Аналитические методы геометрического моделирования

Доля П.Г.

Уравнения кусочно-гладких непрерывных функций

Кусочно-непрерывные функции широко используются в прикладных науках. Они состоят из кусков нескольких функций и могут быть представлены различными выражениями на различных участках изменения аргумента. Можно работать с такими функциями, используя их кусочную природу, но во многих случаях удобнее работать с единым «аналитическим» выражением такой функции. Действительно, если строить график функции вручную, то кусочное представление в большинстве случаев наиболее удобно. Однако, при компьютерном анализе функции, единое «аналитическое» выражение выглядит более предпочтительным.

В приложениях используют, как правило, непрерывные функции и здесь мы будем работать только с такими функциями. Если уравнение каждого куска является гладкой функцией, и составная функция является непрерывной, то такую функцию мы будем называть кусочно-гладкой непрерывной функцией (Piecewise Smooth Continuous function – PSC функция). В настоящей главе мы покажем, как можно переходить от кусочного представления составных функций к единому аналитическому выражению. В частности будут отдельно рассмотрены кусочно-линейные функции (ломаные), кусочно-полиномиальные функции, а также непрерывные функции, составленные из кусков гладких функций, уравнения которых заданы.

1.1 Уравнение ломаной

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$P(x,a,w) \;=\; \frac{1}{2w}(w+|x-a|-|x-a-w|) \qquad (w \neq 0)\,. \tag{1}$$

Она является непрерывной по переменной x. При $x<a$ функция равна 0, при $x>a+w$ она равна 1, а внутри интервала $a \le x \le a+w$ совпадает с линейной функцией $(x-a)/w$. На следующем рисунке приведен график этой функции для случая $w>0$.

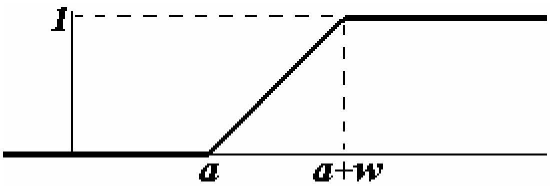


Рис. 3 График функции $P(x,a,w)$ при $w>0$.

Теорема 1. *Дана возрастающая последовательность чисел* $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ *и произвольная последовательность значений* $\{y_k\}_{k=0}^{n}$. *Уравнение непрерывной* *кусочно-линейной функции (ломаной), которая проходит через точки* $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, *равна* y_0 *при* $x \le x_0$ *и равна* y_n *при* $x \ge x_n$, *имеет следующий вид:*

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$

■

Поскольку функции $P(x,a,w)$ выражается через функцию абсолютного значения, то после подстановки (1) и некоторых преобразований мы можем записать уравнение ломаной (2) в виде

$$y_b(t) = \frac{1}{2}\Big(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}|x - x_0| + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right)|x - x_k| - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}|x - x_n| + y_n \Big) \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) дают уравнение ломаной, которая сохраняет постоянные значения вне отрезка $[x_0, x_n]$. Для добавления к ломаной наклонных лучей нам потребуются следующие функции

$$Q(x,a) = \frac{1}{2}(x - a + |x - a|) \quad \text{и} \quad Q_l(x,a) = \frac{1}{2}(x - a - |x - a|). \tag{4}$$

Обе функции непрерывны. Функция $Q(x,a)$ равна 0 при $x \le a$, и равна $x - a$ при $x \ge a$. Функция $Q_l(x,a)$ равна 0 при $x \ge a$ и равна x-a при $x \le a$. На следующем рисунке приведены графики функций $Q(x,1)$ и $Q_l(x,2)$.

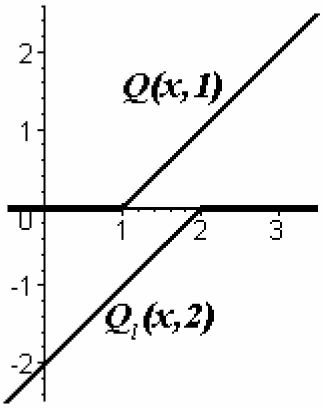


Рис. 4 Графики функций $Q(x,1)$ и $Q_l(x,2)$.

Предположим, что непрерывную ломаную, проходящую через точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, нужно продлить влево бесконечным лучом, выходящим из точки (x_0,y_0) под углом α к оси OX, и продлить вправо лучом, выходящим из точки (x_n, y_n) под углом β к оси OX. Следующий рисунок поясняет ситуацию.

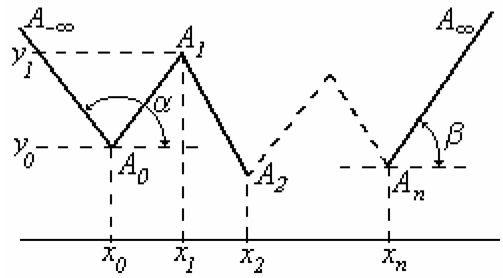


Рис. 5

Теорема 2. *Уравнение непрерывной кусочно-линейной функции (ломаной), проходящей через заданные точки и имеющей заданные наклонные прямолинейные лучи, имеет следующий вид:*

$$y(x) = Q_l(x, x_0) tg\alpha + y_b(x) + Q(x, x_n) tg\beta \qquad (5)$$

где функция $y_b(x)$ *определяется формулой* (2) *и* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

■

<u>Пример 1</u>. Написать уравнение ломаной, график которой приведен на следующем рисунке.

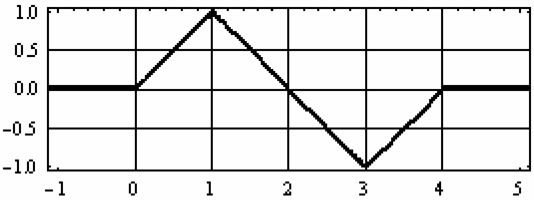


Рис. 6

Здесь мы имеем $\{x_i\}_{i=0}^{3} = \{0,1,3,4\}$, $\{y_i\}_{i=0}^{3} = \{0,1,-1,0\}$. Тогда из формулы (2) получаем $y_b(x) = P(x,0,1) - 2P(x,1,2) + P(x,3,1)$. Заменяя функцию $P(x,a,w)$ их выражениями (1), после некоторых преобразований получаем $y_b(x) = \frac{1}{2}(|x| - 2|x-1| + 2|x-3| - |x-4|)$.

<u>Пример 2</u>. Написать уравнение ломаной, график которой приведен на следующем рисунке.

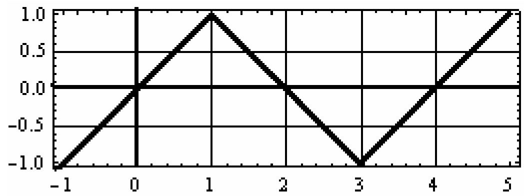


Рис. 7

Здесь мы имеем две точки излома $\{x_i\}_{i=0}^{1} = \{1,3\}$, $\{y_i\}_{i=0}^{1} = \{1,-1\}$ и $tg\,\alpha = 1$, $tg\,\beta = 1$. Из формулы (2) получаем $y_b(x) = 1 - 2P(x,1,2)$. Из формулы (5) получаем $y(x) = Q_l(x,1) + 1 - 2P(x,1,2) + Q(x,3)$. Заменяя функции $P(x,1,2)$, $Q_l(x,1)$, $Q(x,3)$ их выражениями (1) и (4), после простых преобразований получаем $y(x) = -2 + x - |x-1| + |x-3|$.

1.3 Представление кусочных полиномов

Среди кусочно-аналитических функций наиболее распространенными являются кусочные полиномы, частным случаем которых являются сплайны. Кусочные полиномы используются в геометрическом моделировании, теории аппроксимации и многих других разделах прикладной математики. Здесь мы приведем способ представления кусочных полиномов в виде единого «аналитического» выражения с использованием функции абсолютного значения.

У кусочных полиномов каждый сегмент является полиномом, т.е. аналитической функцией на всей вещественной оси. Пусть дано разбиение вещественной оси $\Delta=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $-\infty=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=\infty$ и непрерывный кусочный полином $P_\Delta(x)$,

$$P_\Delta(x)=\begin{cases} p_1(x)\ , x\le x_1 \\ p_2(x)\ , x_1<x\le x_2 \\ \cdots \\ p_{n-1}(x),\ x_{n-2}<x\le x_{n-1} \\ p_n(x)\ , x>x_{n-1} \end{cases}, \qquad (1)$$

совпадающий с полиномами $p_k(x)=\sum_{j=0}^{l_k} a_{k\,j}x^j$ на соответствующих участках $x_{k-1}<x\le x_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Пусть также выполняется условие непрерывности $p_k(x_k)=p_{k+1}(x_k)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Существует единственное представление непрерывного кусочного полинома $P_\Delta(x)$ такое, что*

$$P_\Delta(x)=P(x)+\sum_{k=1}^{n-1}P_k(x)\left|x-x_k\right|, \qquad (2)$$

где $P(x)$ и $P_k(x)$ некоторые полиномы. Для полинома $P(x)$ имеет место представление

$$P(x)=\frac{1}{2}\left(p_1(x)+p_n(x)\right) \qquad (3)$$

Пусть известно, что в точках $x=x_k$ $(k=1,\ldots,n-1)$ выполняется гладкая стыковка до порядка m_k $\left(0\le m_k<h_k=\max\{l_k,l_{k+1}\}\right)$, т.е. имеют место равенства $p_k^{(q)}(x_k)=p_{k+1}^{(q)}(x_k)$ $\left(q=0,1,\ldots,m_k\right)$. Тогда полиномы $P_k(x)$ задаются следующим образом

$$P_k(x)=P_k^{N_k}(x)(x-x_k)^{m_k}, \qquad (4)$$

где

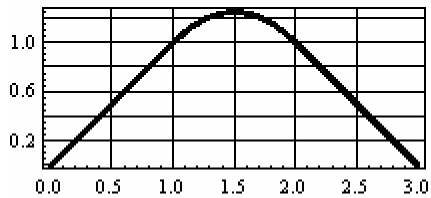
$$P_k^{N_k}(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=m_k+1}^{h_k}\frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k)-p_k^{(q)}(x_k)}{q!}(x-x_k)^{q-m_k-1}. \qquad (5)$$

являются полиномами степени $N_k=\max\{l_k,l_{k+1}\}-m_k-1$.

■

Пример 1. Написать уравнение следующего кусочного полинома

$$S(x)=\begin{cases} x & ,x\le 1 \\ 3x-x^2-1 & ,1<x<2 \\ 3-x & ,x\ge 2 \end{cases}$$

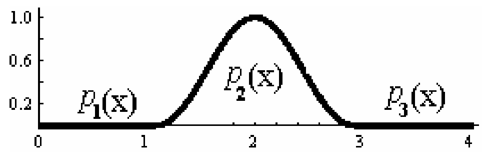


Здесь $x_1=1, x_2=2$ и $p_1(x)=x$, $p_2(x)=3x-x^2-1$, $p_3(x)=3-x$. В соответствии с (3) имеем $P(x)=\frac{1}{2}\big(x+(3-x)\big)=\frac{3}{2}$. Далее убеждаемся, что функция $S(x)$ непрерывна, а в точках $x=1$ и $x=2$ непрерывны также первые производные. Поэтому порядок гладкости в этих узлах равен $m_1=m_2=1$. Легко видеть, что $N_1=\max\{1,2\}-m_1-1=0$ и аналогично $N_2=0$. Тогда из (5) следует, что $P_1^0(x)=\frac{1}{2}\frac{p_1''(1)-p_0''(1)}{2!}=-\frac{1}{2}$ и $P_2^0(x)=\frac{1}{2}\frac{p_2''(2)-p_1''(2)}{2!}=\frac{1}{2}$. В результате формула (2) дает

$$S(x)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x-1)\,|\,x-1|+\frac{1}{2}(x-2)\,|\,x-2\,|.$$

Пример 2. Написать уравнение следующего кусочного полинома

$$S(x)=\begin{cases} 0 & ,x\le 1 \\ (x-1)^3(3-x)^3 & ,1<x<3 \\ 0 & ,x\ge 3 \end{cases}$$



Очевидно, что в точках стыка $x_1=1$ и $x_2=3$ непрерывны первая и вторая производные. Поскольку $p_1(x)=0$ и $p_3(x)=0$, то формула (5) дает

$$P_1^3(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=3}^{6}\frac{p_1^{(q)}(1)}{q!}(x-1)^{q-3} \quad \text{и} \quad P_2^3(x)=-\frac{1}{2}\sum_{q=3}^{6}\frac{p_2^{(q)}(3)}{q!}(x-3)^{q-3}$$

Легко определить, что

$$p_2^{(3)}(x)=-6\Big((x-3)^3+9(x-1)(x-3)^2+9(x-1)^2(x-3)+(x-3)^3\Big);$$

$$p_2^{(4)}(x)=-72\Big((x-3)^2+3(x-1)(x-3)+(x-1)^2\Big);$$

$$p_2^{(5)}(x)=-720(x-2); \qquad p_2^{(6)}(x)=-720.$$

Вычисляя значения этих производных в точке $x_1=1$ и подставляя в формулу для $P_1^3(x)$, получаем

$$P_1^3(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3!}48-\frac{1}{4!}72(x-1)+\frac{1}{5!}720(x-1)^2-\frac{1}{6!}720(x-1)^3\right)=-\frac{1}{2}(x-3)^3$$

Аналогично, вычисляя значения производных в точке $x_1=3$ и подставляя в формулу для $P_2^3(x)$, получаем

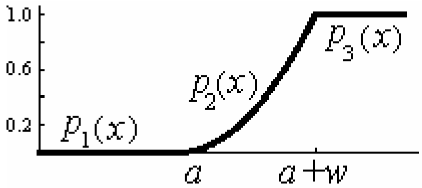
$$P_2^3(x)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3!}48-\frac{1}{4!}288(x-3)-\frac{1}{5!}720(x-3)^2-\frac{1}{6!}720(x-3)^3\right)=\frac{1}{2}(x-1)^3$$

Тогда в соответствии с (2) – (4) получаем

$$S(x)=P_1^3(x)(x-1)^2\,|x-1|+P_2^3(x)(x-3)^2\,|x-3|=$$
$$=-\frac{1}{2}(x-3)^3\,|x-1|^3+\frac{1}{2}(x-1)^3\,|x-3|^3.$$

<u>Пример 3</u>. Написать уравнение следующего кусочного полинома $(w>0)$

$$S(x)=\begin{cases}0 & ,x\le a\\ (x-a)^2/w^2 & ,a<x<a+w\\ 1 & ,x\ge a+w\end{cases}$$



Здесь $x_1=a\,, x_2=a+w$, $m_1=1$, $m_2=0$, $p_1(x)=0$, $p_2(x)=(x-a)^2/w^2$, $p_3(x)=1$. В соответствии с (3) $P(x)=1/2$. Из (5) получаем

$$P_1^0(x)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=2}^{2}\frac{p_2^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^{q-2}=\frac{1}{2}\frac{2/w^2}{2!}=\frac{1}{2w^2}$$

и

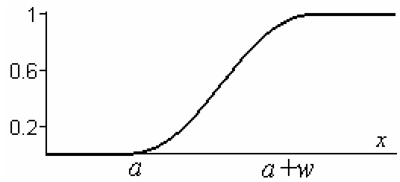
$$P_2^1(x)=-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=1}^{2}\frac{p_2^{(q)}(a+w)}{q!}(x-a-w)^{q-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}(x-a-w)\right)=-\frac{x-a+w}{2w^2}.$$

Из (2), (4) получаем

$$S(x)=\frac{1}{2}+P_1^0(x)(x-a)\,|x-a|+P_2^1(x)\,|x-a-w|=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2w^2}(x-a)\,|x-a|-\frac{x-a+w}{2w^2}\,|x-a-w|=$$
$$=\frac{1}{2w^2}\Big(w^2+(x-a)\,|x-a|-(x-a+w)\,|x-a-w|\Big). \qquad (6)$$

<u>Пример 4</u>. Написать уравнение следующего кусочного полинома $(w>0)$

$$S(x)=\begin{cases}0 & ,x\le a\\ p_2(x) & ,a<x<a+w\\ 1 & ,x\ge a+w\end{cases}$$



где $p_2(x)=10\left(\frac{x-a}{w}\right)^3-15\left(\frac{x-a}{w}\right)^4+6\left(\frac{x-a}{w}\right)^5$. Легко видеть, что на интервале $a<x<a+w$ функция $S(x)$ монотонно возрастает и в точках $x_1=a$ и $x_2=a+w$ имеет непрерывные первую и вторую производные. Также легко вычислить

$$p_2^{(3)}(x)=\frac{60}{w^3}-360\frac{x-a}{w^4}+360\frac{(x-a)^2}{w^5};$$
$$p_2^{(4)}(x)=-\frac{360}{w^4}+720\frac{x-a}{w^5}; \quad p_2^{(5)}(x)=\frac{720}{w^5}.$$

Здесь $m_1 = m_2 = 2$, $p_1(x) = 0$, $p_3(x) = 1$. В соответствии с (3) $P(x) = 1/2$. Из (5) получаем

$$P_1^2(x) = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=3}^{5} \frac{p_2^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^{q-3} = \frac{1}{2w^3}\left(10 - 15\frac{x-a}{w} + 6\left(\frac{x-a}{w}\right)^2\right)$$

Аналогично получаем

$$P_2^2(x) = -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=3}^{5} \frac{p_2^{(q)}(a+w)}{q!}(x-a-w)^{q-3} =$$
$$= -\frac{1}{2w^3}\left(10 + 15\frac{x-a-w}{w} + 6\left(\frac{x-a-w}{w}\right)^2\right)$$

Тогда из (2), (4) получаем

$$S(x) = \frac{1}{2} + P_1^2(x)(x-a)^2\,|x-a| + P_2^2(x)(x-a-w)^2\,|x-a-w| =$$
$$= \frac{1}{2w^5}\Big(w^5 + (10w^2 - 15w(x-a) + 6(x-a)^2)\,|x-a|^3 -$$
$$-(10w^2 + 15w(x-a-w) + 6(x-a-w)^2)\,|x-a-w|^3\Big). \qquad (7)$$

<u>Пример 5</u>. *Уравнение Бернштейна кусочно-линейной функции (ломаной).*

Дан набор узлов $\left\{(x_k, y_k)\right\}_{k=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и надо построить ломаную на отрезке $[x_0, x_n]$. Пусть при этом отрезок, соединяющий точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ продолжается влево и определяет для всех $x < x_1$ луч ломаной, проходящий через эти точки. А отрезок, соединяющий пару точек $(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, определяет для $x > x_{n-1}$ другой луч ломаной. Формулы (3) – (5) при *N=1* дают

$$S_\Delta^1(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\big(a_{k+1\,1} - a_{k\,1}\big)\big|x - x_k\big|,$$

где a_k тангенсы углов наклона соответствующих прямых. Уравнение прямой, походящей через два соседних узла (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), имеет вид $p_k(x) = y_{k-1} + \dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\big(x - x_{k-1}\big)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда получаем

$$S_\Delta^1(x) = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\big(x - x_0\big) + y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\big(x - x_{n-1}\big)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)\big|x - x_k\big| \qquad (10)$$

Легко видеть, что формула (1.5) может быть приведена к виду (10), если в ней функции $P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})$ заменить представлением (1.1). Вероятно, формула (10) была известна еще С.Н.Бернштейну. В работе [1] он приводит ее аналог для случая равномерного распределения узлов и использует при доказательстве теоремы Вейерштрасса.

1.4 Кусочно-гладкие непрерывные функции

Рассмотрим набор точек вещественной оси $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и последовательность непрерывных функций $\{f_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$. Говорят, что функция *f(x)* является кусочно-непрерывной, если она задается в виде

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \le x_0 \\ f_1(x), & x_0 < x \le x_1 \\ \cdots & \\ f_n(x), & x_{n-1} < x \le x_n \\ f_{n+1}(x), & x > x_n \end{cases} \qquad (1)$$

и функции $f_i(x)$ непрерывны на соответствующих участках. В этом случае кусочная функция $f(x)$ в точках x_i может иметь только разрывы первого рода. Мы также полагаем, что кусочная функция состоит из конечного числа звеньев. Для определенности мы полагаем, что все участки являются полуоткрытыми интервалами $x_{i-1} < x \le x_i$, однако это не существенно.

Здесь мы будем использовать кусочно-аналитические функции, которые определены на всей оси $-\infty < x < \infty$ и задаются различными аналитическими выражениями $f_i(x)$. В аналитической геометрии используют, как правило, непрерывные функции и мы будем работать только с такими функциями. Кусочно-аналитическая функция $f(x)$ будет непрерывной, если выполняются дополнительные условия

$$f_{i-1}(x_{i-1}) = f_i(x_{i-1}) \ \ \left(i = 1, \ldots, n+1\right). \qquad (2)$$

В настоящем разделе мы покажем, как можно переходить от кусочного представления (1) таких функций к единому «аналитическому» выражению.

Рассмотрим следующую кусочно-линейную функцию

$$\Pi(x,a,w) = \frac{1}{2}(w + |x-a| - |x-a-w|) \quad (w > 0) \qquad (3)$$

Легко видеть, что она равна $x - a$ при $a < x < a + w$, равна 0 при $x \le a$ и равна w при $x \ge a + w$. Эта функция с точностью до числового множителя $1/w$ совпадает с функцией *P(x,a,w)* определенной в п. 1.1.

Пусть задана возрастающая последовательность чисел $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ и последовательность функций, определенных на отрезках вещественной оси $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^{n}$ аналитическими выражениями $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$. Будем также предполагать, что соседние функции в точках прилегания смежных отрезков имеют одинаковые значения, т.е. $f_{i-1}(x_i) = f_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда для непрерывной кусочно-аналитической функции (1) имеет место

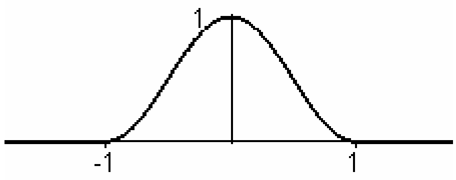
Теорема 1. *Уравнение непрерывной криволинейной ломаной, которая на отрезках* $[x_{i-1}, x_i]$ *задана функциями* $f_i(x)$ *и вне отрезка* $[x_0, x_n]$ *сохраняет постоянные значения, имеет следующий вид*:

$$y_b(x) = f_1(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i\left(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})\right) - f_i(x_{i-1}) \right) \qquad (4)$$

■

Пример 1. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , x \le -1 \\ \dfrac{1+\cos \pi x}{2} & , -1 < x < 1 \\ 0 & , x \ge 1 \end{cases}$$

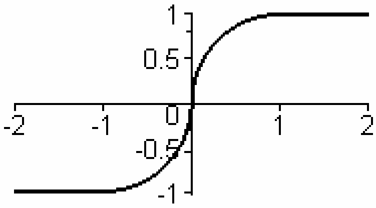


В соответствии с (4) имеем

$$y(x) = \frac{1+\cos(\pi(-1+\Pi(x,-1,2)))}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}(|x+1|-|x-1|\right)\right)$$

Пример 2. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} -1 & , x \le -1 \\ -\sqrt{1-(x+1)^2} & , -1 < x \le 0 \\ \sqrt{1-(x-1)^2} & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$



Здесь $\{x_i\}_{i=0}^{2} = (-1,0,1)$, а криволинейные отрезки составной функции являются дугами окружности $f_1(x) = -\sqrt{1-(x+1)^2}$ и $f_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Функция $y(x)$ сохраняет постоянные значения вне отрезка $[-1,1]$. Поэтому можно использовать формулу (4). Имеем

$$y(x) = f_1(-1) + \left(f_1(-1+\Pi(x,-1,1)) - f_1(-1)\right) + \left(f_2(\Pi(x,0,1)) - f_2(0)\right) =$$
$$= -\sqrt{1-\Pi^2(x,-1,1)} + \sqrt{2\Pi(x,0,1) - \Pi^2(x,0,1)}.$$

Предположим, что непрерывную криволинейную ломаную левее точки x_0 нужно определить с помощью функции $f_0(x)$, и правее точки x_n нужно определить с помощью функции $f_{n+1}(x)$ с сохранением условия непрерывности $f_0(x_0) = f_1(x_0)$ и $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n)$.

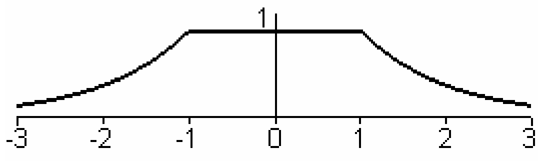
Теорема 2. *Уравнение непрерывной кусочно-аналитической функции, которая на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ совпадает с функциями $f_i(x)$, при $x \le x_0$ определяется функцией $f_0(x)$ и при $x \ge x_n$ определяется функцией $f_{n+1}(x)$, имеет следующий вид:*

$$y(x) = f_0(x_0 + Q_l(x,x_0)) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i\left(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})\right) - f_i(x_{i-1}) \right) +$$
$$+ \left(f_{n+1}(x_n + Q(x,x_n)) - f_{n+1}(x_n) \right) \qquad (5)$$

■

Пример 3. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x)=\begin{cases} e^{1+x} & ,x\le -1 \\ 1 & ,-1<x<1 \\ e^{1-x} & ,x\ge 1 \end{cases}$$



Здесь $\{x_i\}_{i=0}^{1}=(-1,1)$ и $f_0(x)=e^{1+x}$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^{1-x}$. В соответствии с (5) получаем

$$y(x)=e^{1+(-1+Q_l(x,-1))}+(1-1)+(e^{1-(1+Q(x,1))}-1)=e^{Q_l(x,-1)}+e^{-Q(x,1)}-1.$$

Пример 4. Приведем еще раз вывод явного уравнения ломаной, используя формулу (5). Дан набор узлов $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{n}$, $x_0<x_1<\ldots<x_n$ и надо построить интерполяционную кусочно-линейную функцию. Пусть при этом отрезок, соединяющий точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ продолжается влево и определяет для всех $x<x_1$ луч ломаной, проходящий через эти точки. А отрезок, соединяющий пару точек $(x_{n-1},y_{n-1}),(x_n,y_n)$, определяет для $x>x_{n-1}$ другой луч ломаной.

Уравнение прямой, проходящей через два соседних узла, имеет вид

$$f_i(x)=y_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\left(x-x_{i-1}\right)$$

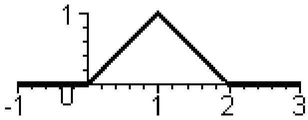
Используя (5), явное уравнение ломаной можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x)&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_1+Q_l(x,x_1)-x_0)+\\ &+\sum_{i=2}^{n-1}\left(y_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\left(x_{i-1}+\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})-x_{i-1}\right)-y_{i-1}\right)+\\ &+\left(y_{n-1}+\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\left(x_{n-1}+Q(x,x_{n-1})-x_{n-1}\right)-y_{n-1}\right)=\\ &=y_1+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}Q_l(x,x_1)+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})+\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}Q(x,x_{n-1}).\end{aligned} \tag{6}$$

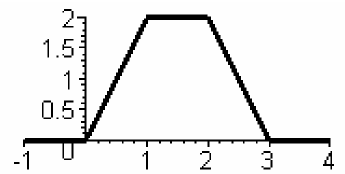
Вспоминая определения (1.4) и (3), уравнение (6) можно привести к виду (3.10), содержащему только функцию абсолютного значения.

Задачи и упражнения.

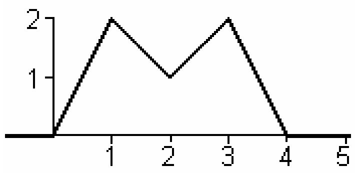
Упражнение 1. Написать уравнения следующих кусочно-линейных функций (координаты узлов целые числа, см. графики)

1 

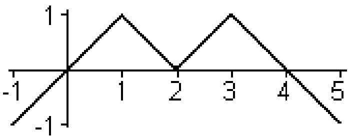
Ответ: $y = \frac{1}{2}|x| - |x-1| + \frac{1}{2}|x-2|$

2 

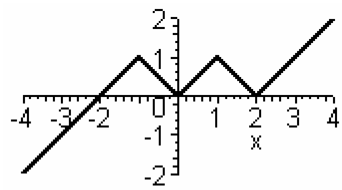
$y = |x| - |x-1| - |x-2| + |x-3|$

3 

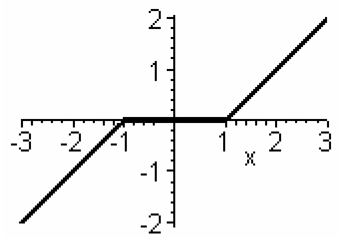
$|x| - \frac{3}{2}|x-1| + |x-2| - \frac{3}{2}|x-3| + |x-4|$

4 

$2 - |x-1| + |x-2| - |x-3|$

5 

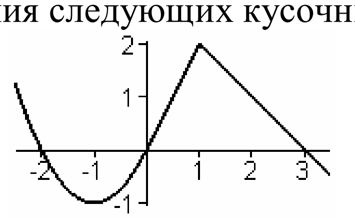
$y = -|x+1| + |x| - |x-1| + |x-2| + x$

6 

$y = x - \frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|x-1|$

Упражнение 2. Написать уравнения следующих кусочных полиномов

1 $S(x) = \begin{cases} x(x+2), x \le 0 \\ 2x \quad ,0 < x < 1 \\ 3 - x \quad ,x \ge 1 \end{cases}$

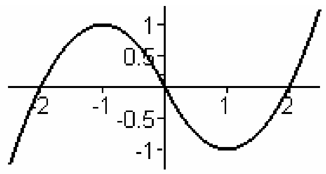


Ответ: $S(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 3) - \frac{1}{2}x|x| - \frac{3}{2}|x-1|$.

2 $y = \begin{cases} -x^3, x < 0 \\ x^3 \quad ,x \ge 0 \end{cases}$ Ответ: $y = x^2|x| \equiv |x|^3$.

3 $y = \begin{cases} 0 \quad ,x < 0 \\ x^2, x \ge 0 \end{cases}$ Ответ: $y = \frac{1}{2}x\left(x + |x|\right)$

4 $$y(x)=\begin{cases}1-(x+1)^2, x\le 0\\ (x-1)^2-1, x>0\end{cases}$$



Ответ: $y(x)=x(|x|-2)$.

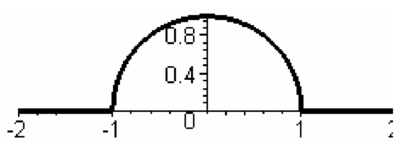
5 $$y(x)=\begin{cases}2x & ,x\le 0\\ x(x-1)(x-2), & 0<x<2\\ 2(x-2) & ,x\ge 2\end{cases}$$

Ответ:

$$y=-2+2x+\frac{3}{2}|x-2|+\frac{1}{2}|x|^3-\frac{3}{8}x^2|x-2|-\frac{3}{2}x|x|-\frac{1}{8}|x-2|^3$$

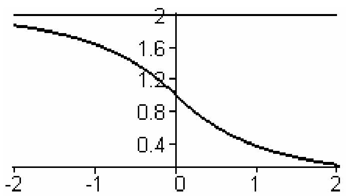
<u>*Упражнение 3*</u>. Написать аналитические выражения следующих кусочных функций

1 $$y=\begin{cases}0 & ,x<-1\\ \sqrt{1-x^2} & ,-1\le x<1\\ 0 & ,x>1\end{cases}$$



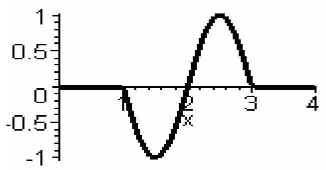
Ответ: $y=\sqrt{1-x^2+|1-x^2|}/\sqrt{2}$

2 $$y(x)=\begin{cases}2-e^x & ,x\le 0\\ e^{-x} & ,x>0\end{cases}$$



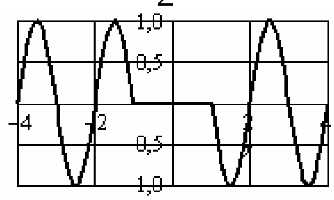
Ответ: $y(x)=1-2e^{-|x|/2}\,sh(x/2)$

3 $$y(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \sin\pi x & ,1<x<3\\ 0 & ,x\ge 3\end{cases}$$



Ответ: $y(x)=\sin\left(\pi\,(1+\Pi(x,1,2))\right)=\sin(\frac{\pi}{2}(|x-1|-|x-3|))$

4 $$y(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\le -1\\ 0 & ,-1<x\le 1\\ \sin\pi x, & x>1\end{cases}$$



Ответ: $y(x)=-\sin\pi\left(x-\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|\right)$.