t) \ge 0$ при $t_1 \le t \le t_2$.

Приклад. Обчислити площу еліпса, контур якого заданий параметричними рівняннями $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Для цього використаємо всі три формули (7).

Remove[**x**, **y**, **t**];

{**x**[**t_**], **y**[**t_**]} = {**a Cos**[**t**], **b Sin**[**t**]};

$\boldsymbol{S = \int_0^{2\pi} x[t]\,y'[t]\,dt}$

a b π

$\boldsymbol{S = -\int_0^{2\pi} y[t]\,x'[t]\,dt}$

a b π

$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x[t]\,y'[t] - y[t]\,x'[t])\,dt}$

a b π

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ та віссю OX.

Для обчислення площі використаємо формулу (8). Маємо.

$\boldsymbol{x}$[**t_**] = $\boldsymbol{a}$($\boldsymbol{t}$ − **Sin**[$\boldsymbol{t}$]);

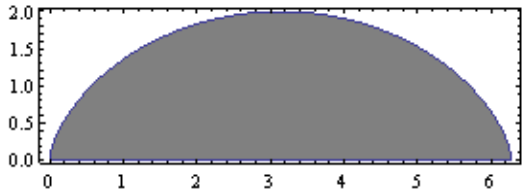
$\boldsymbol{y}$[**t_**] = $\boldsymbol{a}$(**1** − **Cos**[$\boldsymbol{t}$]);

$$\boldsymbol{S = \int_0^{2\pi} y[t]x'[t]\,dt}$$

$3a^2\pi$

Зобразимо фігуру.

```
a = 1;
ParametricPlot[{x[t], u y[t]}, {t, 0, 2π}, {u, 0, 1}, Mesh → False]
```



Зверніть увагу на спосіб заливки області, обмеженої зверху параметричною кривою. Для цього був використаний другий параметр `u`. Нагадаємо, що в форматі з двома параметрами функція `ParametricPlot` зображує зафарбовані двовимірні області. ■

Об'єм тіла.

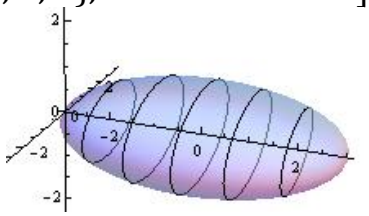
Об'єм тіла за площею паралельних перерізів. Розглянемо деяке тіло (V), яке міститься між площинами $x = a$ та $x = b$, та почнемо розсікати його площинами, перпендикулярними до осі OX. Нехай площа перерізу $P(x)$, яка відповідає абсцисі x, буде неперервною функцією від x $(a \le x \le b)$. Нехай також будь-які два різних перерізи, будучи спроектовані на площину, перпендикулярну до осі OX, опиняються завжди такими, що містяться один в одному. Тоді тіло (V) має об'єм, який обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b P(x)\,dx \qquad (9)$$

Приклад. Знайти об'єм тривісного еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Спочатку побудуємо еліпсоїд при деяких значеннях параметрів a, b, c.

```
a = 3; b = 2; c = 1;
RegionPlot3D[x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 ≤ 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3},
    MeshFunctions → {#1&}, Mesh → 5, PlotStyle → Opacity[0.5],
    AxesOrigin → {-a, 0, 0}, Boxed → False]
```



Площина, яка перпендикулярна до осі OX і проходить через точку $M(x, 0, 0)$, перетне еліпсоїд по еліпсу. Проекція цього еліпса на площину YZ має рівняння:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - x^2/a^2\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - x^2/a^2\right)} = 1 \qquad (x = const).$$

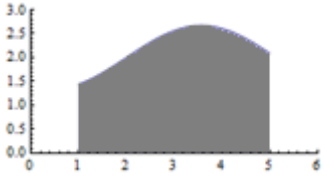
Звідси дістаємо, що його півосі будуть дорівнювати $b\sqrt{1-x^2/a^2}$ та $c\sqrt{1-x^2/a^2}$, а площа виразиться формулою $P(x)=\pi bc\left(1-x^2/a^2\right)$. Таким чином, з (9) отримуємо

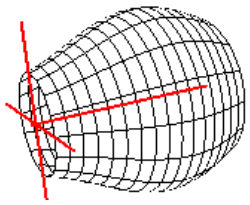
```
Clear[a, b, c];
P[x_] = (π b c)/a^2 (a^2 - x^2);
V = ∫_-a^a P[x] 𝕕x
```

$$\frac{4}{3}a\,b\,c\,\pi$$

■

Об'єм тіла обертання. Окремий випадок формули (9) представляють тіла обертання. Нехай на площині XOY задана крива $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, де $f(x)$ неперервна та невід'ємна. Почнемо обертати обмежену нею криволінійну трапецію навколо осі OX.





Перерізи отриманого тіла (V) проектуються на площину YOZ у вигляді концентричних кіл площиною $P(x)=\pi y^2=\pi\left(f(x)\right)^2$, так що

$$V=\pi\int_a^b y^2 d\,x=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2 d\,x. \qquad (10)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена знизу та зверху кривими $y_1=f_1(x)$ та $y_2=f_2(x)$ $(a\le x\le b, 0<f_1(x)<f_2(x))$, то очевидно

$$V=\pi\int_a^b\left(y_2{}^2-y_1{}^2\right)d\,x=\pi\int_a^b\left(\left(f_2(x)\right)^2-\left(f_1(x)\right)^2\right)d\,x. \qquad (11)$$

У випадку, коли параметрично задана крива $x=x(t),\ y=y(t)$ $(t_0\le t\le t_1)$ обмежує опуклу плоску область, яка не перетинається з віссю обертання OX $(y\ge 0, t_0\le t\le t_1)$, об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V=\pi\left|\int_{t_0}^{t_1} y^2(t)\,x'(t)d\,t\right|, \qquad (12)$$

де t_0 та t_1 відповідають початковому та кінцевому значенню параметра при однократному обході контура. Модуль в формулі (12) використовується для того, щоб не задумуватися про напрям обходу кривої.

Приклад. Нехай еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ обертається навколо осі *x*. Тоді $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$, та у відповідності з (10) для об'єму еліпсоїда обертання отримуємо

$$\boldsymbol{V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\mathbb{d}x}$$

$$\frac{4}{3}a\,b^2\,\pi$$

Приклад. Визначимо об'єм тіла, отриманого обертанням гілки циклоїди $x=a\left(t-\sin t\right),\ y=a\left(1-\cos t\right)\ \ \left(0\le t\le 2\pi\right)$ навколо осі OX.

Плоска область, обмежена зверху циклоїдою $y=y(x)$, а знизу віссю OX. Тому придатна формула (10). Зробивши в ній заміну $x=x(t),\ y=y(t)$, отримуємо

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,d\,x=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2(t)x'(t)d\,t\,.$$

де значення t_1 та t_2 відповідають початковій та кінцевій точкам гілки циклоїди (0 та 2π). Таким чином, маємо:

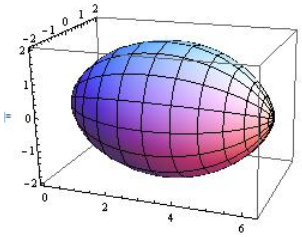
```
Clear[a]
x[t_] = a (t - Sin[t]);
y[t_] = a (1 - Cos[t]);
```

$$\boldsymbol{V=\pi\int_0^{2\pi}y[t]^2x'[t]\,\mathbb{d}t}$$

$$5a^3\pi^2$$

Зобразимо тіло обертання.

```
a = 1;
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π}, RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```

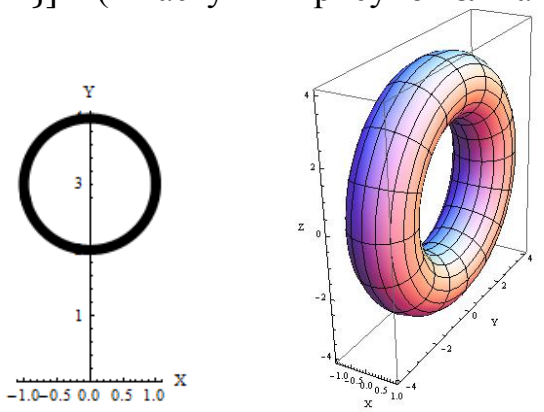


Приклад. Обчислимо об'єм тора. Тором називається поверхня, яка отримана обертанням твірного кола навколо осі, яка лежить в площині цього кола. Пояснимо це визначення наступними малюнками.

Спочатку зобразимо твірне коло в площині XY, використовуючи її параметричне зображення $x=r\cos t$, $y=R-r\sin t$, де r – радіус твірної, а R – відстань від центра твірної до осі обертання $\left(r<R\right)$.

```
r = 1; R = 3;
x[t_] = r Cos[t];
```

```
y[t_] = R − r Sin[t];
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π}, PlotRange → {{−1.1, 1.1}, {0, 4.1}},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Black, Thickness[0.07]},
  AxesLabel → {"X", "Y"}]   (* наступний рисунок зліва *)
```



Потім зобразимо поверхню, яка утворена обертанням кола навколо осі OX (горизонтальної осі).

```
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2π}, AspectRatio → Automatic,
                 RevolutionAxis−> {1, 0, 0}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
                                   (* попередній рисунок справа *)
```

На попередньому рисунку зліва показане твірне коло, а справа – поверхня обертання (тор).

Обчислимо об’єм тора у відповідності з формулою (12). Маємо:

```
Remove[x, y, r, R];
x[t_] = r Cos[t];
y[t_] = R − r Sin[t];
V = π ∫_0^(2π) y[t]^2 x′[t] 𝕕t
```

$2\pi^2 r^2 R$

Відзначимо, що те ж коло ми отримаємо, якщо використаємо рівняння $x = r\cos t$, $y = R + r\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Проте напрям обходу кривої зміниться на протилежний. Відповідно зміниться знак виразу $\int_0^{2\pi} y^2(t)\, x'(t) d\, t$.

Обчислимо об’єм тора, використовуючи формулу (11). Область, яка обертається (круг), обмежена зверху півколом $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$, а знизу – півколом $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Тоді маємо:

```
y2[x_] = R + √(r^2 − x^2);
y1[x_] = R − √(r^2 − x^2);
V = Integrate[y2[x]^2 − y1[x]^2, {x, −r, r}, Assumptions−> {R > r > 0}]
```

$2\pi\, r^2 R$

■

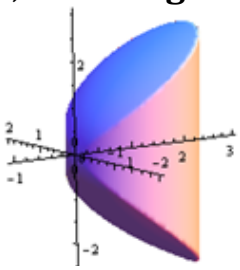
Обчислення об'єму за допомогою потрійного інтеграла. Об'єм тривимірного тіла (V) можна обчислювати як потрійний інтеграл

$$V = \iiint\limits_{(V)} d\,x\,d\,y\,d\,z \tag{13}$$

Приклад. Знайти об'єм V тіла, вирізаного циліндром $x^2 + y^2 = 2a\,x$ з параболоїда обертання $y^2 + z^2 = 4a\ x$.

Спочатку зобразимо тіло (V).

```
a = 1;
R = x^2 + y^2 <= 2 a x  &&  y^2 + z^2 <= 4 a x;
RegionPlot3D[R, {x, -1, 3}, {y, -2, 2}, {z, -3, 3}, PlotPoints -> 100,
                    Boxed-> False, AxesOrigin-> {0, 0, 0}, Mesh-> None]
```



Потім знаходимо об'єм V.

```
a =.;
R = x^2 + y^2 <= 2ax  &&  y^2 + z^2 <= 4ax;
Integrate[Boole[R], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, -∞, ∞}, Assumptions -> a > 0]
```

$$\frac{2}{3}a^3(8 + 3\pi)$$

■

Площа поверхні тіла.

Площа поверхні, заданої явним рівнянням. Нехай поверхня задана явним рівнянням $z = f(x, y)$. Площа ділянки цієї поверхні, яка проектується на площину XOY у вигляді замкненої області *D*, обчислюється за допомогою наступного подвійного інтеграла

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; d\,x\,d\,y \tag{14}$$

Приклад. Обчислимо площу поверхні сфери. Рівняння $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ зображає півсферу радіуса *R*. Враховуючи, що формула (14) дає площу тільки верхньої півсфери, маємо

```
z = Sqrt[R^2 - x^2 - y^2];
ds = Simplify[Sqrt[1 + D[z, x]^2 + D[z, y]^2], Assumptions :> R > 0]
S = 2 Integrate[ds * Boole[x^2 + y^2 <= R^2], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞},
                                        Assumptions :> R > 0]
```

$4\pi R^2$

Це співпадає з відомою формулою елементарної геометрії.

■

Площа поверхні, яка утворюється в результаті обертання кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ навколо осі OX, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2_x}\,dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad (15)$$

Приклад. Обчислити площу поверхні утвореної обертанням навколо осі OX частини кривої $y^2 = 4 + x$, яка відтинається прямою x=2.

Рівняння $y^2 = 4 + x$ визначає параболу з вершиною в точці $(-4, 0)$ та віссю симетрії OX. Тому для обчислення площі поверхні обертання достатньо розглянути одну гілку параболи $y = \sqrt{4+x}$ на відрізку $[-4, 2]$.

```
f[x_] = Sqrt[4 + x];
sr = Simplify[f[x] Sqrt[1 + f'[x]^2], Assumptions :> x > -4]
```

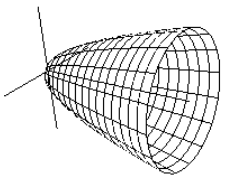
$$\frac{1}{2}\sqrt{17+4x}$$

```
S = 2 Pi Integrate[sr, {x, -4, 2}]
```

$$\frac{62\pi}{3}$$

Зобразимо поверхню, площа якої обчислюється.

```
RevolutionPlot3D[f[x], {x, -4, 2}, RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
    Boxed -> False, AxesOrigin -> {-4, 0, 0},
    Lighting -> {{"Ambient", White}}]
```



■

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$ $(t_0 \le t \le T)$, то площа поверхні обертання навколо осі OX обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (16)$$

Приклад. Дана циклоїда $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$. Знайти площу поверхні, яка утворена обертанням її гілки навколо осі OX. Маємо:

```
a =.;
x[t_] = a(t - Sin[t]);
y[t_] = a(1 - Cos[t]);
ds = Simplify[y[t] Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2], Assumptions :> a > 0]
```

$$4a^2(\mathrm{Sin}[\frac{t}{2}]^2)^{3/2}$$

```
S = 2 Pi Integrate[ds, {t, 0, 2 Pi}, Assumptions :> a > 0]
```

$$\frac{64a^2\pi}{3}$$

■

Центр маси тіла. Нехай $\rho = \rho(x, y)$ представляє густину матеріалу двовимірного тіла (маса одиниці площі в точці x, y). Тоді маса тіла, яка займає область D на площині, обчислюється за формулою

$$M = \iint_D \rho(x, y)\, d\,x\, d\,y \tag{17}$$

Положення (x_c, y_c) центра маси тіла визначається за формулами

$$x_c = \frac{1}{M}\iint_D x\,\rho(x, y)\, d\,x\, d\,y\,,\ y_c = \frac{1}{M}\iint_D y\,\rho(x, y)\, d\,x\, d\,y \tag{18}$$

Коли кажуть про центр маси фігури, то мають на увазі, що густина $\rho(x, y) = 1$.

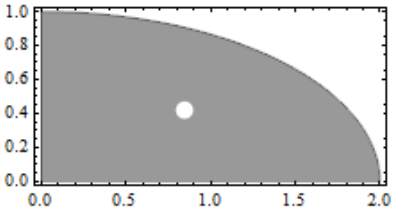
Приклад. Знайти центр маси першого квадранта еліпса. Використовуючи формули (17) та (18), дістаємо

```
Clear[a, b];
R = x^2/a^2 + y^2/b^2 <= 1 && x >= 0 && y >= 0;
M = Integrate[Boole[R], {x, 0, a}, {y, 0, b}, Assumptions -> a > 0 && b > 0];
Mx = Integrate[x Boole[R], {x, 0, a}, {y, 0, b},
                                    Assumptions -> a > 0 && b > 0];
My = Integrate[y Boole[R], {x, 0, a}, {y, 0, b},
                                    Assumptions -> a > 0 && b > 0];
{xc, yc} = {Mx, My}/M
```

$$\left\{\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right\}$$

Зобразимо фігуру при деяких значеннях параметрів a та b, а також точку, в якій знаходиться центр маси.

```
a = 2; b = 1;
rg = RegionPlot[R, {x, 0, a}, {y, 0, b}, AspectRatio-> Automatic];
pt = Graphics[{ White, PointSize[0.05], Point[{xc, yc}]}];
Show[rg, pt]
```



■

Положення центра маси тривимірного тіла визначається за формулами

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint_V \rho\, x\, d\,x\, d\,y\, d\,z\,,\ y_c = \frac{1}{M}\iiint_V \rho\, y\, d\,x\, d\,y\, d\,z\,,\ z_c = \frac{1}{M}\iiint_V \rho\, z\, d\,x\, d\,y\, d\,z\,, \tag{19}$$

де $M = \iiint_V \rho\, d\,x\, d\,y\, d\,z$ репрезентує масу тіла, а $\rho(x, y, z)$ - її густину.

Коли кажуть про центр маси тривимірного геометричного тіла, то вважають, що $\rho \equiv 1$.

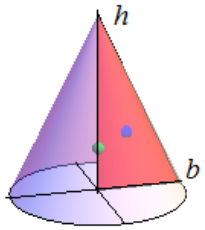
Приклад. Знайдемо центр маси верхньої половини кулі $x^2+y^2+z^2\le 1\ \ (z\ge 0)$. В силу симетрії $\iiint\limits_V x\,d\,x\,d\,y\,d\,z=0$ та $\iiint\limits_V y\,d\,x\,d\,y\,d\,z=0$. Використовуючи третю формулу (19), отримуємо

```
Mz = Integrate[z Boole[x^2 + y^2 + z^2 <= 1  &&  z >= 0],
                                   {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1}]
M = Integrate[Boole[x^2 + y^2 + z^2 <= 1  &&  z >= 0],
                                   {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1}]
zc = Mz/M
```

$$\frac{3}{8}$$

Таким чином, центр маси половини одиничної кулі знаходиться в точці $(0,0,3/8)$.

Приклад. Визначити положення центра маси плоского прямокутного трикутника, та конуса, утвореного обертанням цього трикутника навколо катета, розміщеного на осі OZ. Вершина трикутника знаходиться в точці $(0,0,h)$, а довжина катета основи дорівнює b. Трикутник, конус та точки центрів мас показані нижче, а код побудови цього малюнка наведений в кінці приклада.



Нехай трикутник розміщений в площині XY. Тоді рівняння гіпотенузи трикутника має вигляд $y=h(1-x/b)$.

Знайдемо положення центра маси трикутника.

```
Clear[h, b, x, y, z];
Rt = y <= h (1 - x/b)  &&  x >= 0  &&  y >= 0;
M = Integrate[Boole[Rt], {x, 0, b}, {y, 0, h},
                                   Assumptions-> b > 0 && h > 0];
Mx = Integrate[x * Boole[Rt], {x, 0, b}, {y, 0, h},
                                   Assumptions-> b > 0  &&  h > 0];
My = Integrate[y * Boole[Rt], {x, 0, b}, {y, 0, h},
                                   Assumptions-> b > 0  &&  h > 0];
{M, Mx, My}
```

$$\left\{\frac{bh}{2},\frac{b^2h}{6},\frac{bh^2}{6}\right\}$$

```
{xc, zc} = {Mx, My}/M
```

$$\left\{\frac{b}{3},\frac{h}{3}\right\}$$

Знайдемо положення центра маси конуса. В силу симетрії він (центр маси) розташований на осі OZ. Якщо використовувати перші дві формули (19), то ми отримаємо той же результат, оскільки відповідні інтеграли дадуть нуль (перевірте це!).

Рівняння поверхні конуса має вигляд $z = h\left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}/b\right)$. Тоді, використовуючи третю формулу (19), отримуємо

```
RC = 0 ≤ z ≤ h (1 - Sqrt[x^2 + y^2]/b);
MC = Integrate[Boole[RC], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, 0, h},
                                    Assumptions -> b > 0 && h > 0];
MCz = Integrate[z * Boole[RC], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, 0, h},
                                    Assumptions -> b > 0 && h > 0];
{MC, MCz}
```

$$\left\{\frac{1}{3}b^2h\pi, \frac{1}{12}b^2h^2\pi\right\}$$

```
Zc = MCz/MC
```

$$\frac{h}{4}$$

Як бачимо, вертикальна координата $h/4$ центра маси конуса відрізняється від вертикальної координати $h/3$ центра маси трикутника.

Зобразимо наші фігури та положення їх центрів маси при деяких значеннях *b* та *h* (попередній рисунок).

```
h = 2; b = 1;
ps = RegionPlot3D[RC, {x, -b, b}, {y, -b, b}, {z, 0, h}, Mesh → None,
      PlotStyle → Opacity[0.5], PlotPoints → 41, BoxRatios → {2b, 2b, h}];
pt = Graphics3D[{Red, Polygon[{{0, 0, 0}, {b, 0, 0}, {0, 0, h}}],
      Blue, Sphere[{xc, 0, zc}, 0.07], Green, Sphere[{0, 0, Zc}, 0.07]}];
Show[ps, pt, Boxed -> False, AxesOrigin -> {0, 0, 0}, Ticks -> None]
```

■

Момент інерції. Моментом інерції матеріальної точки відносно осі називається добуток її маси на квадрат відстані точки до цієї осі.

Для двовимірних тіл густиною $\rho(x, y)$ момент інерції відносно осей OX та OY обчислюється за формулами

$$Ix = \iint_D \rho(x, y)\, y^2\, dx\, dy, \quad Iy = \iint_D \rho(x, y)\, x^2\, dx\, dy. \tag{20}$$

При обчисленні моментів інерції геометричних фігур покладають $\rho = 1$.

Приклад. Знайти момент інерції трикутника з основою *b* та висотою *h* відносно його основи.

Основу трикутника приймемо за вісь OX, а його висоту – за вісь OY. Абсциси точок перетину бічних сторін з віссю OX позначимо b_1 та b_2 $(b = b_2 - b_1)$. Рівняння прямих, на яких розміщені бічні сторони трикутника,

мають вигляд: $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$ та $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$. Тоді, використовуючи першу формулу (20), отримуємо

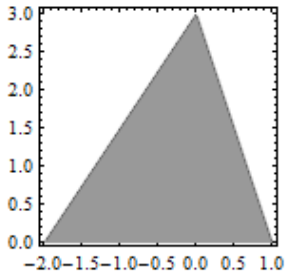
```
Clear[b1, b2, b, h];
R = x/b1 + y/h ≤ 1 && x/b2 + y/h ≤ 1&&y > 0;
Ix0 = Integrate[y^2 Boole[R], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞},
                Assumptions-> h > 0 && b1 < 0 && b2 > 0];
Ix = Simplify[Ix0]/.(b2 - b1)-> b
```

$$\frac{bh^3}{12}$$

Зверніть увагу, що при обчисленні моменту інерції `Ix` була виконана підстановка: різниця координат b_2-b_1 замінена довжиною основи трикутника $b=b_2-b_1$.

Зобразимо трикутник, момент інерції якого обчислюється.

```
b1 = -2; b2 = 1; h = 3;
RegionPlot[R, {x, b1, b2}, {y, 0, h}]
```



Приклад. Знайти момент інерції еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ відносно його головних осей. Використовуючи формули (20),отримуємо

```
Clear[x, y, a, b];
R = x^2/a^2 + y^2/b^2 ≤ 1;
Ix = Integrate[y^2 Boole[R], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞},
                Assumptions-> a > 0&&b > 0];
Iy = Integrate[x^2 Boole[R], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞},
                Assumptions-> a > 0&&b > 0];
{Ix, Iy}
```

$$\left\{\frac{1}{4}ab^3\pi,\frac{1}{4}a^3b\pi\right\}$$

8. Диференціальні рівняння.

Багато прикладних задач зводиться до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) або їх систем. Для деяких рівнянь та систем існують способи отримання «точного» розв'язку, і *Mathematica* їх «знає». В задачах, для яких символьний розв'язок знайти не вдається, *Mathematica* може побудувати числовий розв'язок.

8.1 Окремі види диференціальних рівнянь.

Система *Mathematica* «вміє» розв'язувати багато ЗДР у символьному вигляді за допомогою функції `DSolve`, яка достатньо докладно буде описана у наступному параграфі. У цьому параграфі розглядаються випадки, які дозволяють краще зрозуміти методологію розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) в пакеті *Mathematica* на прикладах окремих видів диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними мають вигляд

$$f_1(x)g_1(y)d\,x + f_2(x)g_2(y)d\,y = 0. \qquad (1)$$

Якщо жодна з функцій $f_1(x), g_1(y), f_2(x), g_2(y)$ не дорівнює тотожно нулю, то рівняння приводиться до вигляду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,d\,x + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}d\,y = 0.$$

Після інтегрування отримуємо

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,d\,x + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}d\,y = C. \qquad (2)$$

Рівняння (2) визначає розв'язок початкового рівняння (1) у неявній формі. Нагадаємо, що розв'язок ДР, виражений в неявній формі, називають інтегралом цього рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $x\left(y^2-1\right)d\,x + y\,d\,y = 0$ методом відокремлювання змінних та з використанням функції `DSolve`.

Спочатку створюємо функції $f_1(x), g_1(y), f_2(x), g_2(y)$.

```
f1[x_] = x;
g1[y_] = y^2 - 1;
f2[x_] = 1;
g2[y_] = y;
```

Тепер записуємо рівняння (2). Рівняння є об'єктом, і нам зручно позначити його ідентифікатором `eq`. Виконавши інструкцію

```
eq = Integrate[f1[x]/f2[x], dx] + Integrate[g2[y]/g1[y], dy] == C1
```

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\text{Log}[-1 + y^2] == \text{C1}$$

визначаємо інтеграл диференціального рівняння. В даному прикладі це рівняння нескладно розв'язати відносно y, отримавши розв'язок в явному вигляді.

Solve[eq, *y*, Reals]

$\{\{y \to -\sqrt{1+e^{2C1-x^2}}\},\{y \to \sqrt{1+e^{2C1-x^2}}\}\}$

Тут опція `Reals` функції `Solve`, говорить про те, що слід шукати розв'язки для дійсних значень змінних.

Розв'яжемо рівняння за допомогою функції `DSolve`, яка має наступний формат виклику: `DSolve[рівняння,y,x]`. Перший аргумент – рівняння, записане у термінах функцій та її похідних (`y[x],y'[x],y''[x],...`). Другий аргумент – ім'я шуканої функції або вираз, наприклад, `y` або `y[x]`. Третій аргумент – ім'я незалежної змінної. Результат повертається у вигляді списку правил підстановки.

Трансформуємо початкове рівняння до вигляду $y\,y' + x\left(y^2 - 1\right) = 0$, де $y' = d\,y/d\,x$. У такій формі його можна використовувати у функції `DSolve`.

DSolve[*y*[*x*]*y*'[*x*] + *x* (*y*[*x*]^2 − 1) == 0, *y*[*x*], *x*]

$\{\{y[x] \to -\sqrt{1+e^{-x^2+2C[1]}}\},\{y[x] \to \sqrt{1+e^{-x^2+2C[1]}}\}\}$

Як бачите, розв'язки вийшли такими, як і раніше, але використання функції `DSolve` дозволяє запобігти багатьох рутинних операцій.

Приклад. Знайти частинний інтеграл рівняння $y'\cos x = y/\ln y$, який задовольняє умові $y(0) = 1$. Поклавши $y' = d\,y/d\,x$, перепишемо вихідне рівняння у вигляді $\dfrac{y}{\ln y}d\,x - \cos x\,d\,y = 0$. Тоді маємо:

```
Clear[C1, x, y];
f1[x_] = 1;
g1[y_] = y / Log[y];
f2[x_] = Cos[x];
g2[y_] = 1;
eq = Integrate[f1[x] / f2[x], x] + Integrate[g2[y] / g1[y], y]
```

$$\frac{\text{Log}[y]^2}{2} - \text{Log}[\text{Cos}[\frac{x}{2}] - \text{Sin}[\frac{x}{2}]] + \text{Log}[\text{Cos}[\frac{x}{2}] + \text{Sin}[\frac{x}{2}]]$$

Тут `eq` представляє ліву частину рівняння (2). Стала C_1 частинного інтеграла визначається із співвідношення $C_1 = \text{eq}\big|_{x=0,\,y=1}$.

```
C1 = eq /. {x → 0, y → 1}
```

```
0
```

Таким чином, отримуємо

```
eq == C1
```

$$\frac{\text{Log}[y]^2}{2} - \text{Log}[\text{Cos}[\frac{x}{2}] - \text{Sin}[\frac{x}{2}]] + \text{Log}[\text{Cos}[\frac{x}{2}] + \text{Sin}[\frac{x}{2}]] == 0$$

Щоб різницю логарифмів перетворити в логарифм частки в останньому виразі слід зробити наступну підстановку

eq1 = eq/. (Log[u_] − Log[v_] → Log[u/v])

$$\frac{\text{Log}[y]^2}{2}+\text{Log}\left[\frac{\text{Cos}[\frac{x}{2}]+\text{Sin}[\frac{x}{2}]}{\text{Cos}[\frac{x}{2}]-\text{Sin}[\frac{x}{2}]}\right]$$

Справа в тому, що *Mathematica* розглядає логарифм як функцію комплексної змінної, для якої перетворення типу $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, $\ln(a/b)=\ln a-\ln b$ або $\ln a^b=b\ln a$ у загальному випадку несправедливі (наприклад, $\ln((-3)\cdot(-2))\neq\ln(-3)+\ln(-2)$). Підстановка `Log[u_]-Log[v_]->Log[u/v]` каже, що різниця логарифмів з довільними виразами, які стоять під логарифмами (про це говорять символи підкреслення) слід замінити логарифмом частки цих виразів.

Остаточно, інтеграл рівняння можна записати у вигляді

FullSimplify[eq1] == C1

$$\frac{\text{Log}[y]^2}{2}+\text{Log}[1+\frac{2}{-1+\text{Cot}[\frac{x}{2}]}]==0$$

Функція `FullSimplify` еквівалентна функції `Simplify`, але краще вміє виконувати спрощення математичних виразів.

■

Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{3}$$

називають **рівнянням в повних диференціалах**, якщо $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. В такому випадку ліва частина рівняння (3) є повний диференціал $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ деякої функції $u(x,y)$, яку можна знайти за формулою

$$u=\int_{x_0}^{x}P(\tau,y)d\tau+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt. \tag{4}$$

В результаті, загальний інтеграл ДР (3) має вигляд $u(x,y)=C$.

Приклад. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(e^x+y+\sin y\right)dx+\left(e^y+x+x\cos y\right)dy=0.$$

Спочатку слід перевірити, що рівняння відноситься до потрібного типу.

P[x_, y_] = Exp[x] + y + Sin[y];

Q[x_, y_] = Exp[y] + x + xCos[y];

∂y P[x, y] == ∂x Q[x, y]

`True`

Обравши будь-які значення x_0 та y_0, наприклад, $x_0=0$, $y_0=0$, за формулою (4) знаходимо функцію $u(x,y)$.

x0 = 0; y0 = 0;

$$\boldsymbol{u}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \int_{\mathbf{x0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P}[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}] \, \mathbb{d}\boldsymbol{\tau} + \int_{\mathbf{y0}}^{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{Q}[\mathbf{x0}, \boldsymbol{v}] \, \mathbb{d}\boldsymbol{v}$$

$$-2 + e^{x} + e^{y} + xy + x \operatorname{Sin}[y]$$

Враховуючи, що цей вираз дорівнює довільній сталій, наявність двійки у лівій частині інтеграла є зайвим. Перенесемо двійку в праву частину та перепозначимо сталу. Тоді загальний інтеграл ДР можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] + \mathbf{2} == (\mathbf{C1} + \mathbf{2}) /. \mathbf{C1} + \mathbf{2} \to \mathbf{C2}$$

$$e^{x} + e^{y} + xy + x \operatorname{Sin}[y] == \mathrm{C2}$$

Приклад. Знайти частинний інтеграл рівняння $(x + y - 1)d\,x + (e^{y} + x)d\,y = 0$, який задовольняє умові $y(2) = 0$.

Спочатку переконаємось, що маємо справу з рівнянням в повних диференціалах.

$$\boldsymbol{P}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{1};$$

$$\boldsymbol{Q}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \mathbf{Exp}[\boldsymbol{y}] + \boldsymbol{x};$$

$$\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] == \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$$

```
True
```

Аналогічно попередньому прикладу, обравши довільні значення x_0 та y_0, наприклад, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, за формулою (4) знайдемо функцію $u(x, y)$.

$$\mathbf{x0} = \mathbf{0}; \mathbf{y0} = \mathbf{0};$$

$$\boldsymbol{u}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \int_{\mathbf{x0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P}[\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}] \, \mathbb{d}\boldsymbol{\tau} + \int_{\mathbf{y0}}^{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{Q}[\mathbf{x0}, \boldsymbol{v}] \, \mathbb{d}\boldsymbol{v}$$

$$-1 + e^{y} - x + \frac{x^2}{2} + xy$$

Мінус одиниця у виразі функції $u(x, y)$ зайва, тому визначимо функцію, яка у своєму виразі її не містить.

$$\mathbf{u1}[\mathbf{x\_}, \mathbf{y\_}] = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] + \mathbf{1}$$

Загальний інтеграл рівняння має вигляд $u_1(x, y) = C_1$, і для частинного інтеграла, стала буде дорівнювати $C_1 = u_1(2,0)$. Маємо.

$$\mathbf{C1} = \mathbf{u1}[\mathbf{2}, \mathbf{0}]$$

```
1
```

Остаточно, частинний інтеграл рівняння можна представити у вигляді

$$\mathbf{u1}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] == \mathbf{C1}$$

$$e^{y} - x + \frac{x^2}{2} + xy == 1$$

■

Рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{5}$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**. Його загальний розв'язок має вигляд

$$y = \left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)\, d\,x} d\,x + C \right) e^{-\int P(x) d\,x}, \tag{6}$$

де С – довільна стала.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Використовуючи формулу (6), отримуємо

```
Clear[C1, x, y]
P[x_] = 2 x;
Q[x_] = x Exp[-x^2];
y[x_] = Exp[-∫ P[x] 𝕕x](∫ Q[x] Exp[∫ P[x] 𝕕x] 𝕕x + C1)
```

$e^{-x^2}\left(C1 + \frac{x^2}{2}\right)$

Приклад. Проінтегрувати рівняння $y'\cos^2 x + y = tg\,x$ при початковій умові $y(0) = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді $y' + \frac{1}{\cos^2 x}y = \frac{tg\,x}{\cos^2 x}$. Маємо

```
Clear[C1, x, y]
P[x_] = 1/Cos[x]^2;
Q[x_] = Tan[x]/Cos[x]^2;
f = Exp[-∫ P[x] 𝕕x](∫ Q[x] Exp[∫ P[x] 𝕕x] 𝕕x + C1)
```

$e^{-\mathrm{Tan}[x]}(C1 + e^{\mathrm{Tan}[x]}(-1 + \mathrm{Tan}[x]))$

Вираз стане простішим, якщо розкрити дужки.

```
y1[x_] = Expand[f]
```

$-1 + C1e^{-\mathrm{Tan}[x]} + \mathrm{Tan}[x]$

Використовуючи початкову умову, отримуємо потрібний розв'язок:

```
y[x_] = y1[x] /. (Solve[y1[0] == 0, C1][[1]])
```

$-1 + e^{-\mathrm{Tan}[x]} + \mathrm{Tan}[x]$

■

Загальний розв'язок **диференціального рівняння** $y^{(n)} = f(x)$ знаходиться n – кратним інтегруванням, а саме

$$y = \underbrace{\int\int\int \ldots \int f(x)dx \ldots dx}_{n\ раз} + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \qquad (7)$$

де $C_1, \ldots, C_n$ довільні сталі.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = xe^{-x}$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

У відповідності з формулою (7) знаходимо загальний розв'язок.

```
Clear[C1, C2, x, y];
F[x_] = Integrate[x Exp[-x], x, x] + C1 x + C2
```

$C2 + C1\,x + e^{-x}(2 + x)$

Сталі C_1 та C_2 знаходимо з системи рівнянь $F(0) = 1,\ F'(0) = 0$.

```
s = Solve[{F[0] == 1, F'[0] == 0}, {C1, C2}]
{{C1->1, C2->-1}}
```

Виконавши підстановку, отримуємо розв'язок ДР, який задовольняє початковим умовам.

$\boldsymbol{y[x\_] = F[x]/.s[[1]]}$

$-1 + x + e^{-x}(2 + x)$

Приклад. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = \cos^2 x$ $y^{(4)} = xe^{-x}$ з початковими умовами $y(0) = 1/32,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1/8,\ y'''(0) = 0.$

У відповідності з (7) знаходимо загальний розв'язок.

$\boldsymbol{F[x\_] = Integrate[x\ Exp[-x], x, x, x, x] + C1x^3 + C2x^2 + C3x + C4}$

$C4 + C3x + C2x^2 + C1x^3 + e^{-x}(4 + x)$

Сталі знаходимо з системи рівнянь, яка отримується підстановкою початкових умов у функцію $F(x)$.

$\boldsymbol{s = Solve[\{F[0] == 1/32, F'[0] == 0, F''[0] == 1/8, F'''[0] == 0\},\ \{C1, C2, C3, C4\}]}$

$\{\{C1 \to \frac{1}{6}, C2 \to -\frac{15}{16}, C3 \to 3, C4 \to -\frac{127}{32}\}\}$

Виконуючи заміну, отримуємо розв'язок ДР, який задовольняє початковим умовам.

$\boldsymbol{y[x\_] = F[x]/.s[[1]]}$

$-\frac{127}{32} + 3x - \frac{15x^2}{16} + \frac{x^3}{6} + e^{-x}(4 + x)$

■

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами мають вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \qquad (8)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – деякі дійсні числа.

Якщо розв'язок шукати у вигляді $y = e^{kx}$, то підстановка в (8) приводить до алгебраїчного рівняння відносно невідомої k:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (9)$$

Рівняння (9) має n коренів (дійсних або комплексних, серед яких можуть бути і рівні). Загальний розв'язок диференціального рівняння (8) будується в залежності від характеру цих коренів:

1) кожному дійсному простому кореню k у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $C e^{kx}$;
2) кожному дійсному кореню кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right) e^{kx}$;
3) кожній парі комплексно спряжених простих коренів $k = \alpha \pm \boldsymbol{i}\beta$ у загальному розв'язку відповідає доданок $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$;
4) кожній парі комплексно спряжених коренів $k = \alpha \pm \boldsymbol{i}\beta$ кратності m у загальному розв'язку відповідає доданок вигляду $e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right)\cos\beta x + \left(C_1' + C_2' x + \ldots + C_m' x^{m-1}\right)\sin\beta x\right)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Виконаємо у ДР заміну, підставивши замість *y* функцію e^{kx}.

```
Remove[x, y]
eq = y''[x] - 7y'[x] + 6y[x];
q = (eq/. y → (Exp[k#]&))
```

$6e^{kx} - 7e^{kx}k + e^{kx}k^2$

Тут інструкція `eq/.y→(Exp[k#]&)` виконує в диференціальному рівнянні `eq` заміну функції `y` «чистою» функцією $e^{k\#}$ &. Нагадаємо, що символ # заміняє у тілі функції її аргумент, а символ & використовується для постфіксного визначення функції.

Тепер конструюємо ліву частину рівняння (9).

```
p = Collect[q, Exp[kx]]/Exp[kx]
```

$6 - 7k + k^2$

і знаходимо його корені.

```
r = Solve[p == 0, k]
```

$\{\{k \to 1\}, \{k \to 6\}\}$

Оскільки корені дійсні та різні, то ми маємо перший випадок, і загальний розв'язок ДР буде мати вигляд:

```
y[x_] = C1 * Exp[r[[1, 1, 2]]x] + C2 * Exp[r[[2, 1, 2]]x]
```

$C1\ e^{x} + C2\ e^{6x}$

Для виділення значень коренів із списку `r={{k→1},{k→6}}` ми використовуємо індексацію. Наприклад, `r[[1]]` виділяє із `r` перший внутрішній список `{k->1}`, елемент `r[[1,1]]` представляє внутрішність цього списку, тобто конструкцію `k->1`, а `r[[1,1,2]]` репрезентує праву частину такої конструкції, тобто число 1.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

Виконаємо в ДР заміну, підставивши замість `y` функцію e^{kx}. Потім сконструюємо ліву частину рівняння (9) та знайдемо його корені.

```
Remove[x, y]
eq = y''''[x] - 13y''[x] + 36y[x];
q = (eq/. y → (Exp[k#]&));
p = Collect[q, Exp[kx]]/Exp[kx];
r = Solve[p == 0, k]
```

$\{\{k \to -3\}, \{k \to -2\}, \{k \to 2\}, \{k \to 3\}\}$

Всі корені дійсні та різні, і ми маємо перший випадок. Загальний розв'язок ДР буде мати вигляд:

```
y[x_] = Sum[C_i Exp[r[[i, 1, 2]]x], {i, 4}]
```

$e^{-3x}C_1 + e^{-2x}C_2 + e^{2x}C_3 + e^{3x}C_4$

Довільні сталі ми тут позначили через C_1, C_2, C_3, C_4. Щоб ввести ім'я з індексом треба набрати ім'я змінної, наприклад, C. Потім треба натиснути комбінацію клавіш **Ctrl-_** (підкреслення) і у квадратику трафарету C▪, який

з’явиться, ввести потрібний індекс. Щоб скоротити ввід ми використали функцію Sum.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Виконаємо в рівнянні заміну $y = e^{kx}$. Потім сконструюємо ліву частину рівняння (9) та знайдемо його корені.

```
Remove[x, y];
eq = y'''[x] - 2y''[x] + y'[x];
q = (eq/. y → (Exp[k#]&));
p = Collect[q, Exp[kx]]/Exp[kx];
r = Solve[p == 0, k]
```

$\{\{k \to 0\}, \{k \to 1\}, \{k \to 1\}\}$

Всі корені дійсні, але другий має кратність 2. Для нього має місце другий випадок, і загальним розв’язком ДР буде:

```
y[x_] = C1Exp[r[[1, 1, 2]]x] + C2Exp[r[[2, 1, 2]]x] + C3xExp[r[[3, 1, 2]]x]
```

$C1 + C2e^{x} + C3e^{x}x$

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Виконаємо в рівнянні заміну $y = e^{kx}$. Потім сконструюємо ліву частину рівняння (9) і знайдемо його корені.

```
Remove[x, y];
eq = y''[x] - 4y'[x] + 13y[x];
q = (eq/. y → (Exp[k#]&));
p = Collect[q, Exp[kx]]/Exp[kx];
r = Solve[p == 0, k]
```

$\{\{k \to 2 - 3i\}, \{k \to 2 + 3i\}\}$

Ми отримали пару комплексно спряжених коренів, для яких має місце третій випадок. Тоді загальний розв’язок ДР буде мати вигляд:

```
y[x_] = Exp[Re[r[[2, 1, 2]]]x](C1Cos[Im[r[[1, 1, 2]]]x] + C2Sin[Im[r[[2, 1, 2]]]x])
```

$e^{2x}(C1\cos[3x] + C2\sin[3x])$

Приклад. Знайти розв’язок рівняння $y'' - y' - 2y = 0$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Спочатку побудуємо загальний розв’язок ДР.

```
Remove[x, y];
eq = y''[x] - y'[x] - 2y[x];
q = (eq/. y → (Exp[k#]&));
p = Collect[q, Exp[kx]]/Exp[kx];
r = Solve[p == 0, k]
```

```
{{k->-1},{k->2}}
```

Корені дійсні та різні. У відповідності із випадком 1, створимо загальний розв’язок, який позначимо $y_c(x)$. Сталі знайдемо з системи рівнянь $y_c(0) = 0$, $y_c'(0) = 3$.

```
yc[x_] = C1 Exp[r[[1, 1, 2]]x] + C2 Exp[r[[2, 1, 2]]x];
```

$$c = \mathbf{Solve}[\{yc[0] == 0, yc'[0] == 3\}, \{C1, C2\}]$$
$$\{\{C1 \to -1, C2 \to 1\}\}$$
Виконавши підстановку знайдених значень C_1 та C_2 у загальний розв'язок $y_c(x)$, остаточно отримуємо
$$y[x\_] = yc[x]/.c[[1]]$$
$$-e^{-x} + e^{2x}$$

■

У теорії звичайних диференціальних рівнянь розглядається багато різних типів рівнянь, для яких розроблені відповідні методики розв'язання. Проаналізувавши тип рівняння та, обравши методику, яка підходить, можна знайти загальний інтеграл рівняння, та підібрати значення сталих, якщо задані додаткові умови. Щоб полегшити життя користувачам, в системі існує функція `DSolve`, яка сама визначає тип рівняння та реалізує необхідну методику його розв'язання, дозволяючи запобігти багатьох рутинних операцій. У наступному параграфі ми детально опишемо цю функцію.

8.2 Використання функції DSolve.

Основною функцією, яка використовується в *Mathematica* для розв'язання ЗДР у символьному вигляді, є функція `DSolve`. Вона має наступний синтаксис:

```
DSolve[рівняння,y,x]
```

або

```
DSolve[рівняння,y[x],x]
```

Команда визначає функцію `y`, вважаючи `x` незалежною змінною `рівняння`. Її перший аргумент – рівняння (або список рівнянь), яке записане в термінах функції та її похідних (`y[x]`, `y′[x]`, `y″[x]` і т.д.). Можна використовувати інші способи позначення похідних, наприклад, $D[y[x], x]$, $\partial_x y[x]$, $\partial_{xx} y[x]$. Другий аргумент функції `DSolve` – ім'я шуканої функції або виразу, наприклад, `y` або `y[x]`. Третій аргумент – ім'я незалежної змінної. Результат повертається у вигляді списку правил підстановки.

$$\mathbf{DSolve}[y'[x] == x^2, y[x], x]$$
$$\{\{y[x] \to \frac{x^3}{3} + C[1]\}\}$$

Тут `C[1]` представляє довільну константу інтегрування.

Не забувайте, що в рівняннях використовується подвійний знак рівності '==', а не одинарний, який означає присвоювання.

Якщо рівняння записане у формі, яка використовує диференціали, то його слід трансформувати до вигляду, який містить похідну.

Функція `DSolve` в якості першого аргументу може приймати список рівнянь, серед яких можуть бути початкові умови.

$$\mathbf{DSolve}[\{D[y[x], x] == x^2, y[0] == 1\}, y[x], x]$$
$$\{\{y[x] \to \frac{1}{3}(3 + x^3)\}\}$$

Вона може знаходити розв'язки з довільними параметрами в якості коефіцієнтів.

$$\mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{a}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to e^{ax} C[1]\}\}$$

Символьні параметри можуть бути присутніми не тільки в якості коефіцієнтів, а також в якості значень в початкових умовах.

$$\mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{a}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{c}] == \boldsymbol{b}\}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to b e^{-ac+ax}\}\}$$

Функція `DSolve` шукає відповідь у символьному вигляді та намагається повернути розв'язок в квадратурах. Якщо рівняння містить невизначену функцію, то у розв'язку з'являються невизначені інтеграли.

$$\mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to C[1] + \int_1^x f[K[1]]\, dK[1]\}\}$$

Тут `K[1]` означає змінну інтегрування, а `C[1]` представляє довільну константу. Якщо такі позначення вас не влаштовують, то можна виконати заміну/підстановку наступним чином

$$\mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]/.\{\boldsymbol{K}[\mathbf{1}] \to \boldsymbol{t}, \boldsymbol{C}[\mathbf{1}] \to \boldsymbol{C_1}\}$$

$$\{\{y[x] \to e^x \int_1^x e^{-t} f[t]\, dt + e^x C_1\}\}$$

Щоб ввести C_1 наберіть C, потім комбінацію **`Ctrl-_`** (підкреслення). В отриманий шаблон $C_{\blacksquare}$ введіть значення 1. Для повернення на нормальний рівень вводу наберіть комбінацію клавіш **`Ctrl-пробіл`**. Нагадаємо, що запис `/.ім'я1->ім'я2` означає підстановку у попередній вираз замість кожного входження набору символів `ім'я1` іншого набору символів `ім'я2`.

В якості другого аргументу функції `DSolve` може виступати вираз `y[x]` або ім'я функції `y` (символ `y` без аргументу). Наприклад, обидві наступні інструкції припустимі.

$$\mathbf{rez1} = \mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{1}, \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to 1 + e^{-x} C[1]\}\}$$

$$\mathbf{rez2} = \mathbf{DSolve}[\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] == \mathbf{1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y \to \text{Function}[\{x\}, 1 + e^{-x} C[1]]\}\}$$

В останній команді другий аргумент функції `DSolve` позначений `y`, а не `y[x]`. Припустимо використовувати обидві форми, однак між ними є відмінність. В останній команді розв'язок отримується у вигляді функції, а не у вигляді правила для обчислення виразу `y[x]`. Відмінність проявляється при подальшому використанні результата. Наприклад,

$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}] + \mathbf{2}\boldsymbol{y'}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{y}[\mathbf{0}]/.\,\mathbf{rez1}$$

$$\{1 + e^{-x} C[1] + y[0] + 2y'[x]\}$$

Зверніть увагу, що `y[0]` та `y'[x]` не були замінені. Однак якщо ЗДР розв'язано відносно функції, то при підстановці заміна буде виконуватися всюди, де очікується.

$\boldsymbol{y[x] + 2y'[x] + y[0]/.\,rez2}$

$\{2 + C[1] - e^{-x}C[1]\}$

Отже,

`DSolve[eqn,y[x],x]` розв'язує ДР відносно *виразу* `y[x]`.

`DSolve[eqn,y, x]` розв'язує ДР відносно *функції* `y`.

Чим вище порядок диференціального рівняння, тим більше довільних сталих з'являється у розв'язку. Наприклад, загальний розв'язок рівняння четвертого порядку включає 4 невизначені константи.

$\boldsymbol{DSolve[y''''[x] == y[x], y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{x}C[1] + e^{-x}C[3] + C[2]\text{Cos}[x] + C[4]\text{Sin}[x]\}\}$

Кожна початкова умова зменшує на одиницю кількість невизначених сталих.

$\boldsymbol{DSolve[\{y''''[x] == y[x], y[0] == 0\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-x}(-C[1] + e^{2x}C[1] - C[2] + e^{x}C[2]\text{Cos}[x] + e^{x}C[4]\text{Sin}[x])\}\}$

$\boldsymbol{DSolve[\{y''''[x] == y[x], y[0] == y'[0] == 0\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-x}(-C[1] + e^{2x}C[1] - C[2] + e^{x}C[2]\text{Cos}[x] -$
$-2e^{x}C[1]\text{Sin}[x] - e^{x}C[2]\text{Sin}[x])\}\}$

Якщо кількість початкових умов співпадає із порядком рівняння, то розв'язок визначається однозначно (без невизначених сталих).

$\boldsymbol{DSolve[\{y''''[x] == y[x], y[0] == y'[0] == 0, y''[0] == 1, y'''[0] == 0\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to \frac{1}{4}e^{-x}(1 + e^{2x} - 2e^{x}\text{Cos}[x])\}\}$

Ось ще приклад з використанням початкових умов (задача Коші) та іншим способом позначення похідної.

$\boldsymbol{DSolve[\{\partial_{xx}y[x] + y[x] == 0, y[\pi/2] == 1, y'[\pi/2] == 0\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to \text{Sin}[x]\}\}$

Щоб набрати вираз $\partial_{xx}y[x]$ ви можете ввести комбінацію клавіш **Esc–pd–Esc**, яка створює символ ∂, потім комбінацію клавіш **Ctrl-_** (підкреслення). Після цього введіть x, потім комбінацію клавіш **Esc–,**(кома)**–Esc**, яка ставить невидиму кому, і знову введіть x, після чого з'явиться ∂_{xx}. Потім натисніть клавішу управління текстовим курсором → і введіть `y[x]`.

Визначення точного розв'язку ЗДР є складною задачею, і далеко не для кожного рівняння можна знайти розв'язок у символьному вигляді. Легше за все розв'язуються лінійні ЗДР. Наприклад,

$\boldsymbol{DSolve[\{xy'[x] == 3y[x] + x^{4}\text{Cos}[x], y[2\pi] == 0\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to x^{3}\text{Sin}[x]\}\}$

$\boldsymbol{DSolve[y'[x] - x\,y[x] == 0, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{\frac{x^2}{2}}C[1]\}\}$

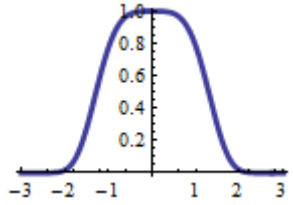
Розглянемо способи використання розв'язків.

Якщо ми хочемо побудувати графік розв'язку, то список правил підстановки треба перетворити у вираз, який слід передати функції `Plot`. Це можна зробити, наприклад наступним чином.

$\boldsymbol{ds = DSolve[\{y'[x] == -x^{3}y[x], y[0] == 1\}, y[x], x]}$

$\{\{y[x] \to e^{-\frac{x^4}{4}}\}\}$

$\mathbf{Plot}[y[x]/.\mathbf{ds},\{x,-3,3\},\mathbf{PlotStyle}->\mathbf{Thickness}[0.01]]$



Для поясненя останньої інструкції виконайте наступну команду.

$y[x]/.\mathbf{ds}$

$\{e^{-\frac{x^4}{4}}\}$

Як бачимо вона повертає «справжній» вираз $e^{-x^2/4}$. Саме він використовується в якості першого аргумента функції `Plot`.

Можна побудувати графік розв'язку при різних значеннях сталої. Наприклад,

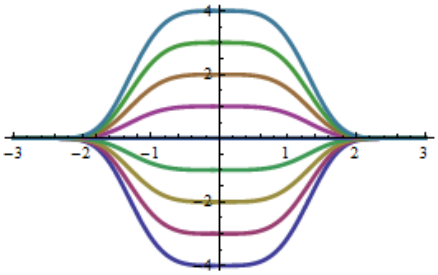
$\mathbf{ds}=\mathbf{DSolve}[\{y'[x]==-x^3y[x]\},y[x],x]$

$L=y[x]/.\mathbf{ds}/.C[1]\to\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$\{\{-4e^{-\frac{x^4}{4}},-3e^{-\frac{x^4}{4}},-2e^{-\frac{x^4}{4}},-e^{-\frac{x^4}{4}},0,e^{-\frac{x^4}{4}},2e^{-\frac{x^4}{4}},3e^{-\frac{x^4}{4}},4e^{-\frac{x^4}{4}}\}\}$

Тут при створенні списка виразів L спочатку виконується підстановка `y[x]/.ds`, яка повертає вираз $\{e^{-\frac{x^4}{4}}C[1]\}$ з невизначеною сталою. Потім `C[1]` по черзі заміняється значеннями із списка `{-4,-3,...,3,4}`. В результаті другої підстановки створюється список L. Використовуючи його в якості аргумента функції `Plot`, можна побудувати графіки всіх виразів з цього списка.

$\mathbf{Plot}[L,\{x,-3,3\},\mathbf{PlotStyle}->\{\mathbf{Thickness}[0.01]\}]$



Розглянемо, як можна побудувати графік розв'язку, якщо він повертається у вигляді списка правил підстановки для функції. Для прикладу розв'яжемо наступну задачу Коші.

$\mathbf{Remove}[y]$

$\mathbf{ds}=\mathbf{DSolve}[\{y''[x]+2y'[x]+65y[x]==0,y[0]==0,y'[0]==1\},y,x]$

$\{\{y\to\text{Function}[\{x\},\frac{1}{8}e^{-x}\text{Sin}[8x]]\}\}$

Щоб останній список списків перетворити в одинарний список треба позбутися від однієї пари охоплюючих фігурних дужок, наприклад, взяти `ds[[1]]`. Щоб позбутися від обох пар охоплюючих дужок треба використати два індекси `ds[[1,1]]`. Наприклад,

$\mathbf{ds}[[1,1]]$

$y\to\text{Function}[\{x\},\frac{1}{8}e^{-x}\text{Sin}[8x]]$

Підстановка `y->Function[...]` це двоелементий вираз, до елементів якого можна звертатися за індексом. Щоб звернутися до лівої частини підстановки (отримати ім'я `y`) треба використати індекс 1, а до правої – індекс 2. Таким чином, інструкція

$\mathbf{ds}[[\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2}]]$

$\text{Function}[\{x\},\frac{1}{8}e^{-x}\text{Sin}[8x]]$

повертає «чисту» функцію. Ви можете присвоїти їй ім'я, наприклад:

$\boldsymbol{z}=\mathbf{ds}\left[[\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2}]\right];$

В результаті ідентифікатора `z` стає повноцінним ім'ям функції, з якою можна працювати звичайним чином, наприклад, обчислювати значення в точці, диференціювати, будувати графік, та використовувати у будь-яких інших ситуаціях, в яких доцільно використовувати функцію.

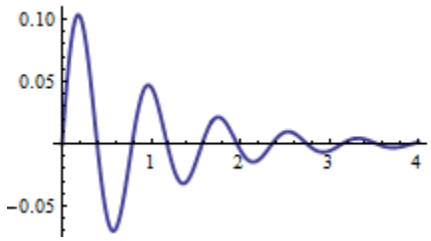
$\boldsymbol{z}[\mathbf{1}]$

$\frac{\text{Sin}[8]}{8e}$

$\boldsymbol{z}'[\boldsymbol{x}]$

$e^{-x}\text{Cos}[8x]-\frac{1}{8}e^{-x}\text{Sin}[8x]$

$\mathbf{Plot}[\mathbf{z}[\mathbf{x}],\{\mathbf{x},\mathbf{0},\mathbf{4}\},\mathbf{PlotRange}\rightarrow\mathbf{All}]$



Не забувайте видаляти значення змінних з робочого простору. Так перед розв'язанням останнього диференціального рівняння слід виконати команду `Remove[y]`, щоб «забути» визначення функції `y`, яке можливо було зроблене раніше.

Окрім графіків розв'язків, часто будують графіки фазових траєкторій. Для диференціальних рівнянь $2-$го порядку відносно функції `z` вони представляються параметричними кривими $x=z(t),y=z'(t)$. Ось як можна побудувати фазову траєкторію, якщо розв'язок ДР визначається відносно функції.

$\mathbf{Remove}[\mathbf{x},\boldsymbol{y}];$

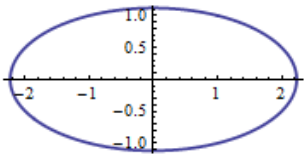
$\mathbf{ds}=\mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y}''[\boldsymbol{x}]+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]==\mathbf{0},\boldsymbol{y}[\mathbf{0}]==\mathbf{1},\boldsymbol{y}'[\mathbf{0}]==\mathbf{1}\},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}]$

$\{\{y\rightarrow\text{Function}[\{x\},\text{Cos}[\frac{x}{2}]+2\text{Sin}[\frac{x}{2}]]\}\}$

$\boldsymbol{x}=\mathbf{ds}[[\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2}]]$

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'$

$\mathbf{ParametricPlot}[\{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}],\boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\},\{\boldsymbol{t},\mathbf{0},\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\}]$



Ось як можна побудувати фазову траєкторію, якщо розв'язок визначається відносно виразу.

```
Remove[x, y];
ds = DSolve[{64y''[x] + 16y'[x] + 65y[x] == 1,
                                    y[0] == -1, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

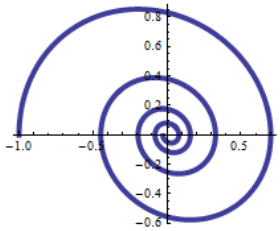
$$\{\{y[x] \to \frac{1}{260} e^{-x/8}(4e^{x/8} - 264\text{Cos}[x] - 33\text{Sin}[x])\}\}$$

Перед викликом функції `DSolve` ми використали інструкцію `Remove[x,y]`. Це необхідно тому, що у попередньому прикладі ми використовували ідентифікатори `x` та `y` для позначення функцій. Але інструкція `DSolve` очікує ці імена «чистими».

Тепер побудуємо фазову траєкторію, використовуючи вираз `y[x]` для створення потрібних нам функцій.

```
X[x_] = Simplify[ds[[1, 1, 2]]]
Y[x_] = X'[x];
ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 30}, PlotStyle → Thickness[0.01],
                                                    PlotRange → All]
```

$$\frac{1}{260}(4 - 264e^{-x/8}\text{Cos}[x] - 33e^{-x/8}\text{Sin}[x])$$



Для виділення виразу, який стоїть у правій частині підстановки `ds`, ми використали індексацію `ds[[1,1,2]]`, яка є виразом відносно змінної `x`. Тому в лівій частині інструкції `X[x_]=Simplify[ds[[1,1,2]]]` ми повинні використовувати `x` в якості імені аргументу. Використання іншого імені буде невірним. Створити функцію `Y` можна було б інструкцією `Y=X'`, що еквівалентно `Y[x_]=X'[x]`. При використанні функцій, наприклад при побудові графіка, ім'я аргументу функцій може бути будь-яким, і ми використали ім'я `t`.

Функція `DSolve[{eqn1,eqn2,...},{y1, y2,...},x]` розв'язує систему диференціальних рівнянь, які при запису необхідно об'єднати у список. В цьому випадку в якості другого аргументу `DSolve` потрібно задавати список імен шуканих виразів (або функцій).

$$\mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{z}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]\}, \{\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}]\}, \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[1] - \frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[2],$$
$$z[x] \to -\frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[1] + \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[2]\}\}$$

Тут у списку правил підстановок використовуються вирази. Розв'язки тієї ж самої системи можна отримати з використанням функцій.

$$\mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{z}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}]\}, \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}, \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y \to \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[1] - \frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[2]],$$
$$z \to \text{Function}[\{x\}, -\frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x})C[1] + \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})C[2]]\}\}$$

Відзначимо, що в обох випадках розв'язок включає дві константи. Та ж система з початковими умовами дає розв'язок без невизначених сталих.

$$\mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{z}'[\boldsymbol{x}] == -\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}[\mathbf{0}] == \mathbf{0}, \boldsymbol{z}[\mathbf{0}] == \mathbf{1}\}, \{\boldsymbol{y}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{z}[\boldsymbol{x}]\}, \boldsymbol{x}]$$

$$\{\{y[x] \to -\frac{1}{2}e^{-x}(-1+e^{2x}), z[x] \to \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{2x})\}\}$$

Для того щоб отримані правила підстановки перетворити в функції, треба позбутися від зовнішнього списку, а з внутрішнього взяти перше або друге правило для підстановки відповідно в функції `x` та `y`. Для прикладу розв'яжемо наступну систему диференціальних рівнянь.

$$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}]$$

$$\mathbf{ds} = \mathbf{DSolve}[\{\boldsymbol{x}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{t}] == \boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{x}[\mathbf{0}] == \mathbf{0}, \boldsymbol{y}[\mathbf{0}] == \mathbf{1}\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}, \boldsymbol{t}]$$

$$\{\{x \to \text{Function}[\{t\}, \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t})], y \to \text{Function}[\{t\}, \frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{2t})]\}\}$$

Функції, які представлять розв'язок, ми можемо отримати, використовуючи індексацію, наприклад, `ds[[1,1,2]]` та `ds[[1,2,2]]`. Наступний ланцюжок команд та їх результатів пояснює це.

$$\mathbf{ds}[[\mathbf{1}, \mathbf{1}]]$$

$$x \to \text{Function}[\{t\}, \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t})]$$

$$\mathbf{ds}[[\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}]]$$

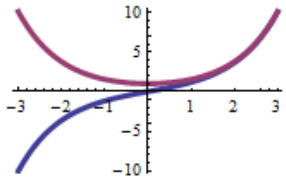
$$\text{Function}[\{t\}, \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t})]$$

$$\mathbf{ds}[[\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}]][\boldsymbol{t}]$$

$$\frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{2t})$$

Якщо ми бажаємо зобразити графіки функцій `x[t]`, `y[t]`, які представлять розв'язок системи ЗДР, то ці функції треба створити, наприклад, наступним чином

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{ds}[[\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}]]$$
$$\boldsymbol{y} = \mathbf{ds}[[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]]$$
$$\mathbf{Plot}[\{\boldsymbol{x}[\boldsymbol{t}], \boldsymbol{y}[\boldsymbol{t}]\}, \{\boldsymbol{t}, -\mathbf{3}, \mathbf{3}\}, \mathbf{PlotStyle} \to \mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}]]$$



Приклад. Побудувати фазовий портрет системи

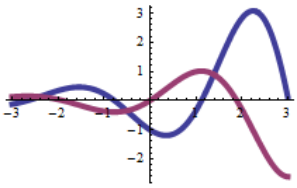
$$\frac{dx}{dt} = x + 3y,\ \frac{dy}{dt} = -x.$$

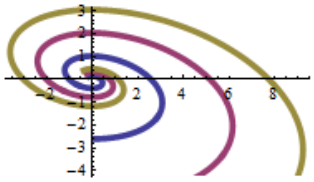
В якості початкових умов взяти $x(0) = s$, $y(0) = 0$. Маємо.

```
Remove[x, y, t, s];
ds = DSolve[{x'[t] == x[t] + 3y[t], y'[t] == -x[t],
                    x[0] == s, y[0] == 0}, {x, y}, t];
```

Різні значення параметра `s` визначають різні розв'язки. Зобразимо один з розв'язків на інтервалі $t \in [-3,3]$ при $s = -1$.

```
x[s_] = ds[[1, 1, 2]];
y[s_] = ds[[1, 2, 2]];
Plot[{x[-1][t], y[-1][t]}, {t, -3, 3}, PlotStyle → Thickness[0.01],
                    PlotRange-> All]  (* наступний рисунок зліва *)
```





Зверніть увагу на те, що при створенні функцій `x` та `y` ми вказали додатковий аргумент `s`, оскільки він міститься у виразах `ds[[1,1,2]]` та `ds[[1,2,2]]`. Дійсно, якщо виконати команду

```
ds[[1, 1, 2]][t]
```

$$\frac{e^{t/2} s\left(\sqrt{11}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{11}t}{2}\right] + \mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{11}t}{2}\right]\right)}{\sqrt{11}}$$

то крім аргументу `t`, ви побачите, що у виразі присутній параметр `s`. І це зрозуміло, оскільки він використовувався при завданні початкової умови.

Побудуємо фазові портрети для значень $s = -1, -2, -3$ на тому ж інтервалі $t \in [-3,3]$. Маємо

```
ParametricPlot[{{x[-1][t], y[-1][t]}, {x[-2][t], y[-2][t]}, {x[-3][t], y[-3][t]}},
  {t, -3, 3}, PlotStyle-> Thickness[0.02]]  (* попередній рисунок справа *)
```

■

У тих випадках, коли символьний розв'язок диференціального рівняння не може бути знайдений, допомагає функція `NDSolve`, яка дозволяє чисельно розв'язувати диференціальні рівняння. Вона має наступний синтаксис

`NDSolve[{рівняння},y,{x,`x_{min}`,`x_{max}`}]`

де `{рівняння}` містять запис ЗДР і початкових умов відносно невідомої функції `y` (або виразу `y[x]`). Третій аргумент `{x,`x_{min}`,`x_{max}`}` задає ім'я та діапазон зміни незалежної змінної. `NDSolve` повертає розв'язок у вигляді

функції InterpolatingFunction. Список рівнянь повинен містити достатню кількість початкових та граничних умов для повного визначення розв'язку. Початкові та граничні умови зазвичай задаються у вигляді $y[x_0]==c_0$, $y'[x_0]==b_0$ і т.д..

Функція NDSolve має такі ж аргументи, як і DSolve, але з деякими обмеженнями. Потрібно визначити достатньо додаткових умов, щоб отримати повністю визначений розв'язок. Треба також обов'язково задати інтервал зміни незалежного аргументу (на цьому інтервалі розв'язок повинен існувати).

$$\mathbf{nds = NDSolve[\{y'[x] == x^2, y[0] == 1\}, y[x], \{x, -3, 3\}]}$$

$$\{\{y[x] \to \text{InterpolatingFunction}[\{\{-3.,3.\}\},\ "<>"][x]\}\}$$

Результат повертається в такому ж форматі, що і для DSolve, за виключенням того, що розв'язок є «спеціальною» функцією InterpolatingFunction. Це чорний ящик: задаєш вхідне значення та отримуєш вихідне, але не можеш бачити нічого всередині. Зазвичай кращим способом використання InterpolatingFunction вважається побудова графіка або обчислення значень функції в точках. Ось, наприклад, як з попереднього розв'язку можна створити функцію

$$\mathbf{z[x\_] = nds[[1, 1, 2]]}$$

$$\mathbf{\{z[0], z[1], z[3]\}}$$

```
{1., 1.33333, 10.}
```

Ось приклад побудови графіка чисельного розв'язку.

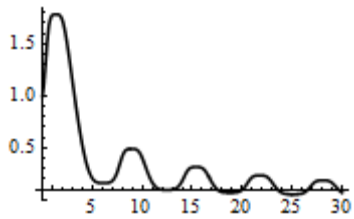
$$\mathbf{Remove[x, y];}$$

$$\mathbf{nds = NDSolve[\{y'[x] == Sin[x + y[x]]^3 y[x], y[0] == 1\}, y, \{x, 0, 30\}]}$$

$$\{\{y \to \text{InterpolatingFunction}[\{\{0.,30.\}\},\ "<>"]\}\}$$

$$\mathbf{y = nds[[1, 1, 2]];}$$

$$\mathbf{Plot[y[x], \{x, 0, 30\}, PlotRange \to All]}$$



Єдина істотна відмінність у використанні чисельного розв'язку полягає в тому, що він отриманий на скінченному інтервалі, вказаному першим аргументом функції InterpolatingFunction. Спроба звернення до розв'язку поза цим інтервалом приводить до помилки.

Можна диференціювати об'єкт InterpolatingFunction, наприклад, при побудові фазової траєкторії.

$$\mathbf{Remove[x, t];}$$

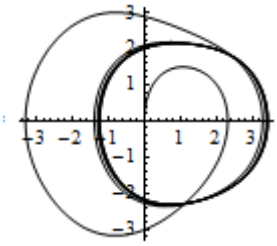
$$\mathbf{nds = NDSolve[\{x''[t] + x'[t] + Cos[x[t]] == 4Cos[t],\ x[0] == x'[0] == 0\}, x, \{t, 0, 50\}]}$$

$$\{\{x \to \text{InterpolatingFunction}[\{\{0.,50.\}\},\ "<>"]\}\}$$

$$\mathbf{x = nds[[1, 1, 2]]}$$

$$\mathbf{y = x'}$$

ParametricPlot[{$x[t], y[t]$}, {$t, 0, 50$}]



Ось приклад рівняння, яке не вдається розв'язати у символьному вигляді.

Remove[x, y];

DSolve[{$y'''[x] + y''[x] + y'[x] == -y[x]^3, y[0] == 1, y'[0] == y''[0] == 0$}, y, x]

DSolve[{$y'[x] + y''[x] + y^{(3)}[x] == -y[x]^3, y[0] == 1, y'[0] == y''[0] == 0$}, y, x]

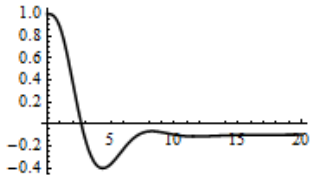
Коли *Mathematica* не може розв'язати рівняння вона повертає початкову інструкцію.

Чисельний розв'язок цього рівняння у *Mathematica* не викликає труднощів. Однак такий розв'язок не цікавий, якщо він не використаний у звичному для нас вигляді, наприклад, у вигляді графіка.

nds = **NDSolve**[{$y'''[x] + y''[x] + y'[x] == -y[x]^3$,
$y[0] == 1, y'[0] == y''[0] == 0$}, y, {$x, 0, 20$}];

y = **nds**[[1, 1, 2]];

Plot[$y[x]$, {$x, 0, 20$}, **PlotRange** → **All**]



Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $x'' + x^3 = \sin t$ з нульовими початковими умовами. Побудувати графік розв'язку та фазовий портрет.

Remove[x, t];

nds = **NDSolve**[{$x''[t] + x[t]^3 == \mathbf{Sin}[t], x[0] == x'[0] == 0$}, x, {$t, 0, 50$}]

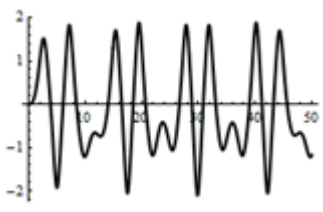
{{x → InterpolatingFunction[{{0.,50.}}," <> "]}}

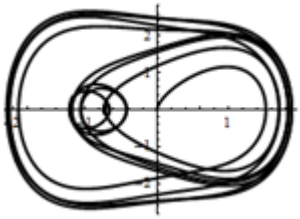
x = **nds**[[1, 1, 2]];

Plot[$x[t]$, {$t, 0, 50$}] (* наступний рисунок зліва *)

ParametricPlot[{$x[t], x'[t]$}, {$t, 0, 50$}, **AspectRatio** → **0.7**]

(*наступний рисунок справа *)





Тут зліва показаний графік розв'язку, а справа – фазова траєкторія.

9. Ряди.

9.1 Числові ряди.

Вираз $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$ де $u_n=f(n),$ називається нескінченним числовим рядом, числа $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ називаються членами ряду, а $u_n=f(n)$ називається загальним членом ряда. Ряд часто записується у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Суму перших n членів позначають S_n і називають n-ою частинною сумою ряду $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Ряд називається збіжним, якщо його n–та частинна сума S_n при необмеженному зростанні n прямує до скінченної границі, тобто якщо $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Число S називають сумою ряда. Якщо ж n–та частинна сума ряда при $n\to\infty$ не прямує до скінченної границі, то ряд називають розбіжним.

Перерахуємо основні ознаки збіжності та розбіжності рядів з додатніми членами.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Таким чином, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0,$ то ряд розбігається.

Ознака Коші. Якщо для ряду $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=W$, то цей ряд збігаєься при $W<1$ та розбігається при $W>1$.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=W$, то цей ряд збігається при $W<1$ та розбігається при $W>1$.

Інтегральна ознака. Якщо $f(x)$ при $x\geq 1$ – неперервна, додатня та монотонно спадна функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, де $u_n=f(n),$ збігається або розбігається в залежності від того, збігається чи розбігається інтеграл $\int_{n_0}^{\infty}f(x)dx\ \ (n_0\geq 1)$.

Наведемо ознаку збіжності знакозмінного ряду (*ознака Лейбніца*).

Знакопереміжний ряд $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots$ збігається, якщо абсолютні величини його членів монотонно спадають, а загальний член прямує до нуля, тобто виконуються наступні дві умови: $u_1>u_2>u_3>\ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Приклад. Дано загальний член ряду $u_n=\frac{n-1}{n^3+1}$. Написати перші шість членів ряду та знайти їх суму.

$\boldsymbol{u=.;\ u[\mathrm{n\_}]=\frac{n-1}{n^3+1};}$

$\mathbf{t = Table[u[n], \{n, 1, 6\}]}$

$\{0, \frac{1}{9}, \frac{1}{14}, \frac{3}{65}, \frac{2}{63}, \frac{5}{217}\}$

Функція `Table[u[n],{n,n_min,n_max}]` створює список із загальним членом `u[n]` при зміні `n` від n_{min} до n_{max} з кроком 1.

$\boldsymbol{S = Total[t]}$

$\frac{7997}{28210}$

або

$\mathbf{N[S]}$

0.28348104

Функція `Total[список]` обчислює суму елементів списку, який переданий їй в якості аргументу.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{3n-1}+\ldots$. Маємо

$\boldsymbol{u[n\_] = \frac{n}{3n-1}}$;

$\mathbf{Limit[u[n], n \to \infty]}$

$\frac{1}{3}$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна ознака збіжності).

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots.$

Тут зручно застосувати ознаку Коші, оскільки $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$, а границя останнього дробу знаходиться просто:

$\boldsymbol{u[n\_] = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}$;

$\boldsymbol{W = Limit[\sqrt[n]{u[n]}, n \to \infty]}$

$\frac{1}{2}$

Оскільки $W = \frac{1}{2} < 1$, то ряд збігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Знову застосуємо ознаку Коші.

$\boldsymbol{u[n\_] = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$;

$\boldsymbol{W = Limit[\sqrt[n]{u[n]}, n \to \infty]}$

$\frac{e}{2}$

Оскільки $W = \frac{e}{2} > 1$, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$. Застосуємо ознаку Д'Аламбера.

$\boldsymbol{u[\mathrm{n\_}] = \frac{2^n}{n^{10}};}$

$\boldsymbol{W = \mathbf{Limit}[\frac{u[n+1]}{u[n]}, n \to \infty]}$

2

Оскільки $W = 2 > 1$, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{3^{n/2}} + \ldots$. Застосуємо ознаку Д'Аламбера.

$\boldsymbol{u[\mathrm{n\_}] = \frac{n}{3^{n/2}};}$

$\boldsymbol{W = \mathbf{Limit}[\frac{u[n+1]}{u[n]}, n \to \infty]}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Оскільки $W = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, то ряд збігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$. Спробуємо застосувати ознаку Д'Аламбера.

$\boldsymbol{u[\mathrm{n\_}] = \frac{1}{n^2};}$

$\boldsymbol{W = \mathbf{Limit}[\frac{u[n+1]}{u[n]}, n \to \infty]}$

1

Оскільки W=1, то за допомогою ознаки Д'Аламбера не вдається розв'язати питання про збіжність ряду. Застосуємо інтегральну ознаку.

$\boldsymbol{\int_1^\infty u[n]\, dn}$

1

Інтеграл збігається (є скінченною величиною), тому збігається і даний ряд.

Приклад. Дослідити збіжність знакозмінного ряду

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots+(-1)^n\frac{n}{n^2+1}+\ldots\ .$$

Застосуємо ознаку Лейбніца. Перевіримо, що абсолютні величини членів ряду монотонно спадають.

```
Remove[u, n];
u[n_] = (-1)^n n/(n^2 + 1);
Refine[Abs[u[n + 1]] < Abs[u[n]], n ∈ Integers && n > 0]
True
```

Результат порівняння $|u_{n+1}|<|u_n|$ залежить від того, які значення може приймати змінна `n`. В нашому випадку, очевидно, що `n` є додатним цілим числом, і це припущення ми вказали, використовуючи функцію `Refine`. Інструкція `Refine[expr,assum]` повертає форму виразу `expr`, яка була б отримана, якщо символи в виразі `expr`, були б замінені числами, які задовольняють умовам `assum`.

Результат `True` каже про те, що абсолютні величини членів ряду монотонно спадають, тобто перша умова ознаки Лейбніца виконується.

Перевіримо, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Маємо

```
Limit[u[n], n → ∞]
0
```

Друга умова ознаки Лейбніца виконується. Звідси дістаємо, що ряд збігається.

■

Після встановлення факту збіжності числового ряду, зазвичай ставиться завдання знайти значення його суми. В кожному конкретному випадку треба «вигадувати» методику її визначення. Однак в пакеті *Mathematica* для цього немає необхідності, бо існує функція `Sum`, яка «вміє» знаходити не тільки скінченні суми, але у багатьох випадках суми збіжних числових рядів.

В форматі `Sum[f,{i,imax}]` функція обчислює скінченну суму $\sum_{i=1}^{i_{\max}} f_i$, при цьому якщо початкове значення індексу сумування дорівнює одиниці, то його можна не вказувати.

```
Sum[2k - 1, {k, 12}]
144
```

Інструкція `Sum[f,{i,imax}]` може бути введена як $\sum_{i}^{i_{\max}} f$. Трафарет вводу суми можна знайти на панелі спеціальних символів «Basic Math Input». Можна також використати спеціальні комбінації клавіш. Для вводу знака суми наберіть **`Esc–sum–Esc`**. Потім треба ввести підрядковий та надрядковий індекси у значка суми Σ. Для цього введіть **`Ctrl-_`** (підкреслення), потім **`Ctrl-%`** (або **`Ctrl-^`**, потім **`Ctrl-%`**). Введіть значення нижньої та верхньої межі суми. **`Ctrl–пробіл`** повертає курсор на нормальний рівень вводу, де введіть вираз, який підсумовується.

Наступна команда еквівалентна попередній.

$$\sum_{\mathbf{k}}^{\mathbf{12}} (\boldsymbol{2k-1})$$
144
В форматі `Sum[f,{i,imin,imax}]` задається початкове $i = i_{\min}$ та кінцеве $i_{\max}$ значення лічильника.
$$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{k},\{\boldsymbol{k},\mathbf{4},\mathbf{8}\}]$$
30
або
$$\sum_{\mathbf{k=4}}^{\mathbf{8}} \mathbf{k}$$
30
У форматі `Sum[f,{i,imin,imax,di}]` задається ще крок лічильника `di`.
$$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{k},\{\boldsymbol{k},\mathbf{4},\mathbf{12},\mathbf{3}\}]$$
21
У форматі `Sum[f,{i,imin,imax},{j,jmin,jmax}]` обчислюється дворазова сума вигляду $\sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} f_{ij}$.
$$\mathbf{Sum}[(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})^{\mathbf{2}},\{\boldsymbol{i},\mathbf{3}\},\{\boldsymbol{j},\mathbf{4}\}]$$
266
Результат обчислення суми може бути представлений у символьному вигляді .
$$\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{k^4}$$
$$\frac{1}{30} n(1+n)(1+2n)(-1+3n+3n^2)$$
$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{4k^2-1}}$$
$$\frac{-1+(-1)^n-2n}{4(1+2n)}$$
$$\mathbf{Sum}[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i(i+1)(i+2)}},\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{n}\}]$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+n)(2+n)}$$
Множину, яку пробігає індекс сумування, можна задавати скінченним списком.
$$\mathbf{Remove}[\mathbf{f}];$$
$$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{i}],\{\boldsymbol{i},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}\}]$$
$$f[a]+f[b]+f[c]$$
Границі сумування можуть бути нескінченними (`Infinity`). Такі суми прийнято називати рядами і *Mathematica* для багатьох з них вміє обчислювати їх суми.
$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}}$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{(k+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} - \text{Log}[2]$$

Якщо знайти результат сумування в символьній формі не вдається, *Mathematica* повертає суму необчисленою.

```
Sum[n/(n! + 1), {n, Infinity}]
```

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{n}{1+n!}$$

Однак, для числових рядів можна отримати наближене значення суми, використовуючи функцію N.

```
N[%]
```

```
1.8064971
```

Вживання функції N до результату, отриманого за допомогою функції Sum, еквівалентно використанню функції NSum, яка служить для чисельного сумування рядів. Для нескінченних числових рядів результат одержується тільки у випадку, якщо ряд збігається.

```
NSum[n/(n! + 1), {n, Infinity}]
```

```
1.8064971
```

```
ns = NSum[(-3)^i/i!, {i, 0, ∞}]
```

```
0.049787068
```

Остання сума обчислюється символьно

```
ts = Sum[(-3)^i/i!, {i, 0, ∞}]
```

$$\frac{1}{e^3}$$

Похибка обчислення дорівнює

```
ns - ts
```

```
3.469447×10^-17
```

За замовчуванням функція NSum виконує перевірку збіжності ряду. Якщо ви заздалегідь знаєте, що ряд збігається, то відключивши перевірку збіжності опцією VerifyConvergence→False можна прискорити обчислення.

Якщо ряд не збігається, то функція NSum в якості результату повертає ComplexInfinity.

```
NSum[1, {k, 1, ∞}]
```

```
ComplexInfinity
```

Але часто вона друкує «погрозливі» повідомлення, та наводить якийсь чисельний результат, якому не можна довіряти.

9.2 Степеневі ряди та ряд Тейлора.

Ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члени якого – функції від x, називається функціональним.

Приклад. Дано функціональний ряд

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+\ldots$$

Дослідити збіжність ряду в точках $x=0$ та $x=1$.

Застосуємо ознаку Д'Аламбера.

```
Remove[x, n, u];
u[x_, n_] = 1/(2n - 1) * ((4 - x)/(7x + 2))^n;
W0 = Limit[u[0, n + 1]/u[0, n], n → ∞]
```

2

Оскільки $W_0>1$, то при $x=0$ ряд розбігається.

```
W1 = Limit[u[1, n + 1]/u[1, n], n → ∞]
```

$\frac{1}{3}$

Оскільки $W_1<1$, то при $x=1$ ряд збігається.

■

Функціональний ряд вигляду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$– дійсні числа, називається степеневим.

Головна властивість степеневих рядів полягає в тому, що якщо такий ряд збігається при $x=x_0$, то він збігається (і при тому абсолютно) при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівності $|x-a|<|x_0-a|$ (теорема Абеля). З цього випливає факт існування для будь-якого степеневого ряду інтервалу збіжності $|x-a|<R$. Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду. В окремих випадках радіус збіжності ряду R може дорівнювати нулю або нескінченності. Якщо $R=0$, то степеневий ряд збігається лише при $x=a$; якщо ж $R=\infty$, то ряд збігається на всій числовій осі.

На кінцях інтервалу збіжності (в точках $x=a\pm R$) різні степеневі ряди поводять себе по-різному: збігаються на обох кінцях, тільки на одному з них, або розбігаються на обох кінцях.

Для пошуку радіуса збіжності ряду (1) існують різні способи. Наведемо один з них: якщо серед коефіцієнтів ряду $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ немає рівних нулю, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (2)$$

за умови, що ця границя (скінченна або нескінченна) існує.

В *Mathematica* для обчислення суми функціональних рядів (скінченних або нескінченних) використовується все та ж функція `Sum`. При цьому якщо підсумовуються вирази, які містять більш ніж одну змінну, то всі змінні окрім тієї, за якою виконується сумування, трактуються як константи.

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{7}} \frac{\boldsymbol{x^k}}{\boldsymbol{k!}}$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$$

або що теж саме

$$\mathbf{Sum}[\frac{\boldsymbol{x^k}}{\boldsymbol{k!}}, \{\boldsymbol{k}, \mathbf{1}, \mathbf{7}\}]$$

Так само як і для числових рядів можна задати крок зміни параметра, по якому виконується підсумовування

$$\mathbf{Sum}\left[\frac{\boldsymbol{x^k}}{\boldsymbol{k!}}, \{\boldsymbol{k}, \mathbf{1}, \mathbf{7}, \mathbf{2}\}\right]$$

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

Можна знаходити суми нескінченних рядів (якщо звичайно вони збігаються).

$$\mathbf{Sum}[\frac{\boldsymbol{x^k}}{\boldsymbol{k!}}, \{\boldsymbol{k}, \mathbf{0}, \infty\}]$$

$$e^x$$

При цьому результат залежить від значень параметрів (змінних), які входять у вираз, сума якого шукається. Якщо при деяких значеннях параметрів ряд збігається, то повертається результат, який відповідає таким значенням. Якщо ви хочете побачити умови, за яких цей результат вірний, то слід використати опцію `GenerateConditions→True`.

$$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{x^n}, \{\boldsymbol{n}, \mathbf{0}, \infty\}, \mathbf{GenerateConditions \to True}]$$

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{1}{1-x}, \text{Abs}[x] < 1\right]$$

Якщо опцію `GenerateConditions→True` не використовувати, то відразу отримуємо результат (без припущень, хоча вони використовувались при обчисленні).

$$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{x^n}, \{\boldsymbol{n}, \mathbf{0}, \infty\}]$$

$$\frac{1}{1-x}$$

Приклад. Дослідити збіжність степеневого ряду

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + \ldots \ .$$

Спочатку генеруємо ряд (декілька його перших членів).

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{a}, \mathbf{n}]$;

$\boldsymbol{a}[\mathbf{n\_}] = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$;

$\boldsymbol{u}[\mathbf{x\_}, \mathbf{n\_}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}]\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$;

$\mathbf{Total}[\mathbf{Table}[\mathbf{u}[\mathbf{x}, \mathbf{n}], \{\mathbf{n}, \mathbf{1}, \mathbf{5}\}]]$

$x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$

Потім за формулою (2) обчислюємо його радіус збіжності.

$\boldsymbol{R} = \mathbf{Limit}[\dfrac{\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}+\mathbf{1}]}, \boldsymbol{n} \to \infty]$

1

Отже, ряд збігається для значень x, які задовольняють нерівності $-1 < x < 1$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжку. Замість x треба підставити $x = 1$ або $x = -1$, та розглянути окремо збіжність двох числових рядів. Однак в *Mathematica* ми можемо «попросити» функцію `Sum` знайти суму ряду та, використовуючи опцію `GenerateConditions→True`, показати умови, за яких отримуваний результат вірний.

$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}], \{\boldsymbol{n}, \mathbf{1}, \infty\}, \mathbf{GenerateConditions} \mathbf{->} \mathbf{True}]$

$\mathrm{ConditionalExpression}[-\mathrm{Log}[1 - x], \mathrm{Abs}[x] \leq 1 \;\&\&\; x \neq 1]$

Отже, сума дорівнює $-\ln(1-x)$, і область збіжності ряду визначається нерівністю $-1 \le x < 1$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \ldots \ .$$

Спочатку генеруємо декілька перших членів ряду.

$\mathbf{Remove}[\boldsymbol{a}, \mathbf{n}]$;

$\boldsymbol{a}[\mathbf{n\_}] = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}$;

$\boldsymbol{u}[\mathbf{x\_}, \mathbf{n\_}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}](\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\boldsymbol{n}}$;

$\mathbf{Total}[\mathbf{Table}[\mathbf{u}[\mathbf{x}, \mathbf{n}], \{\mathbf{n}, \mathbf{1}, \mathbf{5}\}]]$

$-2 + \dfrac{1}{4}(-2+x)^2 + \dfrac{1}{9}(-2+x)^3 + \dfrac{1}{16}(-2+x)^4 + \dfrac{1}{25}(-2+x)^5 + x$

За формулою (2) обчислюємо радіус збіжності.

$\boldsymbol{R} = \mathbf{Limit}[\dfrac{\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{a}[\boldsymbol{n}+\mathbf{1}]}, \boldsymbol{n} \to \infty]$

1

Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжку. Для цього використаємо функцію `Sum` з опцією `GenerateConditions->True`.

$\mathbf{Sum}[\boldsymbol{u}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}], \{\boldsymbol{n}, \mathbf{1}, \infty\}, \mathbf{GenerateConditions} \mathbf{->} \mathbf{True}]$

$\mathrm{ConditionalExpression}[\mathrm{PolyLog}[2, -2 + x], \mathrm{Abs}[-2 + x] \leq 1]$

Отже, область збіжності ряду визначається нерівністю $|x-2| \le 1$ або $1 \le x \le 3$.

Що стосується суми, то результат `PolyLog[2,-2+x]` повідомляє про те, що це полілогарифм (спеціальна математична функція).

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!\,(x-5)^3+\ldots+n!\,(x-5)^n+\ldots\ .$$

Генеруємо декілька перших членів ряду і за формулою (2) обчислюємо радіус збіжності.

```
Remove[a, n];
a[n_] = n!;
u[x_, n_] = a[n](x - 5)^n;
Total[Table[u[x, n], {n, 1, 5}]]
```

$-5+2(-5+x)^2+6(-5+x)^3+24(-5+x)^4+120(-5+x)^5+x$

```
R = Limit[a[n]/a[n + 1], n → ∞]
```

0

Радіус збіжності дорівнює 0. Отже ряд збігається лише при $x-5=0$, тобто в єдиній точці $x=5$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ .$$

Генеруємо декілька перших членів ряду та обчислюємо радіус збіжності.

```
Remove[a, n];
a[n_] = 1/n!;
u[x_, n_] = a[n]x^n;
Total[Table[u[x, n], {n, 1, 5}]]
```

$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}$

```
R = Limit[a[n]/a[n + 1], n → ∞]
```

∞

Оскільки $R=\infty$, то ряд збігається при будь-якому значенні x. Знайдемо його суму.

```
Sum[u[x, n], {n, 0, ∞}]
```

e^x

■

Довільну функцію `f(x)` можна розвинути в степеневий ряд (ряд Тейлора), використовуючи функцію `Series`. У форматі `Series[f,{x,x0,n}]` вона генерує степеневий ряд $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ в околі точки x_0 до доданку, який містить $(x-x_0)^n$. Наприклад,

```
Series[f[x], {x, 0, 5}]
```

$f[0]+f'[0]x+\frac{1}{2}f''[0]x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}[0]x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}[0]x^4+\frac{1}{120}f^{(5)}[0]x^5+O[x]^6$

```
g = Series[Exp[x], {x, 0, 5}]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$$

$$\mathbf{Series}[\frac{\mathbf{Sin}[\boldsymbol{x}]}{\boldsymbol{x}},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{8}\}]$$

$$1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+\frac{x^8}{362880}+O[x]^9$$

В кінці полінома, який представляє ряд, функція `Series` виводить символ $O[x^{n+1}]$. Функція `Series` створює ненульовий залишковий член, навіть якщо він тотожньо дорівнює нулю.

$$\mathbf{Series}[\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}},\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{5}\}]$$

$$x^5+O[x]^6$$

Щоб усунути залишковий член потрібно використати функцію `Normal`. Вона залишає тільки степеневий многочлен, відкидаючи символ $O[x^{n+1}]$.

$$\boldsymbol{P}[\mathbf{x\_}]=\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{12}\boldsymbol{x}+\mathbf{17};$$

$$\mathbf{s}=\mathbf{Series}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}],\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{5}\}]$$

$$17-12x+6x^2-3x^3+2x^4+x^5+O[x]^6$$

$$\mathbf{Normal}[\mathbf{s}]$$

$$17-12x+6x^2-3x^3+2x^4+x^5$$

Функцію `Series` можна використовувати для перерозкладання полінома за степенями $x-a$ при будь-якому a.

$$\mathbf{Normal}[\mathbf{Series}[\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}],\{\boldsymbol{x},\mathbf{1},\mathbf{5}\}]]$$

$$11+4(-1+x)+19(-1+x)^2+15(-1+x)^3+7(-1+x)^4+(-1+x)^5$$

Щоб використати результат роботи функції `Series` для обчислення значення ряду або для побудови графіка потрібно також відкинути залишковий член.

$$\mathbf{log1}=\mathbf{Series}[\mathbf{Log}[\mathbf{1}+\boldsymbol{x}],\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{7}\}]$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+O[x]^8$$

$$\mathbf{log2}=\mathbf{Normal}[\mathbf{log1}]$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}$$

З отриманими многочленами можна виконувати стандартні операції без будь-яких обмежень, наприклад, можна розкладати на множники.

$$\mathbf{Factor}[\mathbf{log2}]$$

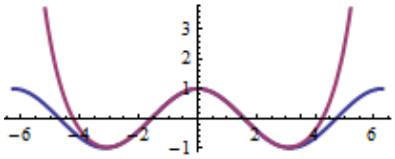
$$\frac{1}{420}x(420-210x+140x^2-105x^3+84x^4-70x^5+60x^6)$$

Після відкидання «залишкового члена» можна побудувати графік. Ось приклад графіка функції `Cos[x]` та її суми Тейлора 8-го порядку.

$$\mathbf{sT}[\mathbf{x\_}]=\mathbf{Normal}[\mathbf{Series}[\mathbf{Cos}[\boldsymbol{x}],\{\boldsymbol{x},\mathbf{0},\mathbf{8}\}]]$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}$$

$$\mathbf{Plot}[\{\mathbf{Cos}[\boldsymbol{x}],\mathbf{sT}[\boldsymbol{x}]\},\{\boldsymbol{x},-\mathbf{2}\boldsymbol{\pi},\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\},\mathbf{PlotStyle}\rightarrow\mathbf{Thickness}[\mathbf{0.01}],\ \mathbf{AspectRatio}\rightarrow\mathbf{Automatic}]$$



Графіки косинусоїди та полінома 8-го степеня, який представляє ділянку її ряду Тейлора, практично співпадають на відрізку $[-\pi, \pi]$.

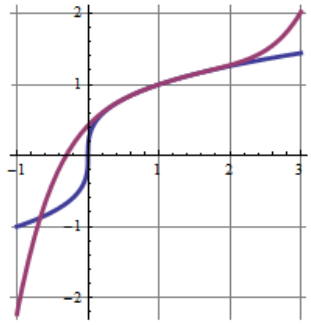
Приклад. Зобразити функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно двочлена $x-1$.

Для обчислення кубічного кореня в *Mathematica* існує функція `CubeRoot[x]`. Ви можете побажати використати запис `x^(1/3)` або $\sqrt[3]{x}$. Однак ці вирази не будуть працювати з від'ємними *x*.

```
Remove[x];
f[x_] = CubeRoot[x];
sT[x_] = Normal[Series[f[x], {x, 1, 5}]]
```

$$1+\frac{1}{3}(-1+x)-\frac{1}{9}(-1+x)^2+\frac{5}{81}(-1+x)^3-\frac{10}{243}(-1+x)^4+\frac{22}{729}(-1+x)^5$$

```
Plot[{f[x], sT[x]}, {x, -1, 3}, PlotStyle → Thickness[0.01],
                    AspectRatio → Automatic,  GridLines → Automatic]
```



З графіка видно, що кубічний корінь та поліном 5-го степеня (відрізок ряду Тейлора), практично співпадають на сегменті $[0.5, 2]$.

Використана тут опція `GridLines→Automatic`, ввімкнула режим відображення координатної сітки з кроком, який обирається автоматично.

9.3 Ряди Фур'є.

Рядом Фур'є функції $f(x)$ на відрізку $[-L, L]$ називається ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

в якому коефіцієнти a_n та b_n обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \ n = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \ n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

Ряд Фур'є співпадає з функцією $f(x)$ на відрізку $[-L, L]$, та поза ним є її періодичним продовженням. Якщо в сумі (1) залишають скінченну кількість доданків N, то її називають частинною сумою ряду Фур'є або многочленом Фур'є порядку N. Часто в якості L обирають число π.

В пакеті *Mathematica* існує декілька функцій, які виконують розвинення в ряди Фур'є. Функція `FourierTrigSeries[expr,t,n]` розкладає вираз `expr`, заданий на відрізку $[-\pi, \pi]$ і який залежить від змінної `t`, у тригонометричний поліном Фур'є порядку `n`.

```
FourierTrigSeries[Cos[t]^2 + Sin[t]^3, t, 3]
```

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{Cos}[2t]+\frac{3\text{Sin}[t]}{4}-\frac{1}{4}\text{Sin}[3t]$$

В ряд Фур'є можна розкладати гладкі функції (функції, які диференційовані у всіх точках), неперервні, але не гладкі (які мають точки зламу), та розривні функції. Точність наближення рядом Фур'є розривних функцій гірше, ніж неперервних. Цей факт можна побачити, якщо будувати графіки початкових функцій та їх частинних сум Фур'є.

Приклад. На відрізку $-\pi \le x \le \pi$ розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, -\pi/2 \le x \le \pi/2\\ 0, \text{ інакше}\end{cases}.$$

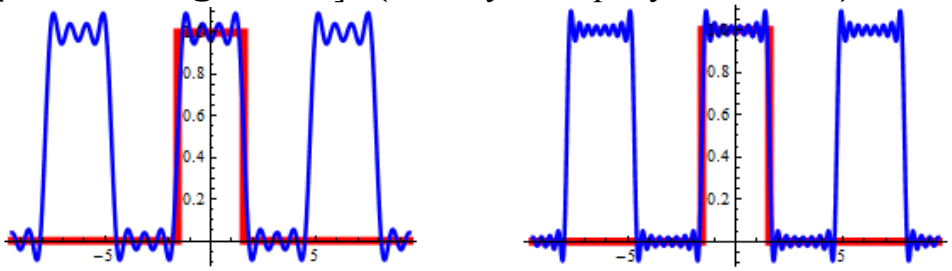
В пакеті *Mathematica* є функція `UnitBox[x]`, яка представляє одиничну сходинку, яка дорівнює 1 на відрізку $-0.5 \le x \le 0.5$, та нулю – поза ним. Використавши її, функцію $f(x)$ можна записати у вигляді $f(x)=UnitBox\,(x/\pi)$. Тоді маємо:

```
n = 8;
ff[t_] = FourierTrigSeries[UnitBox[t/π], t, n]
```

$$\frac{1}{2}+\frac{2\text{Cos}[t]}{\pi}-\frac{2\text{Cos}[3t]}{3\pi}+\frac{2\text{Cos}[5t]}{5\pi}-\frac{2\text{Cos}[7t]}{7\pi}$$

Побудуємо на одному рисунку графік початкової функції $f(x)$ та її частинної суми Фур'є.

```
p1 = Plot[UnitBox[t/π], {t, -3π, 3π}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.02]}];
p2 = Plot[ff[t], {t, -3π, 3π}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}];
Show[p1, p2, PlotRange → All]   (* наступний рисунок зліва *)
```



На відрізку $-\pi \le x \le \pi$ початкова функція $f(x)$ та її многочлен Фур'є схожі, але не дуже близькі. Змініть у попередньому коді кількість доданків в частинній сумі Фур'є, задавши $n=16$, та виконайте код прикладу знову. На попередньому малюнку справа показаний новий графік. Як бачите, збільшення `n` покращує наближення на відрізку $-\pi \le x \le \pi$, але в околі точок розриву воно залишається

поганим. Така поведінка ряду Фур'є характерна для будь-яких розривних функцій (явище Гіббса).

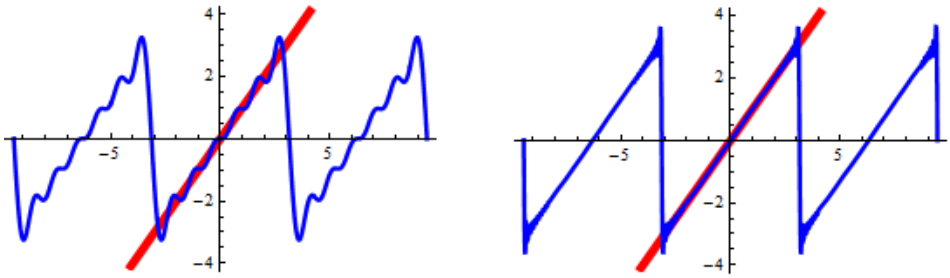
Приклад. На відрізку $-\pi \le x \le \pi$ розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$. Маємо:

```
n = 6;
ff[t_] = FourierTrigSeries[t, t, n];
```

$$2\text{Sin}[t] - \text{Sin}[2t] + \frac{2}{3}\text{Sin}[3t] - \frac{1}{2}\text{Sin}[4t] + \frac{2}{5}\text{Sin}[5t] - \frac{1}{3}\text{Sin}[6t]$$

Побудуємо на одному рисунку графік початкової функції $f(x)$ (це пряма) та її частинної суми Фур'є.

```
p1 = Plot[t, {t, -1.3π, 1.3π}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.02]}];
p2 = Plot[ff[t], {t, -3π, 3π}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}];
Show[p1, p2, PlotRange -> All]   (* наступний рисунок зліва *)
```



На попередньому рисунку зліва показаний графік частинної суми Фур'є при n = 6, а справа – при n = 50. В околі точок розриву погане наближення (явище Гіббса) спостерігається і при великих значеннях параметра n.

■

Неперервні функції, навіть якщо вони мають злами, наближаються краще, ніж розривні.

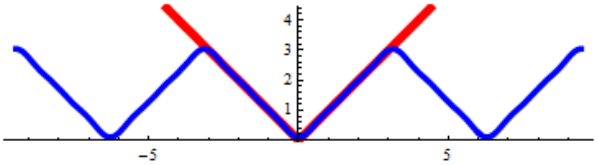
Приклад. На відрізку $-\pi \le x \le \pi$ розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|$. Маємо:

```
n = 6;
ff[t_] = FourierTrigSeries[Abs[t], t, n];
```

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4\text{Cos}[t]}{\pi} - \frac{4\text{Cos}[3t]}{9\pi} - \frac{4\text{Cos}[5t]}{25\pi}$$

На одному рисунку зобразимо графік функції $|x|$ та її частинну суму Фур'є.

```
p1 = Plot[Abs[t], {t, -1.4π, 1.4π}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.015]}];
p2 = Plot[ff[t], {t, -3π, 3π}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}];
Show[p1, p2, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic
```



Як бачите, для неперервних функцій (неперервних після періодичного продовження), навіть тих які мають злами, явище Гіббса не спостерігається.

■

При використанні опції `FourierParameters->{1,π/L}` створюється ряд (1) з коефіцієнтами (2), тобто функція розкладається в ряд Фур'є на відрізку $[-L, L]$. Відзначимо, що у версії пакета *Mathematica* 9.0 є дефект, який полягає в тому, що при вводі опції `FourierParameters` вона (опція) виділяється червоним кольором, ніби її у функції `FourierTrigSeries` немає. Але вона є! Використовуйте її спокійно.

Приклад. Виконати розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)=|x|$ на відрізках $-1\le x\le 1$ та $-2\le x\le 2$. Побудуйте графіки вихідної функції та її частинних сум Фур'є.

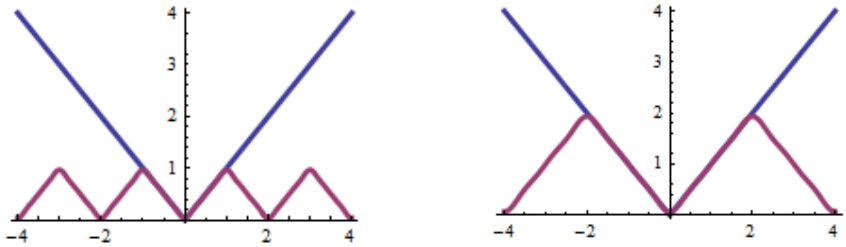
Для відрізка $-1\le x\le 1$ маємо $L=1$. Тоді

```
n = 6; L = 1;
ff1[t_] = FourierTrigSeries[Abs[t], t, n, FourierParameters -> {1, π/L}]
```

$$\frac{1}{2}-\frac{4\text{Cos}[\pi t]}{\pi^2}-\frac{4\text{Cos}[3\pi t]}{9\pi^2}-\frac{4\text{Cos}[5\pi t]}{25\pi^2}$$

```
Plot[{Abs[t], ff1[t]}, {t, -4, 4}, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```

(* наступний рисунок зліва *)



Для відрізка $-2\le x\le 2$ маємо $L=2$. Змініть у попередньому коді команду *L*=1 на інструкцію *L*=2 та виконайте приклад. Ви отримаєте наступну частинну суму Фур'є

$$1-\frac{8\text{Cos}[\frac{\pi t}{2}]}{\pi^2}-\frac{8\text{Cos}[\frac{3\pi t}{2}]}{9\pi^2}-\frac{8\text{Cos}[\frac{5\pi t}{2}]}{25\pi^2}$$

і графік, який показаний на попередньому рисунку справа.

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є на проміжку [–1,1] функцію $f(x)=x^2$.

Спочатку побудуємо ряд Фур'є (многочлен Фур'є) функції $f(x)$.

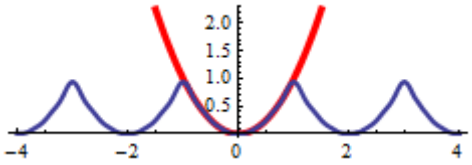
```
L = 1;
f[x_] = x^2;
ff[t_] = FourierTrigSeries[f[t], t, 6, FourierParameters -> {1, π/L}]
```

$$\frac{1}{3}-\frac{4\text{Cos}[\pi t]}{\pi^2}+\frac{\text{Cos}[2\pi t]}{\pi^2}-\frac{4\text{Cos}[3\pi t]}{9\pi^2}+\frac{\text{Cos}[4\pi t]}{4\pi^2}-\frac{4\text{Cos}[5\pi t]}{25\pi^2}+\frac{\text{Cos}[6\pi t]}{9\pi^2}$$

Оскільки функція $f(x)$ - парна, то її ряд Фур'є містить лише косинуси.

Тепер побудуємо графіки вихідної функції та її частинної суми Фур'є.

```
p1 = Plot[f[t], {t, -1.5, 1.5}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.015]}];
p2 = Plot[ff[t], {t, -4, 4}, PlotStyle -> Thickness[0.01]];
Show[p1, p2, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]
```



Як бачимо, на відрізку $[-1,1]$ функція та її многочлен Фур'є майже співпадають. Збіг буде тим точніше, чим більше доданків ряду Фур'є буде використовуватися.

■

Розв'язавши попередні приклади, ви могли звернути увагу на те, що в розкладі парних функцій присутні лише косинуси, а непарних – тільки синуси. І це природно. Сума парних функцій (косинусів) є парною функцією, а сума непарних (синусів) – непарною функцією.

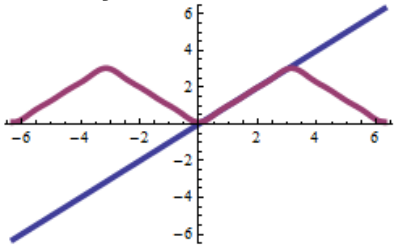
Будь-яку функцію, задану на відрізку $[0,L]$ можна продовжити парно на відрізок $[-L,0]$, а потім розкласти в ряд Фур'є, який буде містити тільки косинуси. Але можна не виконувати парне продовження функції $f(t)$, а відразу створити ряд Фур'є за косинусами, використовуючи функцію `FourierCosSeries`.

Приклад. Виконати розвинення в косинус ряд Фур'є функції $f(x)=x$ на відрізку $0\le x\le\pi$. Побудувати графіки вихідної функції та її частинних сум Фур'є.

```
fc[t_] = FourierCosSeries[t, t, 6]
```

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4\text{Cos}[t]}{\pi}-\frac{4\text{Cos}[3t]}{9\pi}-\frac{4\text{Cos}[5t]}{25\pi}$$

```
Plot[{t, fc[t]}, {t, -2π, 2π}, PlotStyle -> Thickness[0.01]]
```



На малюнку побудований графік вихідної функції $f(x)=x$ (пряма лінія) та її розвинення в ряд за косинусами з відрізка $[0,\pi]$ (парна пилкоподібна функція). Порівняйте з результатом одного з попередніх прикладів, де функція $|x|$ розкладалась у «загальний» ряд Фур'є на відрізку $[-\pi,\pi]$.

■

У розвиненні непарних функцій присутні тільки синуси. Будь-яку функцію, яка задана на відрізку $[0,L]$, можна непарно продовжити на відрізок $[-L,0]$, а потім розкласти в ряд Фур'є, який буде містити тільки синуси. Але можна відразу згенерувати ряд Фур'є за синусами, використовуючи функцію `FourierSinSeries`.

Приклад. Виконати розвинення в ряд Фур'є за синусами функції $f(x)=x^2$, яка задана на відрізку $0\le x\le\pi$. Побудуйте графіки вихідної функції та її частинних сум Фур'є. Маємо

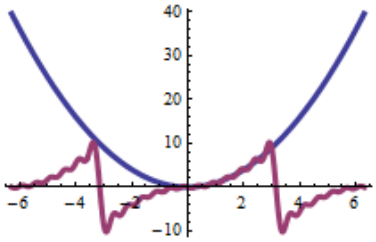
$\mathbf{fs[t\_] = FourierSinSeries[t^2, t, 12]}$

$\left(-\frac{8}{\pi}+2\pi\right)\text{Sin}[t]-\pi\text{Sin}[2t]+\left(-\frac{8}{27\pi}+\frac{2\pi}{3}\right)\text{Sin}[3t]-\frac{1}{2}\pi\text{Sin}[4t]+\cdots$

Для стислості, в многочлені Фур'є ми не надрукували доданки, починаючи з п'ятого члена.

Тепер побудуємо графік.

$\mathbf{Plot[\{t^2, fs[t]\}, \{t, -2\pi, 2\pi\}, PlotStyle -> Thickness[0.015]]}$



На малюнку побудований графік вихідної функції $f(x)=x^2$ (парабола) та її розвинення за синусами («пилкоподібна» функція).

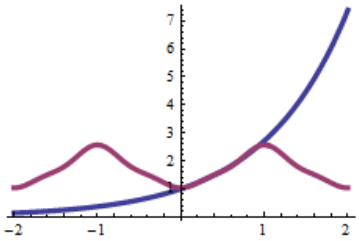
■

Опції трьох функцій `FourierTrigSeries`, `FourierSinSeries`, та `FourierCosSeries` використовуються однаково. Наприклад, для парного періодичного продовження функції e^x з відрізка $[0,1]$ на всю дійсну вісь треба використати функцію `FourierCosSeries` з опцією `FourierParameters→{1,π}`.

$\mathbf{fc[t\_] = FourierCosSeries[Exp[t], t, 3, FourierParameters -> \{1, \pi\}]}$

$-1+e-\frac{2(1+e)\text{Cos}[\pi t]}{1+\pi^2}+\frac{2(-1+e)\text{Cos}[2\pi t]}{1+4\pi^2}-\frac{2(1+e)\text{Cos}[3\pi t]}{1+9\pi^2}$

$\mathbf{Plot[\{Exp[t], fc[t]\}, \{t, -2, 2\}, PlotStyle -> Thickness[0.015]]}$



Приклад. Розвинути в ряди Фур'є за синусами та за косинусами функцію $f(x)=x-x^2/2$, задану на відрізку $[0,2]$.

Спочатку побудуємо частинну суму ряду Фур'є функції $f(x)$ за косинусами. В нашому випадку $L=2$. Тоді маємо

$\mathbf{L = 2;}$

$\boldsymbol{f[x\_] = x-\frac{x^2}{2};}$

$\mathbf{fc[t\_]] = FourierCosSeries[f[t], t, 6, FourierParameters -> \{1, \pi/L\}]}$

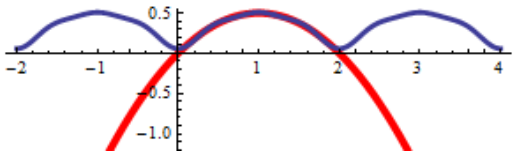
$\frac{1}{3}-\frac{2\text{Cos}[\pi t]}{\pi^2}-\frac{\text{Cos}[2\pi t]}{2\pi^2}-\frac{2\text{Cos}[3\pi t]}{9\pi^2}$

Будуємо графіки вихідної функції та її частинної суми Фур'є за косинусами.

$\mathbf{p1 = Plot[f[t], \{t, -1, 3\}, PlotStyle \to \{Red, Thickness[0.015]\}];}$

$\mathbf{p2 = Plot[fc[t], \{t, -2, 4\}, PlotStyle -> Thickness[0.01]];}$

Show[p1, p2, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]



На відрізку $[0,2]$ функція та її частинна сума Фур'є за косинусами майже співпадають. Збіг буде тим точнішим, чим більше доданків ряду використовується. Очевидно, що косинус ряд Фур'є є функцією парною.

Тепер побудуємо ряд Фур'є функції за синусами.

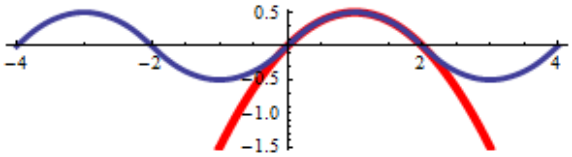
fs[t_] = FourierSinSeries[$f[t], t$, 6, FourierParameters−> {1, π/L}]

$$\frac{16\text{Sin}[\frac{\pi t}{2}]}{\pi^3}+\frac{16\text{Sin}[\frac{3\pi t}{2}]}{27\pi^3}+\frac{16\text{Sin}[\frac{5\pi t}{2}]}{125\pi^3}$$

Будуємо графік вихідної функції та її частинної суми Фур'є за синусами.

p3 = Plot[fs[t], {t, −4, 4}, PlotStyle−> Thickness[0.01]];

Show[p1, p3, PlotRange → All, AspectRatio → Automatic]



На відрізку $[0,2]$ функція та її частинна сума Фур'є також майже співпадають.

■

Будь-яку функцію розглядуваної нами групи можна використовувати для побудови ряду Фур'є функції декількох змінних. Наприклад, у форматі `FourierTrigSeries[f[x,y],{x,y},{n1,n2}]` створюється двовимірна частинна сума Фур'є за змінними x та y до порядків `n1` за першою змінною та `n2` – другою. Наприклад:

FourierTrigSeries[$x+y$, {x, y}, {2, 2}]

$2\text{Sin}[x]-\text{Sin}[2x]+2\text{Sin}[y]-\text{Sin}[2y]$

Аналогічно використовуються функції `FourierSinSeries` та `FourierCosSeries`.

FourierSinSeries[$x*y$, {x, y}, {2, 2}]

$4\text{Sin}[x]\text{Sin}[y]-2\text{Sin}[2x]\text{Sin}[y]-2\text{Sin}[x]\text{Sin}[2y]+\text{Sin}[2x]\text{Sin}[2y]$

FourierCosSeries[x^2+y^2, {x, y}, {2, 2}]

$$\frac{8\pi^2}{3}-8\text{Cos}[x]+2\text{Cos}[2x]-8\text{Cos}[y]+2\text{Cos}[2y]$$

Завершення.

Наприкінці зазначимо, що система символьних обчислень *Mathematica* дуже широка та багатогранна. Вона містить тисячі вбудованих функцій. У даному посібнику використовувались лише найпотрібніші з них, призначені для розв'язання типових задач вищої математики. Дублюючі інструкції та повні списки параметрів функцій, як правило, не наводилися. З ними, як і з тими

засобами *Mathematica*, які не ввійшли в даний посібник, бажаючі можуть ознайомитися за довідниковою системою, або за більш детальними посібниками, які присвячені *Mathematica*.

Література

1. Половко А.М. Mathematica для студента. – СПб.: БХВ – Петербург, 2007. – 368 с.: ил.
2. Л.Л.Голубева, А.Э.Малевич, Н.Л.Щеглова. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica. Курс лекций. Минск, БГУ, 2005.
3. Воробьев Е.М. Введение в систему "Математика": Учеб. пособие. М: Финансы и статистика, 1998. - 262 с.
4. Гринберг, А.С. Математика на персональном компьютере / А.С. Гринберг, В.А. Иванюкович, Е.А. Скуратович. – Минск: Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2001. – 124 с.
5. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. Мн.: БГУ, 1999. – 265 с.
6. Wolfram S. The Mathematica book. 4th ed. – AddisonWesley, 1999.
7. Abell, M. L. and J. P. Braselton. Differential Equations with Mathematica, 3rd ed. Elsevier Academic Press, 2004.