1. Описать пересечения четырехмерного куба $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid |x^i| \leqslant 1\}$ с гиперплоскостью $\sum\limits_i x^i = c$ для разных значений c (как многогранники в трехмерном пространстве).

2. Описать пересечения четырехмерного симплекса $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^i \geqslant 0, \sum\limits_i x^i \leqslant 1\}$ с гиперплоскостью $x^3 + x^4 = c$ для разных значений c (как многогранники в трехмерном пространстве).

3. n-мерным (выпуклым) многогранником называется пересечение B конечного числа замкнутых полупространств относительно некоторых гиперплоскостей $B_1, \ldots, B_k$ n-мерного аффинного пространства. Примерами являются стандартные n-мерные куб $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid |x^i| \leqslant 1\}$ и симплекс $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^i \geqslant 0, \sum\limits_i x^i \leqslant 1\}$. Гранью B называется любое непустое пересечение $B \cap B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_l}$. Размерностью грани называется размерность ее аффинной оболочки. Нульмерные грани называются вершинами, одномерные – ребрами. Найти число различных m-мерных граней n-мерных куба и симплекса ($0 \leqslant m \leqslant n-1$).

4. Внутренней диагональю многомерного многогранника называется отрезок, соединяющий вершины и не лежащий ни в какой грани. Для стандартного n-мерного куба в пространстве с декартовыми координатами:

   - Найти число внутренних диагоналей.
   - Найти число внутренних диагоналей, ортогональных данной.
   - Найти длину любой внутренней диагонали.
   - Найти угол между любой внутренней диагональю и любым ребром, исходящими из одной вершины.
   - Показать, что внутренняя диагональ, исходящая из вершины P, ортогональна гиперплоскости, проходящей через концы ребер, исходящих из P, и найти отношение, в котором делит диагональ точка пересечения с этой гиперплоскостью.
   - Найти радиус описанной гиперсферы.

   Как ведут себя найденные длины, углы и отношения при $n \to \infty$?

5. Найти множество точек n-мерного аффинного евклидова пространства, равноудаленных от $m+1$ точек, не лежащих ни в каком $(m-1)$-мерном подпространстве. При $m = n$ вывести, что через эти точки проходит единственная гиперсфера.