

Пусть X топологическое пространство с топологией τ .

1 Первичные понятия топологии.

1. Доказать, что для любого подмножества $A \subset X$ имеет место включение $A' \supset A''$.
2. Доказать, что $\bar{A} = A \cup A'$.
3. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
4. Доказать, что $\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$. Показать, что равенство не имеет места в общем случае.
5. Показать, что $(A \cup B)' = A' \cup B'$. Верно ли, что $\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right)' = \bigcup_{\alpha} A'_{\alpha}$
6. Доказать, что если F_{α} замкнуты, то подмножество $W = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ замкнуто.
7. Доказать, что если F_i ($i = 1 \dots n$) замкнуты, то подмножество $W = \bigcup_i^n F_{\alpha}$ замкнуто.
8. Доказать, что $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$, где G_{α} открыты и $G_{\alpha} \subset A$. Иными словами, внутренность множества A есть наибольшее открытое множество, лежащее в A .
9. Доказать, что $\bar{A} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$, где F_{α} замкнуты и $F_{\alpha} \supset A$. Иными словами, замыкание множества A есть наименьшее замкнутое множество, содержащее в A .
10. Доказать, что если предельная точка не принадлежит множеству, то она является его граничной точкой.
11. Доказать, что $\partial\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n \partial A_i$. Показать, что это не верно для бесконечного числа слагаемых.
12. Доказать, что для любого $A \subset X$ множество ∂A замкнуто.

13. Верно ли, что если A замкнутое подмножество, то A совпадает с замыканием внутренней?
14. Открытое множество U пересекается с множеством A тогда и только тогда, когда $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$.
15. Докажите, что $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
16. Докажите, что (X, τ) удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 тогда и только тогда, когда всякое одноточечное подмножество в X замкнуто.
17. Приведите пример T_1 пространства такого, что для любых непустых открытых множеств U, V выполнено $U \cap V \neq \emptyset$.
18. Докажите, что замыкание нигде не плотного подмножества нигде не плотно.
19. Если F замкнуто и нигде не плотно, то $X \setminus F$ всюду плотно.
20. Если открытое множество нигде не плотно, то оно пусто.
21. Пусть на множестве X задано семейство топологий τ_α . Образует ли топологию семейство $\mathcal{T} = \cup \tau_\alpha$?; $\mathcal{T} = \cap \tau_\alpha$?

2 Непрерывные отображения и гомеоморфизмы.

1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset X$ справедливо включение $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Пусть X некоторое множество, (Y, σ) – топологическое пространство. Пусть задано отображение $f : X \rightarrow Y$. Покажите, что прообраз топологии $f^{-1}(\sigma)$ является слабой из топологий на X , для которых отображение f непрерывно.
3. Пусть (X, τ) топологическое пространство, Y – некоторое множество. Пусть задано отображение $f : X \rightarrow Y$. Покажите, что финальная топология τ_f является сильнейшей из топологий на Y , для которых отображение f непрерывно.
4. Пусть $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ отображение, ставящее в соответствие точке $\varphi \in [0, 2\pi)$ концевую точку дуги на окружности S^1 , длиной φ .

Покажите, что f непрерывно, взаимно однозначно, но не является гомеоморфизмом.

5. Если $f : X \rightarrow Y$ взаимно-однозначно и для любого подмножества $A \subset X$ справедливо равенство $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, то f гомеоморфизм.
6. Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ замкнуто, когда для любого подмножества $A \subset X$ справедливо равенство $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.
7. Если $f : X \rightarrow Y$ взаимно-однозначно открыто (замкнуто), то f гомеоморфизм.
8. Покажите, что аксиомы счетности топологически инвариантны.
9. Взаимно-однозначное отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:
 - τ - слабейшая из топологий в X , при которых отображение f непрерывно;
 - σ - сильнейшая из топологий в Y , при которых отображение f непрерывно;
10. Пусть X бесконечное множество с топологией Зарисского. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : X \rightarrow R^1$ есть постоянное отображение.
11. **Функция Дирихле.** Пусть X топологическое пространство, в котором есть два всюду плотных и взаимно дополнительных подмножества A и B , т.е. $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, $\bar{A} = \bar{B} = X$. Тогда отображение $f : X \rightarrow R^1$ заданное по формуле

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in A \\ 1 & \text{при } x \in B \end{cases}$$

разрывно в каждой точке $x_0 \in X$.

12. Пусть $f : E \rightarrow X \times Y$ отображение, $p_x : X \times Y \rightarrow X$ и $p_y : X \times Y \rightarrow Y$ проекции. Тогда $f_x = p_x \circ f$ и $f_y = p_y \circ f$ называются компонентами отображения f . Доказать, что f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его компоненты.

13. Пусть $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ отображения. Тогда отображение $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, определяемое по формуле

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

обозначается $f_1 \times f_2$ и называется *прямым произведением отображений*, а сами отображения – сомножителями.

Докажите, что $f_1 \times f_2$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны сомножители.

14. Пусть $f_1 : Z \rightarrow X$, $f_2 : Z \rightarrow Y$ два отображения. Отображение $F : Z \rightarrow X \times Y$, задаваемое по формуле $F(z) = (f_1(z), f_2(z))$ называется *диагональным произведением* отображений f_1 и f_2 или *диагональным произведением*, порожденным отображениями f_1 и f_2

Докажите, что F непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны f_1 и f_2 .

15. Пусть $f : X \rightarrow Y$ отображение. Тогда подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$ вида

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

называется *графиком отображения* f .

Докажите, что $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $h : X \rightarrow \Gamma_f$, вида $h(x) = (x, f(x))$.

16. Если Y хаусдорфово и $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то Γ_f замкнуто в $X \times Y$.
17. Пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ замкнута.
18. Пусть $f, g : X \rightarrow Y$ непрерывные отображения и Y хаусдорфово. Тогда подмножество $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X .
19. Если непрерывные отображения в хаусдорфово пространство совпадают на всюду плотном подмножестве, то они совпадают всюду.
20. Докажите, что каждый сомножитель прямого произведения $Z = X \times Y$ гомеоморфно вложен в Z .
21. Докажите, что графики всех непрерывных отображений одного и того же пространства гомеоморфны между собой.

22. Докажите, что C^n гомеоморфно R^{2n} .
23. Пусть X замкнутый квадрат на обычной плоскости, Y – одна из его сторон, f – проектирование $X \rightarrow Y$. Покажите, что f непрерывно, открыто и замкнуто.
24. Пусть X_0 открытый квадрат на обычной плоскости, Y_0 – одна из его сторон, f – проектирование $X_0 \rightarrow Y_0$. Покажите, что f непрерывно, открыто, но не замкнуто.
25. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывно и $A \subset X$. Тогда сужение $f|_A : A \rightarrow Y$ непрерывно.
26. Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется *ретрактом* X , если существует непрерывное отображение $r : X \rightarrow A$ такое, что сужение $r|_A$ является тождественным отображением. Для того, чтобы подмножество $A \subset X$ было ретрактом для X , необходимо и достаточно, чтобы каждое непрерывное отображение $g : A \rightarrow Y$ в произвольное пространство Y было непрерывно продолжаемо на все X .
27. Если A ретракт X и X хаусдорфово, то A замкнуто.
28. Докажите, что всякая метрика $\rho : X \times X \rightarrow R$ есть непрерывное отображение.
29. Докажите, что любое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству конечного диаметра.