1. Симплектическим пространством называется четномерное векторное пространство V вместе с невырожденным кососимметричным билинейным произведением $(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$. Базис $\{e_1,\ldots,e_{2m}\}$ такого пространства называется симплектическим, если

$$(e_i,e_j)=\begin{cases} 1, & j=i+m;\\ -1, & j=i-m;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Существование такого базиса следует из одной из предыдущих задач. Матрица называется симплектической, если она является матрицей перехода от одного симплектического базиса к другому. Множество таких матриц обозначается $\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$.

   - Показать, что все симплектические матрицы невырождены. Показать, что произведение двух симплектических матриц и обратная к симплектической матрице – симплектические. Таким образом, $\mathrm{Sp}(2m,\mathbb{R})$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(2m,\mathbb{R})$ (она называется вещественной симплектической группой).
   - Показать, что линейное отображение $\varphi\colon V\to V$ сохраняет $(\cdot,\cdot)$ (т.е. $(a,b)=(\varphi(a),\varphi(b))$ для любых $a,b\in V$) тогда и только тогда, когда его матрица в любом симплектическом базисе симплектическая.

2. В силу доказанного в предыдущей задаче и определения площади, аффинное отображение плоскости сохраняет ориентированные площади параллелограммов и треугольников тогда и только тогда, когда его матрица принадлежит $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$.

   - Описать все такие матрицы.
   - Как выглядит множество матриц аффинных отображений, сохраняющих ориентированные объемы параллелепипедов и симплексов, для пространств произвольной размерности?
   - Как выглядит множество матриц аффинных отображений, сохраняющих объемы параллелепипедов и симплексов, для пространств произвольной размерности?

   Как видим, все такие отображения – биекции (аффинные преобразования).

3. Есть два традиционных способа определять n-мерный симплекс (аналог треугольника и тетраэдра), натянутый на базис $\{a_1,\ldots,a_n\}$:

$$\sigma_1=\left\{A\,|\,\overline{OA}=\sum_{i=1}^{n}x^ia_i,\ x^i\geqslant 0\,\forall i,\ \sum_{i=1}^{n}x^i\leqslant 1\right\}$$

и

$$\sigma_2=\left\{A\,|\,\overline{OA}=\sum_{i=1}^{n}x^ia_i,\ 0\leqslant x^1\leqslant x^2\leqslant\cdots\leqslant x^n\leqslant 1\right\}.$$

Построить аффинное преобразование, которое переводит первое из этих множеств во второе и определитель матрицы котрого равен 1 (записать в аффинных координатах $x^1,\ldots,x^n$).

Неформальное замечание. Это наблюдение объясняет появление коэффициента $\frac{1}{n!}$ в формуле для объема симплекса, если принять на веру, что аффинные преобразования с определителем матрицы ±1 сохраняют объем любых множеств: n-мерный параллелепипед можно сложить из $n!$ подмножеств так, что каждое из них получается из σ_2 такого рода преобразованием и они пересекаются только по граням, т.е. образам подмножеств σ_2, где некоторые из неравенств становятся равенствами (как это сделать?).