

Варіант 1

1. Чи буде множина $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ замкненою в стандартній топології $\mathbb{R}$?
2. Довести, що напівінтервали $(a, b]$, де $a, b \in \mathbb{R}$, утворюють базу деякої топології на $\mathbb{R}$, що є сепарабельною.
3. Довести, що $\partial \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^n \partial A_i$. Показати, що це не виконується для нескінченного числа доданків.
4. Довести, що топологічний простір X є T_0 -простором тоді і тільки тоді, коли топологія, яку індукує X на будь-якій двухточковій підмножині, не є антидискретною.

Варіант 2

1. Довести, що множина відкрита тоді і тільки тоді, коли містить окіл будь-якої своєї точки.
2. Довести, що в $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою відкрита куля є замкненою множиною тоді і тільки тоді, коли її радіус ірраціональний.
3. Довести, що $\overline{A \setminus B} \subset \overline{A} \setminus B$.
4. Довести, що T_1 -простір X є регулярним тоді і тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ і будь-якого замкнутого $A \subset X$, що не містить x , існує відкрите $U \ni x$ таке, що $\overline{U} \cap A = \emptyset$.

Варіант 3

1. Показати, що серед злічених підмножин $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією є як замкнені, так і незамкнені.
2. Довести, що підмножина A метричного простору X є замкненою тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\} \subset A$, якщо $\{x_n\}$ збігається до $x \in X$, то $x \in A$.
3. Довести, що об'єднання скінченного набору ніде не щільних множин ніде не щільне.
4. Довести, що будь-який метричний простір є регулярним.

Варіант 4

1. Чи буде $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a > 0\}$ топологією на $\mathbb{R}$?
2. Нехай ρ – метрика на множині X . Довести, що $\rho'(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho(x, y) + 1}$ також задає метрику на X .
3. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \text{Int } \overline{A}$. Довести, що внутрішність замкнутої множини канонічно відкрита.
4. Довести, що топологічний простір є T_1 -простором тоді і тільки тоді, коли скінченні підмножини замкнені.

Варіант 5

1. Довести, що якщо Y – замкнена підмножина топологічного простору X , то замкнені підмножини підпростору Y замкнені і в X .
2. Довести, що горизонтальні відрізки $\{(x, y) | x \in (a, b), y = c\}$, де $a < b, c$ – будь-які дійсні, утворюють базу деякої топології на $\mathbb{R}^2$.
3. Довести, що границя відкритої множини ніде не щільна.
4. Довести, що в T_1 -просторі будь-яка множина є перетином деякого сімейства відкритих множин.

Варіант 6

1. Нехай $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство топологій на множині X . Чи вірно, що $\bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ – топологія на X ?
2. Нехай $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ – бази деяких топологій τ_1, τ_2 відповідно на множині X . Довести, що τ_1 слабша за τ_2 тоді й тільки тоді, коли будь-яка множина з $\mathcal{B}_1$ є об'єднанням деяких множин з $\mathcal{B}_2$.
3. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \text{Int } \overline{A}$. Показати, що перетин двох канонічно відкритих множин канонічно відкритий, а об'єднання двох канонічно відкритих множин може не бути канонічно відкритим.
4. Довести, що будь-який замкнений підпростір нормального простору нормальний.

Варіант 7

1. Чи буде $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) | a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ топологією на $\mathbb{R}$?
2. Нехай ρ – метрика на множині X . Довести, що $\rho'(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$ також задає метрику на X .
3. Нехай Y – підпростір в топологічному просторі X . Для підмножини $A \subset Y$ позначимо через $\overline{A}_X$ і $\overline{A}_Y$ його замикання в топологіях X і Y відповідно. Показати, що $\overline{A}_Y = \overline{A}_X \cap Y$.
4. Довести, що T_1 -простір X є нормальним тоді і тільки тоді, коли для будь-яких замкнених $A, B \subset X$ таких, що $A \cap B = \emptyset$, існує відкрите $U \supset A$ таке, що $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Варіант 8

1. Довести, що підмножина U топологічного простору X відкрита тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $V \ni x$ така, що $U \cap V$ відкрита у V (як у підпросторі X).
2. Довести, що прямокутники $\{(x, y) | x \in (a, b), y \in (c, d)\}$, де $a < b, c < d$ – будь-які дійсні, утворюють базу деякої топології на $\mathbb{R}^2$.
3. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \text{Int } \overline{A}$, і канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\text{Int } A}$. Показати, що множина канонічно замкнена тоді і тільки тоді, коли її доповнення канонічно відкрите.
4. Довести, що T_1 -простір X є регулярним тоді і тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ і будь-якого відкритого $U \ni x$ існує відкрите $V \ni x$ таке, що $\overline{V} \subset U$.

Варіант 9

1. Нехай (X, τ) – топологічний простір і $Y = X \cup \{x\}$ (вважаємо, що $x \notin X$). Чи буде $\{U \cup \{x\} \mid U \in \tau\}$ топологією на Y ?
2. Нехай ρ_1, ρ_2 – метрики на множині X . Довести, що $\rho_1 + \rho_2$ – також метрика на X .
3. Нехай A відкрита і $A \cap B = \emptyset$. Довести, що $\overline{A} \cap \text{Int} \overline{B} = \emptyset$.
4. Довести, що будь-який підпростір регулярного простору регулярний.

Варіант 10

1. Нехай $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство топологій на множині X . Чи вірно, що $\bigcup_{\alpha \in A} \tau_\alpha$ – топологія на X ?
2. Відстанню від точки x до множини A у метричному просторі (X, ρ) називається $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$. Довести, що для будь-яких точок x, y і будь-якої множини A $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$.
3. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = \text{Int} \overline{A}$. Довести, що для канонічно відкритих A і B включення $A \subset B$ еквівалентне $\overline{A} \subset \overline{B}$.
4. Довести, що топологічний простір X є T_0 -простором тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x \neq y$ з X $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Варіант 11

1. Чи буде $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) \mid a \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ топологією на $\mathbb{R}$?
2. Нехай ρ_1, ρ_2 – метрики на множині X . Довести, що $\max(\rho_1, \rho_2)$ – також метрика на X .
3. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A = \overline{\text{Int} A}$. Показати, що об'єднання двох канонічно замкнених множин канонічно замкнене, а перетин двох канонічно замкнених множин може не бути канонічно замкненим.
4. Довести, що топологічний простір X є T_0 -простором тоді і тільки тоді, коли X не містить антидискретного підпростору, що складається більш ніж з однієї точки.

Варіант 12

1. Нехай X – нескінченна множина. Чи буде топологією на X сімейство, що складається з порожньої множини і доповнень до скінченних множин?
2. Довести, що напівінтервали $[a, b)$, де $a, b \in \mathbb{R}$, утворюють базу деякої топології на $\mathbb{R}$, що сильніша за стандартну.
3. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X . Довести, що

$$\bigcup_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha} \subset \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \right)}.$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінене рівністю.

4. Навести приклад T_1 -простору, який не є хаусдорфовим.

Варіант 13

1. Нехай $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Чи буде $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$ топологією на X ?
2. Навести приклад множини X і таких метрик ρ_1, ρ_2 на X , що $\min(\rho_1, \rho_2)$ не є метрикою на X .
3. Довести, що якщо $x \in A'$ і $x \notin A$, то $x \in \partial A$.
4. Нехай X – нескінченна множина. Кофінітною топологією на X називається топологія, що складається з порожньої множини і доповнень до скінченних множин. Показати, що кофінітна топологія нехаусдорфова і слабша за будь-яку хаусдорфову топологію на X .

Варіант 14

1. Нехай $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Чи буде $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ топологією на X ?
2. Навести приклад сепарабельного топологічного простору X і його підпростору Y , що не є сепарабельним.
3. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X . Довести, що

$$\bigcap_{\alpha \in A} \text{Int}(B_\alpha) \supset \text{Int} \left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \right).$$

Навести приклад, який демонструє, що включення в цьому виразі не може бути замінено рівністю.

4. Навести приклад T_0 -простору X , в якому всі одноточкові підмножини незамкнені.

Варіант 15

1. Чи буде сімейство τ , що складається з $\emptyset$, множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ і усіх скінченних підмножин $\mathbb{N}$, топологією на $\mathbb{N}$?
2. Навести приклад множини X і таких метрик ρ_1, ρ_2 на X , що добуток $\rho_1 \rho_2$ не є метрикою на X .
3. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X . Довести, що

$$\text{Int} \left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \right) = \text{Int} \left(\bigcap_{\alpha \in A} \text{Int}(B_\alpha) \right).$$

4. Навести приклад T_1 -простору такого, що для будь-яких непустих відкритих множин U, V виконано $U \cap V \neq \emptyset$.

Варіант 16

1. Нехай $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Чи буде $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ топологією на X ?
2. Знайти найменшу за включенням базу $\mathcal{B}$ дискретної топології (тобто таку, що для будь-якої іншої бази $\mathcal{C}$ цієї топології $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$).
3. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X . Довести, що

$$\overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \right)} = \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha} \right)}.$$

4. Довести, що топологічний простір є T_1 -простором тоді і тільки тоді, коли одноточкові підмножини замкнені.