1. Найти все отображения φ аффинной прямой в себя, сохраняющие простое отношение трех точек $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ (т.е. такие, что если C делит AB в отношении λ, то $\varphi(C)$ делит $\varphi(A)\varphi(B)$ в отношении λ). Тут удобно отождествить прямую с $\mathbb{R}$ и искать φ в виде функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Расширим класс отображений из предыдущей задачи.

   - Найти все отображения φ аффинной прямой в себя, сохраняющие двойное отношение четырех точек $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}$.
   - Из найденных отображений только аффинные (т.е. отображения из предыдущей задачи) определены на всей прямой. Устраним эту проблему, дополнив прямую "бесконечно удаленной" точкой ∞ (в отличие от анализа, бесконечность здесь одна, а не две). Определить операции с этой точкой так, чтобы все отображения из предыдущего пункта превратились в биекции этого нового объекта на себя. Такая дополненная прямая называется проективной прямой, а найденные отображения – ее проективными преобразованиями.
   - Отождествить проективную прямую с множеством $\mathbb{R}P^1$ классов эквивалентности пар вещественных чисел (x, y), не равных одновременно нулю. Мы считаем две пары эквивалентными, если они пропорциональны: $(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y)$. Обозначим класс эквивалентности пары (x, y) через $(x : y)$. Числа x и y называются однородными координатами точки проективной прямой. Как выглядят проективные преобразования в однородных координатах?
   - Отождествить $\mathbb{R}P^1$ с множеством прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^2$. Описать отображения $\mathbb{R}^2$ в себя, которые переводят прямые, проходящие через начало координат, в прямые, проходящие через начало координат, и задают на $\mathbb{R}P^1$ проективные преобразования.

3. Показать, что дифференцирование и умножение на t – линейные отображения полиномов от t с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Выписать матрицы этих отображений в пространствах полиномов ограниченной степени.

4. Показать, что если φ и ψ – линейные операторы на конечномерном пространстве, то их коммутатор $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ не может быть равен тождественному оператору. Верно ли это для бесконечномерных пространств?

5. Пусть V – конечномерное векторное пространство.

   - Показать, что сопряженное постранство $V^* = \{\varphi\colon V \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \,\text{линейно}\}$ изоморфно V.
   - Построить изоморфизм $V \to V^{**} = (V^*)^*$, не используя базис V (базис можно использовать при доказательстве изоморфности).