

Варіант 1

1. Відображення топологічних просторів називається замкненим, якщо переводить замкнені множини в замкнені. Довести, що відображення $f: X \rightarrow Y$ замкнене тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ виконується рівність $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geq 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай X і Y – топологічні простори. Розглянемо $X \times Y$ з топологією прямого добутку. Нехай $A \subset X$, $B \subset Y$. Довести, що $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

4. Встановити, чи зв'язні множини A і B точок площини (зі стандартною топологією), обидві координати яких раціональні (відповідно, ірраціональні).

Варіант 2

1. Відображення топологічних просторів називається відкритим (відповідно, замкненим), якщо переводить відкриті множини у відкриті (відповідно, замкнені в замкнені). Нехай X_0 – відкритий квадрат на площині зі стандартною топологією, Y_0 – одна з його сторін, f – ортогональне проектування $X_0 \rightarrow Y_0$. Показати, що f неперервне, відкрите, але не замкнене.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x \geq y \geq 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Довести, що метрика $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервним відображенням (на X розглядається метрична топологія, а на $X \times X$ – топологія прямого добутку).

4. Топологічний простір називається локально компактним, якщо кожна його точка має окіл з компактним замиканням. Довести, що замкнені підмножини локально компактного простору локально компактні.

Варіант 3

1. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f: X \rightarrow A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A в цьому випадку називається ретрактом X . Довести, що ретракт хаусдорфового простору замкнений.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geq 0\}$ і $Y = \{(x, y) | y \in [0, 1]\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ називається графіком відображення f . Довести, що графіки всіх неперервних відображень одного і того ж простору гомеоморфні між собою.

4. Довести, що будь-яка неперервна бієкція компактного простору на хаусдорфовий є гомеоморфізмом.

Варіант 4

1. Відображення топологічних просторів називається відкритим (відповідно, замкненим), якщо переводить відкриті множини у відкриті (відповідно, замкнені в замкнені). Нехай X_0 – замкнений квадрат на площині зі стандартною топологією, Y_0 – одна з його сторін, f – ортогональне проектування $X_0 \rightarrow Y_0$. Показати, що f неперервне, відкрите і замкнене.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | y \in [0, 1]\}$ і $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай X і Y – топологічні простори. Розглянемо $X \times Y$ з топологією прямого добутку. Нехай $A \subset X$, $B \subset Y$. Довести, що $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \cup (A \times \partial B)$.

4. Довести, що топологічний простір X зв'язний тоді і тільки тоді, коли з неперервності $f: X \rightarrow Y$, де Y – простір з дискретною топологією, випливає, що f – постійне відображення.

Варіант 5

1. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f: X \rightarrow A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A тоді називається ретрактом X . Довести, що A є ретрактом X тоді і тільки тоді, коли для будь-якого топологічного простору Y будь-яке неперервне відображення $f: A \rightarrow Y$ може бути продовжене на весь простір X .

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ і $Y = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай $f_1: X \rightarrow Y$, $f_2: X \rightarrow Z$ – відображення. Тоді відображення $f: X \rightarrow Y \times Z$, визначене формулою $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, називається діагональним добутком відображень, а самі відображення – множниками. Довести, що діагональний добуток неперервний тоді і тільки тоді, коли неперервні його множники.

4. Топологічний простір називається локально компактним, якщо кожна його точка має окіл з компактним замиканням. Довести, що відкриті підмножини хаусдорфового локально компактного простору локально компактні.

Варіант 6

1. Довести, що відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ виконується рівність $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ і $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Топологічний простір називається локально компактним, якщо кожна його точка має окіл з компактним замиканням. Довести, що добуток локально компактних просторів локально компактний.

4. Довести, що топологічний простір X зв'язний тоді і тільки тоді, коли з $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ випливає, що $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ або $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Варіант 7

1. Нехай $f, g: X \rightarrow Y$ – неперервні відображення, Y хаусдорфовий і $A \subset X$ всюди щільна. Довести, що якщо $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ і $Y = \{(x, y) | a < x^2 + y^2 < b\}$ ($0 < a < b$) площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ називається графіком відображення f . Довести, що якщо Y хаусдорфовий і $f: X \rightarrow Y$ неперервне, то Γ_f замкнена в $X \times Y$.

4. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору зв'язні і $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, то $A \cup B$ зв'язна.

Варіант 8

1. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Відображення $f: X \rightarrow X$ називається стискувачем, якщо існує таке $\alpha \in (0, 1)$, що для будь-яких $x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$. Довести, що будь-яке стискуjące відображення неперервне.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ і $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x, y \in [0, 1]\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Довести, що добуток регулярних просторів регулярний.

4. Топологічний простір називається локально компактним, якщо кожна його точка має окіл з компактним замиканням. Навести приклад підмножини локально компактного простору, що не є локально компактною.

Варіант 9

1. Нехай $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервні відображення і $0 \notin g(X)$. Довести, що $x \mapsto f(x)/g(x)$ також неперервне.
2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geq 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.
3. Нехай $f: Z \rightarrow X \times Y$ – відображення, $p_x: X \times Y \rightarrow X$ и $p_y: X \times Y \rightarrow Y$ – канонічні проекції добутку на співмножники. Тоді відображення $f_x = p_x \circ f$ и $f_y = p_y \circ f$ називаються компонентами відображення f . Довести, що відображення неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервні його компоненти.
4. Довести, що якщо у метричному просторі A замкнене і B компактне, то $\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b) | a \in A, b \in B\} > 0$.

Варіант 10

1. Нехай $f, g: X \rightarrow Y$ – неперервні відображення і Y хаусдорфовий. Довести, що підмножина $A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ замкнена в X .
2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x \geq 0\}$ і $Y = \{(x, y) | 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.
3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ називається графіком відображення f . Довести, що якщо Y компактний і Γ_f замкнена в $X \times Y$, то f неперервне.
4. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X одночасно відкриті або замкнені, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ зв'язні, то A і B зв'язні.

Варіант 11

1. Довести, що відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ виконується рівність $f^{-1}(Int A) \subset Int f^{-1}(A)$.
2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | y \in [0, 1)\}$ і $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.
3. Нехай $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ – відображення. Тоді відображення $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, визначене формулою $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, позначається $f_1 \times f_2$ і називається прямим добутком відображень, а самі відображення – множниками. Довести, що $f_1 \times f_2$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервні його множники.
4. Нехай A – підмножина зв'язного топологічного простору X . Довести, що якщо ∂A зв'язна, то $\overline{A}$ також зв'язна.

Варіант 12

1. Нехай $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ – відображення, що ставить у відповідність точці $\varphi \in [0, 2\pi)$ кінцеву точку дуги на колі S^1 довжиною φ : $f(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Показати, що f неперервне і бієктивне, але не є гомеоморфізмом.
2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | y > 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x, y \in (0, 1)\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.
3. Нехай X і Y – топологічні простори. Розглянемо $X \times Y$ з топологією прямого добутку. Нехай $A \subset X$, $B \subset Y$. Довести, що $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$.
4. Довести, що якщо A зв'язна, то $\overline{A}$ зв'язна.

Варіант 13

1. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$. Показати, що функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, яка визначена рівністю $f(x) = \rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) | y \in A\}$, неперервна на X .

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | y > 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x > 0, y \in (0, 1)\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ називається графіком відображення f . Довести, що $f: X \rightarrow Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервне відображення $h: X \rightarrow \Gamma_f$ вигляду $h(x) = (x, f(x))$.

4. Нехай X – нескінченна множина. Кофінітною топологією на X називається топологія, що складається з порожньої множини і доповнень до скінченних множин. Описати компактні підмножини X в такій топології.

Варіант 14

1. Довести, що якщо $f: X \rightarrow Y$ бієктивне і для будь-якої підмножини $A \subset X$ справедлива рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, то f – гомеоморфізм.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | y > 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай X – топологічний простір. Діагоналю $X \times X$ називається підмножина $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subset X \times X$. Показати, що X хаусдорфовий тоді і тільки тоді, коли Δ замкнена в $X \times X$.

4. Нехай $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$ (зі стандартною топологією), де $A = \{(r, \varphi) | r = \exp(\frac{1}{1+\varphi^2}), \varphi > 0\}$ і $B = S^1$. З'ясувати, чи є зв'язним простір X .

Варіант 15

1. Показати, що бієктивне відображення $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ є гомеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли виконано одну з умов:

- τ - найслабша з топологій в X , для яких відображення f неперервне;
- σ - найсильніша з топологій в Y , для яких відображення f неперервне.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ і $Y = \{(x, y) | x > y > 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Нехай $f: X \rightarrow Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$ називається графіком відображення f . Довести, що графік неперервної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ зв'язний.

4. Нехай підмножини A і B топологічного простору X компактні. Визначити, чи вірно в загальному випадку, що $A \cap B$ і $A \cup B$ компактні.

Варіант 16

1. Відображення топологічних просторів називається відкритим, якщо переводить відкриті множини у відкриті. Довести, що відображення $f: X \rightarrow Y$ відкрите тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ справедлива рівність $f(Int A) \subset Int f(A)$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y) | x, y \in [0, 1]\}$ і $Y = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$ зі стандартною топологією.

3. Довести, що факторпростір сепарабельного простору сепарабельний.

4. Показати, що якщо топологічний простір X хаусдорфовий, то для будь-якої його компактної підмножини A і точки $x \notin A$ існують відкриті множини U і V такі, що $x \in U$, $A \subset V$ і $U \cap V = \emptyset$.