

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

О.Л. Ямпольський

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.
Криві і поверхні 2 порядку: загальна теорія.**

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів математичних факультетів університетів

Харків – 2020

УДК 514.12(075.8)

ББК 22.151.5(я7)

К 93

Рецензенти:

В. О. Горькавий – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу геометрії і диференціальних рівнянь Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Веркіна НАН України;

В.Т. Лисиця – кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики та інформатики факультету математики і інформатики Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Навчально-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № від)*

Ямпольський О. Л.

К 93

Аналітична геометрія. Криві і поверхні 2 порядку: загальна теорія: навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії для студентів математичних факультетів університетів / О.Л. Ямпольський. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 75 с.

Навчальний посібник призначено для засвоювання основ аналітичної геометрії кривих і поверхонь другого порядку, заданих своїми загальними (не канонічними) рівняннями. Послідовне використання матричної і операторної мови дозволяє перенести більшість понять теорії кривих і поверхонь на гіперповерхні евклідова і афінного просторів. Посібник розрахований на студентів математичних спеціальностей університетів, зокрема для студентів першого курсу факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. В посібник включені елементи багатовимірної геометрії.

УДК 514.12(075.8)

ББК 22.151.5(я7)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2020

© Ямпольський О.Л., 2020

© Дончик І. М., макет обкладинки, 2020

Зміст

1	Канонічні рівняння кривих і поверхонь другого порядку	6
1.1	Загальні положення	6
1.2	Евклідові канонічні криві і поверхні другого порядку	6
2	Загальні властивості рівняння квадрики	10
3	Спрощення рівняння квадрики вибором системи координат	15
3.1	Класифікаційна теорема для кривих 2 порядку	18
3.1.1	Алгоритм зведення до канонічного виду рівняння кривої 2 порядку	21
3.2	Класифікаційна теорема для поверхонь 2 порядку	26
3.2.1	Алгоритм зведення до канонічного виду рівняння поверхні 2 порядку	31
3.3	Класифікація евклідових квадрик у E^n	38
4	Інваріанти рівняння квадрики	39
4.1	Застосування інваріантів для дослідження кривої 2-го порядку . .	43
4.2	Застосування інваріантів для дослідження поверхні 2-го порядку	48
5	Взаємне розташування прямої і квадрики	52
5.1	Класифікація напрямків	52
5.2	Діаметри	53
5.3	Гіперплощини симетрії загальної квадрики	55
5.4	Центр симетрії квадрики	56
5.5	Дотична гіперплощина загальної квадрики	59
5.6	Прямі на загальній квадриці	61
6	Жмуток кривих 2-го порядку і його використання	65
7	Афінне перетворення й афінна класифікація квадрик	68

Вступ

Посібник містить базові відомості про криві і поверхні 2 порядку, а також їх узагальнення до так званих гіперквадрік в евклідовому і афінному просторах. Виклад базується на матричному і операторному поданні таких об'єктів. Для оволодіння технікою обчислень бажане знайомство з основами лінійної алгебри, а саме з поняттями квадратичної форми, власних чисел і власних векторів матриць і пов'язаних з ними операторів. Відповідні відомості в скороченому варіанті подані в даному посібнику.

Розділ 1 містить інформацію про канонічні форми рівнянь кривих і поверхонь 2 порядку.

Розділ 2 є підготовчим для подальших розглядів і містить інформацію про перетворення коефіцієнтів квадрики при заміні системи координат.

Розділ 3 є основним. В цьому розділі розвинуто алгоритм зведення рівняння квадрики до канонічного виду і доведено класифікаційні теореми для кривих, поверхонь і загальних гіперквадрік в евклідовому просторі. Детально розібрані приклади зведення до канонічного виду рівняння кривих і поверхонь 2 порядку використанням певного стандартного перетворення координат.

Розділ 4 містить технологію з'ясування канонічного рівняння квадрики без необхідності знаходження перетворення координат за допомогою інваріантів і напівінваріантів рівняння квадрики з розв'язанням певної кількості прикладів використання такої техніки.

Розділ 5 присвячений з'ясуванню можливих варіантів взаємного розташування прямої і квадрики в загальній постановці задачі. Виведені рівняння діаметрів, головних діаметрів, дотичної прямої/площини/гіперплощини, асимптот/асимптотичних конусів. Наведено приклади розв'язання базових задач.

Розділ 6 присвячений класифікації квадрик відносно ширшої – афінної – групи перетворень координат.

Зміст посібника відповідає курсу аналітичної геометрії, що викладається на факультеті математики і інформатики в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна.

Автор приносить подяку колегам з кафедри фундаментальної математики Є.В. Петрову і О.О. Шугайло за критичні зауваження і поради щодо змісту та мети посібника.

Угода про позначення. Векторні величини будемо позначати напівжирним шрифтом, наприклад, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, ... Матриці позначатимемо великими латинськими літерами, наприклад, A , B , Q , ... в тому числі матриці-стовпчики X , Y , ... Символом $(')$ позначається транспонування = перестановка рядків у стовпчики і навпаки.

Якщо X – стовпчик, то символом $\mathbf{X}$ позначається вектор, координати якого відносно заданого базису є послідовними елементами стовпчика X . Наприклад,

$$\text{якщо } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ то } \mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

1 Канонічні рівняння кривих і поверхонь другого порядку

1.1 Загальні положення

Алгебраїчною гіперповерхнею порядку n в афінному просторі з $\mathbb{R}^m$ координатами $(x_1, \dots, x_m)$ називається множина розв'язків алгебраїчного рівняння

$$P_n(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (n \geq 1), \quad (1)$$

де P_n – многочлен степені n .

Якщо $m = 2$, то відповідна гіперповерхня називається *алгебраїчною кривою* порядку n . Якщо $m = 3$, то зазвичай таку гіперповерхню називають просто *алгебраїчною поверхнею*.

Якщо $n = 1$, то многочлен є лінійною функцією координат, а множина розв'язків рівняння (1) являє собою афінну пряму, площину або гіперплощину для $m = 2$, $m = 3$ та $m > 3$, відповідно.

Якщо $n = 2$, то многочлен в рівнянні (1) є многочленом степені 2, тобто квадратичним многочленом. В такому разі множина розв'язків рівняння (1) називається афінною кривою, поверхнею або гіперповерхнею *другого порядку* для $m = 2$, $m = 3$ та $m > 3$, відповідно. Для таких геометричних образів використовують спільний термін – *афінна квадрика*.

Якщо охоплюючий простір є евклідовим, то відповідні криві та поверхні називають *евклідовими* квадриками.

Якщо $n = 3$ або $n = 4$, то множина розв'язків рівняння (1) називається афінною або евклідовою *кубікою* або *квартікою*. Процес можна продовжити.

В курсі аналітичної геометрії розглядаються лише криві і поверхні 2 порядку, для яких існує завершена класифікація та розроблено відповідні методи їх дослідження. Криві і поверхні більших порядків є предметом дослідження алгебраїчної геометрії.

1.2 Евклідові канонічні криві і поверхні другого порядку

Зафіксуємо на площині декартову прямокутну систему координат (x, y) . Евклідовою кривою другого порядку на площині називається геометричне місце точок координати яких відносно даної декартової прямокутної системи координат задовольняють рівнянню

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0). \quad (2)$$

Члени другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ рівняння (2) утворюють *квадратичну частину* рівняння, члени першого порядку $2b_1x + 2b_2y$ утворюють *лінійну частину* рівняння, число c називається *вільним членом* рівняння.

Вирізняються 9 типів рівнянь кривих 2 порядку, що мають назву **канонічних рівнянь** відносно **канонічних систем координат**.

1. Еліпс дійсний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0), \quad (3)$$

2. Еліпс уявний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a \geq b > 0), \quad (4)$$

3. Гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0), \quad (5)$$

4. Парабола.

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0), \quad (6)$$

5. Пара дійсних прямих, що перетинаються

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a > 0, b > 0), \quad (7)$$

6. Пара уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці $(0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a \geq b > 0), \quad (8)$$

7. Пара паралельних дійсних прямих

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0), \quad (9)$$

8. Пара паралельних уявних прямих

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (b > 0), \quad (10)$$

9. Пара прямих, що зливаються

$$y^2 = 0. \quad (11)$$

Евклідовою поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору координати яких відносно даної декартової прямокутної системи координат (x, y, z) задовольняють рівнянню

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \\ \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}^2 \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Члени другого порядку $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ рівняння (12) утворюють *квадратичну частину* рівняння, члени першого порядку $2b_1x + 2b_2y + 2b_3z$ утворюють *лінійну частину* рівняння, число c називається *вільним членом* рівняння.

Вирізняються 17 типів рівнянь евклідових поверхонь 2 порядку, що мають назву **канонічних рівнянь** відносно **канонічних систем координат**.

1. Еліпсоїд дійсний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq b \geq c > 0), \quad (13)$$

2. Еліпсоїд уявний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a \geq b \geq c > 0), \quad (14)$$

3. Гіперболоїд однопорожнинний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a \geq b > 0, c > 0), \quad (15)$$

4. Гіперболоїд двопорожнинний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a \geq b > 0, c > 0), \quad (16)$$

5. Конус дійсний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a \geq b > 0, c > 0), \quad (17)$$

6. Конус уявний з вершиною в дійсній точці $(0, 0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a \geq b > 0, c > 0), \quad (18)$$

7. Параболоїд еліптичний

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p \geq q > 0), \quad (19)$$

8. Параболоїд гіперболічний

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0), \quad (20)$$

9. Циліндр еліптичний дійсний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0), \quad (21)$$

10. Циліндр еліптичний уявний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a \geq b > 0), \quad (22)$$

11. Циліндр гіперболічний

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0). \quad (23)$$

12. Циліндр параболічний

$$y^2 = 2pz \quad (p > 0). \quad (24)$$

13. Пара дійсних площин, що перетинаються

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a > 0, b > 0), \quad (25)$$

14. Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій (осі Oz)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (a > 0, b > 0), \quad (26)$$

15. Пара паралельних дійсних площин

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0), \quad (27)$$

16. Пара паралельних уявних площин

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (b > 0), \quad (28)$$

17. Пара площин, що злилися

$$y^2 = 0. \quad (29)$$

Сутність класифікаційної теореми полягає в тому, що вибором декартової прямокутної системи координат рівняння будь-якої кривої 2-го порядку може бути зведене до одного з 9 перелічених типів рівнянь, а рівняння поверхні 2-го порядку може бути зведене до одного з перелічених 17 типів рівнянь 2-го порядку.

Тим самим, будь-яка крива 2-го порядку є однією з 9 перелічених кривих 2-го порядку, а поверхня 2-го порядку є однією з перелічених 17 поверхонь 2-го порядку.

2 Загальні властивості рівняння квадрики

Рівняння загальної кривої 2-го порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

і загальної поверхні 2-го порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

можуть бути подані єдиним матричним рівнянням, придатним для розгляду гіперповерхонь 2-го порядку в n -вимірному просторі. При такому узагальненні криві і поверхні 2-го порядку називаються *квадриками*. Для цього введемо в розгляд індексні позначення для декартових координат, а саме перепозначимо $x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3$. Окрім того, сформуємо

- симетричну $n \times n$ матрицю A , елементи якої складені з коефіцієнтів квадратичної частини рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

- стовпець коефіцієнтів лінійної частини рівняння

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

- стовпець змінних і його транспонований (рядок змінних)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = (x_1, \dots, x_n).$$

За таких позначень рівняння квадрики запишеться єдиним чином у формі матричного рівняння

$$X'AX + 2X'b + c = 0. \quad (30)$$

Наприклад, для випадку кривої 2-го порядку $n = 2$ і рівняння (30) розпишеться у наступний спосіб:

$$\begin{aligned} X'AX &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2. \end{aligned}$$

$$X'b = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1x_1 + b_2x_2.$$

Таким чином, повертаючись до традиційних позначень для декартових координат, отримаємо

$$X'AX + 2X'b + c = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

що збігається рівнянням кривої 2-го порядку.

Матрична форма запису дозволяє порівняно легко одержати формули перетворення коефіцієнтів рівняння при переході до іншої декартової системи координат. Позначимо через X_0 – стовпчик з координат нового початку координат, а через Q – матрицю, стовпчики якої складаються з координат розкладання базисних векторів нової системи координат за векторами старого базису. Зв'язок між старими координатами X і новими координатами $\tilde{X}$ встановлюється формулою $X = X_0 + Q\tilde{X}$.

Лема 1. *Перетворення координат $X = X_0 + Q\tilde{X}$ переводить рівняння другого порядку $X'AX + 2X'b + c = 0$ в рівняння другого порядку*

$$\tilde{X}'\tilde{A}\tilde{X} + 2\tilde{X}'\tilde{b} + \tilde{c} = 0, \quad (31)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'(AX_0 + b), \quad \tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c.$$

Доведення. Виконаємо підстановку

$$\begin{aligned} (Q\tilde{X} + X_0)'A(Q\tilde{X} + X_0) + 2(Q\tilde{X} + X_0)'b + c = \\ (Q\tilde{X})'A(Q\tilde{X}) + X_0'AQ\tilde{X} + (Q\tilde{X})'AX_0 + X_0'AX_0 + 2(Q\tilde{X})'b + 2X_0'b + c = \\ \tilde{X}'(Q'AQ)\tilde{X} + X_0'AQ\tilde{X} + \tilde{X}'Q'AX_0 + 2\tilde{X}'Q'b + X_0'AX_0 + 2X_0'b + c. \end{aligned}$$

Для будь-яких стовпців X, Y справедлива тотожність $X'Y \equiv Y'X$. Матриця A симетрична (тобто $A' = A$), тому $X'(AY) = (AY)'X = Y'A'X = Y'AX$ і значить справедлива тотожність $X'AY \equiv Y'AX$. Як наслідок,

$$X_0'AQ\tilde{X} = (Q\tilde{X})'AX_0 = \tilde{X}'Q'AX_0.$$

Продовжимо обчислення

$$\begin{aligned} \tilde{X}'(Q'AQ)\tilde{X} + 2\tilde{X}'Q'AX_0 + 2\tilde{X}'Q'b + X_0'AX_0 + 2X_0'b + c = \\ \underbrace{\tilde{X}'(Q'AQ)\tilde{X}}_{\tilde{A}} + 2\tilde{X}'\underbrace{Q'(AX_0 + b)}_{\tilde{b}} + \underbrace{X_0'AX_0 + 2X_0'b + c}_{\tilde{c}}. \end{aligned}$$

що і було потрібно довести.

■

З доведеного твердження випливає, що в результаті перетворення координат рівняння квадрики може бути спрощене. Однак для реалізації такого плану спрощення нам будуть потрібні деякі відомості з лінійної алгебри, що мають геометричні інтерпретації.

Відображення $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ векторного простору $\mathbf{R}^n$ в себе називається лінійним оператором¹ якщо

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{X}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{Y})$$

для будь-яких векторів $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ і будь-яких дійсних чисел λ, μ .

Вектор $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ називається власним вектором оператора $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$ для деякого числа λ , що називається *власним числом* оператора $\mathcal{A}$. Знаходження власних чисел і відповідних власних векторів лінійного оператора пов'язане з розв'язанням певної системи однорідних рівнянь.

Кожному лінійному оператору $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ставиться у відповідність $n \times n$ матриця A , стовпці якої є коефіцієнтами розкладання векторів $\mathcal{A}\mathbf{e}_k$ ($k = 1, \dots, n$) за базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. А саме,

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \mathbf{e}_i = a_{1k}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nk}\mathbf{e}_n.$$

Стовпець $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ складає k -й стовпець матриці A . Побудована матриця A

називається **матрицею лінійного оператора** $\mathcal{A}$ відносно обраного базису. Дія лінійного оператора $\mathcal{A}$ на вектор $\mathbf{X} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ відбувається за формулою

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{X} &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = \sum_{k=1}^n x_k\mathcal{A}(\mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}x_k\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Видно, що координата з номером i вектору $\mathcal{A}\mathbf{X}$ обчислюється за правилом

$$(\mathcal{A}\mathbf{X})_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k.$$

Тобто, стовпчик складений з координат вектору $\mathcal{A}\mathbf{X}$ є результатом добутку матриці A на стовпчик, складений з координат вектору $\mathbf{X}$. Таким чином, маємо

¹Означення лінійного оператора в більш загальних випадках див. [3],[4]

відповідність

$$\mathbf{X} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X, \quad \mathcal{A}\mathbf{X} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX,$$

В такій інтерпретації власному вектору $\mathbf{X}$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає ненульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim AX = \lambda X \sim (A - \lambda E)X = 0,$$

де символом E позначена одинична матриця. Оскільки власний вектор $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, то число λ має бути таким, що визначник системи $\det(A - \lambda E) = 0$, бо інакше система має єдиний розв'язок і він складається з $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.
Многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

називається *характеристичним многочленом* для матриці A , його корені називаються *власними числами* як матриці A так і оператору $\mathcal{A}$.

У випадку симетричної матриці, для $n = 2$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A); \quad (32)$$

для $n = 3$

$$\begin{aligned} -\chi_A(\lambda) &= - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det(A) \end{aligned} \quad (33)$$

Сума елементів головної діагоналі матриці називається її слідом $trace_1(A)$. Сума мінорів елементів головної діагоналі взятих по два називається слідом другого порядку $trace_2(A)$. Сума мінорів елементів головної діагоналі взятих по три називається слідом третього порядку $trace_3(A)$ і так далі. Для матриці $n \times n$ з очевидністю $trace_n(A) = \det(A)$. Отже, назагал

$$(-1)^n \chi_A(\lambda) = \lambda^n - trace_1(A)\lambda^{n-1} + trace_2(A)\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \det(A).$$

Відповідно до основної теореми алгебри, рівняння $\chi_A(\lambda) = 0$ має рівно n назагал комплексних коренів. Але якщо A дійсна і симетрична, то всі її власні числа і власні вектори дійсні.

Якщо λ_0 одне з власних чисел, то ненульовий розв'язок системи

$$(A - \lambda_0 E)X = 0$$

складає стовпчик, що називається *власним вектором* матриці A . Власному вектору матриці A відповідає власний вектор оператору $\mathcal{A}$ за правилом

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Очевидно, що власний вектор визначений з точністю до ненульового коефіцієнта пропорційності: якщо $\mathbf{X}$ власний вектор оператору $\mathcal{A}$, то вектор $k\mathbf{X}$ ($k \neq 0$) також є власним вектором оператору $\mathcal{A}$. Отже, множина власних векторів утворює *інваріантний підпростір* оператору $\mathcal{A}$. Вимірність власного підпростору оператору $\mathcal{A}$, який відповідає власному числу λ , називається *геометричною кратністю* власного числа λ . Кратність λ як кореня характеристичного многочлену матриці називається його *алгебраїчною кратністю*. Оператор називається симетричним, якщо $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{A}\mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$. Симетричному оператору відповідає симетрична матриця ($A' = A$). Для симетричної матриці (симетричного оператора) алгебраїчна кратність власного числа дорівнює його геометричній кратності.

Інваріантні підпростори оператору $\mathcal{A}$ мають важливу геометричну властивість: *інваріантні підпростори, що відповідають різним власним значенням симетричного оператора взаємно ортогональні*. Цей факт означає, що в евклідовому просторі існує ортонормований базис $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$, що складений із власних векторів оператору $\mathcal{A}$, відносно якого матриця A цього оператора стає діагональною. Причому діагональними елементами матриці A є саме власні числа оператора.

Нехай $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – деякий ортонормований базис у E^n . Для векторів $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ з розкладання

$$\mathbf{X} = \sum x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{Y} = \sum y^i \mathbf{e}_i$$

впливає, що скалярному добутку векторів $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ відповідає матричний добуток $X'Y = Y'X$. Дійсно,

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i = (x^1, \dots, x^n) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = X'Y = Y'X.$$

З використанням оператору $\mathcal{A}$ рівняння квадрики (30) може бути подане в зрозумілій геометричній формі

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{b} \rangle + c = 0. \quad (34)$$

3 Спрощення рівняння квадрики вибором системи координат

Зауважимо, що матриця Q стовпці якої складені з координат власних векторів матриці A є матрицею переходу від заданого ортонормованого базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ до ортонормованого базису $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$, а значить є ортогональною матрицею. Отже, перетворення координат виду

$$X = Q\tilde{X} + X_0$$

є перетворенням декартових прямокутних координат і є композицією ортогонального перетворення Q осей координат і паралельного переносу початку координат в точку з радіус-вектором $\mathbf{X}_0$.

Наступне твердження зводить до *квазіканонічного*² вигляду рівняння будь-якої квадрики певним стандартним перетворенням координат.

Лема 2. Нехай рівняння $\Phi(\mathbf{X}) = \langle A\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{b} \rangle + c = 0$ задає квадрику в декартовій прямокутній системі координат $(x_1, \dots, x_n)$. Існує ортонормований базис $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ і вектор паралельного переносу $\mathbf{p}$, такі, що перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{x}_2 = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + p_2, \\ \dots \\ \tilde{x}_n = \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{X} \rangle + p_n, \end{cases} \sim \tilde{X} = Q'X + p,$$

зводить рівняння квадрики до виду

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i = 0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle \tilde{x}_i + c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 = 0. \quad (35)$$

Більш докладно,

- $Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$ – матриця, стовпчики якої складаються з координат ортонормованих власних векторів матриці A ;
- $p_i = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle}{\lambda_i}$ якщо $\lambda_i \neq 0$ і $p_i = 0$ якщо $\lambda_i = 0$ ($i=1, \dots, n$).

Доведення. Нехай $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ задана декартова прямокутна система координат і нехай $(\tilde{O}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ нова прямокутна декартова система координат. Матриця Q , стовпчики якої складені з координат векторів $\mathbf{q}_i$ ($i = 1, \dots, n$), є ортогональною матрицею перетворення базисів координатних систем, а координати точок пов'язані перетворенням координат

$$X = Q\tilde{X} + X_0$$

²Тобто, майже канонічного

з матрицею Q і паралельним переносом на вектор $\mathbf{X}_0$. Обернене перетворення має вираз

$$\tilde{X} = Q'(X - X_0) = Q'X - Q'X_0 = Q'X + p,$$

де ми поклали $p = -Q'X_0$. Зауважимо, що стовпчик p складається із скалярних добутоків $p_i = \langle \mathbf{q}_i, -\mathbf{X}_0 \rangle$, а значить вектор

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{q}_i, -\mathbf{X}_0 \rangle \mathbf{q}_i$$

є розкладанням вектору $-\mathbf{X}_0$ за новим базисом. Відповідно, вектор

$$\mathbf{X}_0 = -\sum_{i=1}^n p_i \mathbf{q}_i$$

є вектором паралельного переносу початку координат *відносно старої координатної системи*.

За лемою 1, перетворення координат $X = Q\tilde{X} + X_0$ зводить рівняння квадрики до такого виду, що матричні компоненти рівняння квадрики в нових координатах мають вирази

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'(AX_0 + b), \quad \tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c.$$

Позначимо через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ власні числа оператора $\mathcal{A}$, а через $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ — відповідні ортонормовані власні вектори і складемо матрицю $Q = [q_1, \dots, q_n]$, стовпчики якої складені з координат власних векторів. Матриця Q є ортогональною і визначає перетворення від базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ до базису $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$. Пов'яжемо з базисом $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ нову декартову прямокутну систему координат $(\tilde{O}; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ з поки що невизначеним початком координат $\tilde{O}$.

Позначимо через E_λ діагональну матрицю з власними числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на головній діагоналі. Покажемо, що в новій координатній системі $\tilde{A} = E_\lambda$, тобто що $Q'AQ = E_\lambda$. Ця рівність у свою чергу еквівалентна рівності $AQ = QE_\lambda$ яка легко перевіряється. Дійсно,

$$QE_\lambda = [\lambda_1 q_1, \dots, \lambda_n q_n], \quad AQ = [Aq_1, \dots, Aq_n] = [\lambda_1 q_1, \dots, \lambda_n q_n].$$

Для прикладу,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} q_{11}\lambda_1 & q_{12}\lambda_2 \\ q_{21}\lambda_1 & q_{22}\lambda_2 \end{pmatrix} &= \left[\lambda_1 \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \right] = [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2]. \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \right] = \\ &= [Aq_1, Aq_2] = [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2]. \end{aligned}$$

Отже, $Q'AQ = E_\lambda$ і квадратична частина рівняння набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2 = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2.$$

Тепер розглянемо $\tilde{b}$. Оскільки $p = -Q'X_0$, то $X_0 = -Qp$. Тому

$$\tilde{b} = Q'AX_0 + Q'b = -(Q'AQ)p + Q'b = -E_\lambda p + h,$$

де ми поклали $h = Q'b$. Отже, маємо

$$\tilde{b}_i = -\lambda_i p_i + h_i.$$

Величини h_i мають прозоре геометричне тлумачення. Визначимо вектор лінійної частини рівняння формулою

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n.$$

Зауважимо, що *рядки* матриці Q' складаються з координат векторів $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ і тому елементи стовпчика h є послідовно скалярними добутками векторів $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ на вектор $\mathbf{b}$. Таким чином, $h_i = \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b} \rangle$ і вектор

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b} \rangle \mathbf{q}_i$$

є тим самим вектором $\mathbf{b}$, але розкладеним за новим базисом $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$.

До цього моменту паралельний перенос початку координат був невизначений. Обравши

$$p_i = \frac{h_i}{\lambda_i} = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle}{\lambda_i} \quad (\lambda_i \neq 0) \quad (36)$$

ми максимально спрощуємо лінійну частину рівняння квадрики в новій системі координат і вона набуває вигляду

$$2 \sum_{i:\lambda_i=0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle \tilde{x}_i.$$

Таким чином, рівняння квадрики спрощується до

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i=0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle \tilde{x}_i + \tilde{c} = 0. \quad (37)$$

Для вільного члену маємо (підставляючи $X_0 = -Qp$, $h = Q'b$)

$$\tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c = p'Q'AQp - 2p'Q'b + c = p'E_\lambda p - 2p'h + c.$$

Тепер зауважимо, що поклавши $p_i = 0$ у всіх випадках, коли $\lambda_i = 0$ ми остаточно визначаємо паралельний перенос, який максимально спрощує *вільний член* рівняння. Дійсно,

$$p'E_\lambda p = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \frac{h_i^2}{\lambda_i^2} = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \frac{h_i^2}{\lambda_i} = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \frac{h_i}{\lambda_i} h_i = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} p_i h_i.$$

Тепер зауважимо, що

$$p'h = \sum_{i=1}^n p_i h_i = \sum_{i:p_i \neq 0} p_i h_i + \sum_{i:p_i=0} p_i h_i = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} p_i h_i.$$

Тому остаточно

$$\tilde{c} = c - p'E_\lambda p = c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2.$$

Цей же вираз для вільного члену можна отримати із інших, навіть простіших міркувань. В рівнянні (37) повернемося до старої системи координат, використовуючи формули перетворення координат, а саме

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i (\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{X} \rangle + p_i)^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i=0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle (\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{X} \rangle + p_i) + \tilde{c} = 0,$$

і зауважимо, що в старій системі координат $\Phi(\mathbf{0}) = c$ – вільному члену рівняння. З іншого боку маємо

$$\Phi(\mathbf{0}) = \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i=0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle p_i + \tilde{c} = c$$

Координати p_i в першій сумі визначені формулами (36), в той час як в другій сумі координати p_i довільні. Максимально спрощений і однозначний вираз для $\tilde{c}$ отримаємо поклавши $p_i = 0$ у всіх формулах перетворення координат, що відповідають $\lambda_i = 0$. В такому разі

$$\tilde{c} = c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2,$$

що й завершує доведення. ■

3.1 Класифікаційна теорема для кривих 2 порядку

Теорема 1. *Рівняння будь-якої кривої 2-го порядку*

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{b} \rangle + c = 0$$

ортогональним перетворенням системи координат може бути зведене до однієї з 9 перелічених канонічних форм. Тим самим, будь-яка крива 2-го порядку є однією з перелічених 9 кривих.

Доведення. Здійснимо перетворення координат із леми 2 і зведемо наше рівняння до виду

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i=0} h_i \tilde{x}_i + c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 = 0, \quad (*)$$

де $h_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle$ – координати розкладання вектору $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$.

Занумеруємо власні числа у такий спосіб, що $\lambda_1 \neq 0$. Більше того, домножуючи при необхідності отримане рівняння на (-1) завжди можемо вважати, що $\lambda_1 > 0$.

Далі можливі 2 варіанти: або рівняння (*) містить лінійну частину, або вона відсутня. Для спрощення розглядів, повернемося до традиційних позначень:

$$x_1 \rightarrow x, \quad x_2 \rightarrow y.$$

Припустимо, рівняння (*) **не містить лінійної частини**. В такому разі спрощене рівняння отримує вигляд

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 = 0.$$

Зауважимо, що для будь-якої точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, що лежить на квадриці, точка $(-\tilde{x}_1, -\tilde{x}_2, \dots, -\tilde{x}_n)$ також лежить на цій же квадриці. Це означає, що *початок нової системи координат є центром симетрії квадрики*. Розглянемо можливі випадки.

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \neq 0$. Тоді $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle$, $p_2 = \frac{1}{\lambda_2} \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle$ і рівняння (*) прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

Вектор $\mathbf{p}$ визначений єдиним чином. Крива має єдиний центр симетрії. Такі криві називаються *центральними*. У залежності від співвідношення знаків, одержуємо перелік центральних кривих

λ_1	λ_2	$\tilde{c}$	Крива
+	+	+	еліпс уявний
+	+	0	пара уявних прямих, що перетинаються в точці $(0, 0)$
+	+	–	еліпс дійсний
+	–	$\pm$	гіпербола
+	–	0	пара дійсних прямих, що перетинаються

Отже, маємо 5 центральних кривих. *Центр кривої знаходиться в точці*

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = -(p_1 \mathbf{q}_1 + p_2 \mathbf{q}_2).$$

Перетворення координат визначається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + p_2. \end{cases}$$

- $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad h_2 = 0$. Тоді $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle$, $p_2 = 0$ і рівняння (*) прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

У залежності від співвідношення знаків, одержуємо наступний перелік пар верхонь.

λ_1	$\tilde{c}$	Крива
+	+	пара уявних паралельних прямих
+	0	пара прямих, що зливаються
+	—	пара дійсних паралельних прямих

У переліку 3 криві, що мають пряму або площину центрів симетрії. Перетворення координат визначається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

Припустимо, рівняння (*) **містить лінійну частину**. Це означає, що після перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

де $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle$, рівняння (*) має вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \tilde{y} + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2}_{\tilde{c}} = 0,$$

або

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \left(\tilde{y} + \frac{1}{2h_2} (c - \lambda_1 p_1^2) \right) = 0.$$

Скорегуємо перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2h_2} (c - \lambda_1 p_1^2), \end{cases}$$

з метою "знищення" вільного члену. Відносно такої системи координат отримуємо рівняння

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \tilde{y} = 0.$$

Знайдена крива є параболою. Отже загалом маємо 9 кривих.

■

3.1.1 Алгоритм зведення до канонічного виду рівняння кривої 2 порядку

Класифікаційна теорема 1 містить ефективний алгоритм зведення рівняння кривої до канонічного виду. Щоб звести рівняння кривої

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

слід виконати наступні дії:

- виписати матричні компоненти рівняння

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad c;$$

- знайти власні числа λ_1, λ_2 і відповідні ортонормовані власні вектори $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$;
- знайти коефіцієнти розкладання h_i вектору $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, тобто знайти $h_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle$ ($i = 1, 2$).

Перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + p_2 \end{cases}$$

зводить рівняння кривої до найпростішого виду наступним вибором параметрів p_1, p_2 паралельного переносу

λ_1	λ_2	h_2	p_1	p_2	Найпростіше рівняння
$\neq 0$	$\neq 0$		$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2}$	$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + c - (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2) = 0$
$\neq 0$	0	0	$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = 0$	$\lambda_1 \tilde{x}^2 + c - \lambda_1 p_1^2 = 0$
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = \frac{1}{2h_2}(c - \lambda_1 p_1^2)$	$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \tilde{y} = 0$

При цьому початок нової системи координат знаходиться в точці

$$\mathbf{X}_0 = -p_1 \mathbf{q}_1 - p_2 \mathbf{q}_2.$$

Приклад 3.1. Звести до канонічного виду рівняння кривої 2-го порядку

$$29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$$

і знайти відповідне перетворення координат.

Розв'язок. Сформуємо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 29 & -12 \\ -12 & 36 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 41 \\ -48 \end{pmatrix}, \quad c = -91.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 65\lambda + 900 = 0$$

і знайдемо його корені $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 45$. Знайдемо власні вектори матриці A :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо вектор $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$h_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = 4, \quad h_2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = -63.$$

Знайдемо паралельний перенос

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2} = -\frac{7}{5}.$$

Перетворення координат отримає вигляд

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{4x + 3y}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4x + 3y + 1}{5}, \\ \tilde{y} = \frac{-3x + 4y}{5} - \frac{7}{5} = \frac{-3x + 4y - 7}{5}. \end{cases}$$

Випишемо найпростіше рівняння:

$$20\tilde{x}^2 + 45\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0.$$

Параметр $\tilde{c} = -91 - 20\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 45\left(-\frac{7}{5}\right)^2 = -180$. Отже, канонічне рівняння

$$20\tilde{x}^2 + 45\tilde{y}^2 = 180 \quad \sim \quad \frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$$

є рівнянням еліпсу з напівосями $a = 3, b = 2$ центр якого знаходиться в точці

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = -\frac{1}{5}\mathbf{q}_1 + \frac{7}{5}\mathbf{q}_2 = \frac{1}{25} \left(-\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нова вісь $\tilde{O}\tilde{y}$ задається рівнянням $\tilde{x} = 0$, а нова вісь $\tilde{O}\tilde{x}$ задається рівнянням $\tilde{y} = 0$. Отже,

$$\tilde{O}\tilde{x} : -3x + 4y - 7 = 0, \quad \tilde{O}\tilde{y} : 4x + 3y + 1 = 0.$$

Легко перевірити, що точка $(-1, 1)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0, \\ -3x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

■

Приклад 3.2. Звести до канонічного виду рівняння кривої 2-го порядку

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

і знайти відповідне перетворення координат.

Розв'язок. Сформуємо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = -36.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

і знайдемо його корені $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Знайдемо власні вектори матриці A :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо вектор $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$h_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = \frac{20}{\sqrt{5}}, \quad h_2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = -\frac{10}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо координати паралельного переносу

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{5}{\sqrt{5}}, \quad p_2 = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

і перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{x + 2y + 5}{\sqrt{5}}, \\ \tilde{y} = \frac{-2x + y}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{-2x + y + 10}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Випишемо найпростіше рівняння:

$$4\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 36 - (4(\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^2) = 0 \quad \sim \quad 4\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 36 = 0.$$

Крива є гіперболою

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} - \frac{\tilde{y}^2}{36} = 1$$

з напівосями $a = 3, b = 6$.

Початок нової системи координат лежить в центрі симетрії кривої

$$X_0 = -\frac{5}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{10}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},$$

що збігається з точкою перетину нових осей координат.

Асимптоти гіперболи $\tilde{y} = \pm\frac{6}{3}\tilde{x}$ в старій системі координат отримують рівняння

$$-2x + y + 10 = \pm 2(x + 2y + 5).$$

■

Приклад 3.3. Звести до канонічного виду рівняння кривої 2-го порядку

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$$

і знайти відповідне перетворення координат.

Розв'язок. Сформуємо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad c = -2.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 13\lambda = 0$$

і знайдемо його корені $\lambda_1 = 13, \quad \lambda_2 = 0$. Знайдемо власні вектори матриці A :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо вектор $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$h_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \quad h_2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = 0.$$

Знайдемо координати паралельного переносу

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = -\frac{1}{2\sqrt{13}}, \quad p_2 = 0$$

і перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2x - 3y}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{13}}\right) = \frac{2x - 3y - 1/2}{\sqrt{13}}, \\ \tilde{y} = \frac{3x + 2y}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Випишемо канонічне рівняння:

$$13\tilde{x}^2 + (-2) - 13\left(-\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2 = 0 \quad \sim \quad 13\tilde{x}^2 - 9/4 = 0 \quad \sim \quad \tilde{x} = \pm \frac{3}{2\sqrt{13}}$$

Це пара паралельних прямих, що задаються у старій системі координат рівняннями

$$\tilde{x} = -\frac{3}{2\sqrt{13}} \sim 2x - 3y + 1 = 0, \quad \tilde{x} = \frac{3}{2\sqrt{13}} \sim 2x - 3y - 2 = 0.$$

Неважко перевірити, що початкове рівняння розкладається на множники

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = (2x - 3y + 1)(2x - 3y - 2).$$

Початок нової системи координат лежить в точці

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = p_1 \mathbf{q}_1 = \frac{1}{2 \cdot 13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix},$$

що є точкою перетину нових осей координат $3x + 2y = 0$ і $2x - 3y - 1/2 = 0$.

■

Приклад 3.4. Звести до канонічного виду рівняння кривої 2-го порядку

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$$

і знайти відповідне перетворення координат.

Розв'язок. Сформуємо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 55 \end{pmatrix}, \quad c = -50.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0$$

і знайдемо його корені $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$. Знайдемо власні вектори матриці A :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо вектор $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$:

$$h_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = -50, \quad h_2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = 25.$$

Оскільки $h_2 = 25 \neq 0$, то координати паралельного переносу отримають вираз

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = -2, \quad p_2 = \frac{1}{2h_2}(c - \lambda_1 p_1^2) = \frac{1}{50}(-50 - 25 \cdot 4) = -3.$$

Остаточне найпростіше рівняння прийме вигляд

$$25\tilde{x}^2 + 2 \cdot 25\tilde{y} = 0 \quad \sim \quad \tilde{x}^2 = -2\tilde{y},$$

а перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{3x - 4y}{5} - 2, \\ \tilde{y} = \frac{4x + 3y}{5} - 3. \end{cases}$$

Нова вісь $\tilde{O}\tilde{y}$ задається рівнянням $\tilde{x} = 0$, а нова вісь $\tilde{O}\tilde{x}$ задається рівнянням $\tilde{y} = 0$. Отже,

$$\tilde{O}\tilde{x} : 4x + 3y - 15 = 0, \quad \tilde{O}\tilde{y} : 3x - 4y - 10 = 0.$$

Вершина параболи лежить в початку нової системи координат, тобто в точці

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = 2\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2 = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що точка $(18/5, 1/5)$ дійсно лежить в перетині прямих $4x + 3y - 15 = 0$ і $3x - 4y - 10 = 0$.

■

3.2 Класифікаційна теорема для поверхонь 2 порядку

Теорема 2. *Рівняння будь-якої поверхні 2-го порядку*

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{b} \rangle + c = 0$$

ортогональним перетворенням системи координат може бути зведене до однієї з перелічених 17 канонічних форм. Тим самим, будь-яка поверхня 2-го порядку є однією з перелічених 17 поверхонь.

Доведення. Здійснимо перетворення координат із леми 2 і зведемо наше рівняння до виду

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i = 0} h_i \tilde{x}_i + c - \sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2 = 0, \quad (**)$$

де ми поклали для скорочення $h_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle$ – координати розкладання вектору $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

Подібно до випадку кривої 2 порядку, *занумеруємо власні числа у такий спосіб, що $\lambda_1 \neq 0$. Більше того, домножуючи при необхідності отримане рівняння на (-1) завжди можемо вважати, що $\lambda_1 > 0$.*

Далі можливі 2 варіанти: або рівняння $(**)$ містить лінійну частину, або вона відсутня.

Для спрощення розглядів, повернемося до традиційних позначень:

$$x_1 \rightarrow x, \quad x_2 \rightarrow y, \quad x_3 \rightarrow z.$$

Припустимо, рівняння $(**)$ **не містить лінійної частини**. Подібно до кривої 2 порядку, *відсутність лінійної частини рівняння означає, що початок нової системи координат розміщується в центрі симетрії поверхні*. Проведемо аналіз можливих випадків.

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тоді $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, p_2 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, p_3 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle$ і рівняння $(**)$ прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2 - \lambda_3 p_3^2}_{\tilde{c}} = 0$$

Вектор $\mathbf{p}$ визначений єдиним чином. Поверхня має єдиний центр симетрії. Такі поверхні називаються *центральними*. У залежності від співвідношення знаків, одержуємо перелік центральних поверхонь

λ_1	λ_2	λ_3	$\tilde{c}$	Поверхня
+	+	+	+	еліпсоїд уявний
+	+	+	0	конус уявний
+	+	+	–	еліпсоїд
+	+	–	+	двопорожнинний гіперboloїд
+	+	–	0	конус
+	+	–	–	однопорожнинний гіперboloїд

Отже, маємо 6 центральних поверхонь. *Центр поверхні знаходиться в точці*

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = -(p_1 \mathbf{q}_1 + p_2 \mathbf{q}_2 + p_3 \mathbf{q}_3).$$

Перетворення координат задається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_2} \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_3} \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{b} \rangle. \end{cases}$$

- $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad h_3 = 0$. Тоді $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \quad p_2 = \frac{1}{\lambda_2} \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle, \quad p_3 = 0$ і рівняння (**) прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

У залежності від співвідношення знаків, одержуємо наступний перелік поверхонь.

λ_1	λ_2	$\tilde{c}$	Поверхня
+	+	+	циліндр еліптичний уявний
+	+	0	пара уявних площин, що перетинаються
+	+	−	циліндр еліптичний
+	−	$\pm$	циліндр гіперболічний
+	−	0	пара дійсних площин, що перетинаються

У переліку 5 поверхонь, що мають пряму центрів симетрії. Перетворення координат задається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_2} \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

- $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad h_2 = h_3 = 0$. Тоді $p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0$ і рівняння (**) прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

У залежності від співвідношення знаків, одержуємо наступний перелік поверхонь.

λ_1	$\tilde{c}$	Поверхня
+	+	пара паралельних уявних площин
+	0	пара площин, що збігаються
+	−	пара паралельних дійсних площин

У переліку 3 поверхні, що мають площину центрів симетрії. Перетворення координат задається формулами

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

Припустимо, рівняння $(**)$ містить лінійну частину. Розглянемо можливі випадки.

- $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad h_3 \neq 0$. В такому разі

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \quad p_2 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \quad p_3 = 0,$$

і після перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + p_2, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

рівняння $(**)$ отримає вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3 \tilde{z} + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2}_{\tilde{c}} = 0$$

Скорегуємо перетворення координат з метою "знищення" вільного члену рівняння, а саме покладемо

$$p_3 = \frac{1}{2h_3} (c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2).$$

Тоді перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_2} \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2h_3} (c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2) \end{cases}$$

зводить рівняння поверхні до виду

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3 \tilde{z} = 0.$$

У залежності від співвідношення знаків, одержуємо

λ_1	λ_2	Поверхня
+	+	Еліптичний параболоїд
+	—	Гіперболічний параболоїд

- $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad h_2^2 + h_3^2 \neq 0$. В такому разі

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0$$

і після перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

рівняння (**) прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \tilde{y} + 2h_3 \tilde{z} + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

Вектори $\mathbf{q}_2$ і $\mathbf{q}_3$ є власними векторами, що відповідають кратному власному значенню $\lambda = 0$ і можуть бути обрані довільно в підпросторі, що ортогональний вектору $\mathbf{q}_1$. Умова $h_2^2 + h_3^2 \neq 0$ означає, що вектор $\mathbf{b}$ має ненульову проєкцію на цей підпростір. Визначимо новий базис, прийнявши

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \frac{\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1}{|\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1|}, \quad \hat{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{q}_1 \times \hat{\mathbf{q}}_2.$$

Розкладання вектору $\mathbf{b}$ за новим базисом отримає вираз

$$\mathbf{b} = h_1 \mathbf{q}_1 + \hat{h}_2^2 \hat{\mathbf{q}}_2 + 0 \hat{\mathbf{q}}_3 = h_1 \mathbf{q}_1 + \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \hat{\mathbf{q}}_2.$$

Перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \hat{\mathbf{q}}_2, \mathbf{X} \rangle, \\ \tilde{z} = \langle \hat{\mathbf{q}}_3, \mathbf{X} \rangle, \end{cases}$$

зводить рівняння до виду

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2\hat{h}_2 \tilde{y} + \underbrace{c - \lambda_1 p_1^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

Скорегуємо перетворення координат з метою "знищення" вільного члену рівняння, а саме

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda_1} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle, \\ \tilde{y} = \langle \hat{\mathbf{q}}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2\hat{h}_2} (c - \lambda_1 p_1^2), \\ \tilde{z} = \langle \hat{\mathbf{q}}_3, \mathbf{X} \rangle. \end{cases}$$

Отримаємо рівняння

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2\hat{h}_2 \tilde{y} = 0.$$

Це рівняння параболічного циліндру.

Таким чином виконано аналіз всіх можливих випадків. В результаті знайдено всі 17 типів канонічних форм рівняння поверхні 2 порядку і відповідні канонічні поверхні.

■

3.2.1 Алгоритм зведення до канонічного виду рівняння поверхні 2 порядку

Класифікаційна теорема 2 також містить ефективний алгоритм зведення рівняння поверхні до канонічного виду. Щоб звести рівняння поверхні

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

слід виконати наступні дії:

- виписати матричні компоненти рівняння

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c;$$

- знайти власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і відповідні ортонормовані власні вектори $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$;
- знайти коефіцієнти розкладання h_i вектору $\mathbf{b}$ за базисом $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, тобто знайти $h_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle$ ($i = 1, 2, 3$).

Перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + p_1, \\ \tilde{y} = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{X} \rangle + p_2, \\ \tilde{z} = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{X} \rangle + p_3 \end{cases}$$

зводить рівняння поверхні до квазіканонічного виду наступним вибором параметрів p_1, p_2, p_3 паралельного переносу

- Параметри паралельного переносу

λ_1	λ_2	λ_3	h_2	h_3	p_1	p_2	p_3
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$			$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2}$	$p_3 = \frac{h_3}{\lambda_3}$

Найпростіше рівняння $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z} + c - (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^2) = 0$.

- Параметри паралельного переносу

λ_1	λ_2	λ_3	h_2	h_3	p_1	p_2	p_3
$\neq 0$	$\neq 0$	0		0	$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2}$	$p_3 = 0$

Найпростіше рівняння $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + c - (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2) = 0$.

- Параметри паралельного переносу

λ_1	λ_2	λ_3	h_2	h_3	p_1	p_2	p_3
$\neq 0$	0	0	0	0	$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = 0$	$p_3 = 0$

Найпростіше рівняння $\lambda_1 \tilde{x}^2 + c - \lambda_1 p_1^2 = 0$.

- Параметри паралельного переносу

λ_1	λ_2	λ_3	h_2	h_3	p_1	p_2	p_3
$\neq 0$	$\neq 0$	0		$\neq 0$	$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$	$p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2}$	$p_3 = \frac{1}{2h_3}(c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2)$

Найпростіше рівняння $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3 \tilde{z} = 0$.

- Особливий випадок

λ_1	λ_2	λ_3	$h_2^2 + h_3^2$
$\neq 0$	0	0	$\neq 0$

Слід виконати наступні уточнення:

базис $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1$, $\hat{\mathbf{q}}_2 = \frac{\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1}{|\mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1|}$, $\hat{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$;

параметри $\hat{h}_2 = \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \neq 0$, $\hat{h}_3 = 0$;

параметри паралельного переносу $p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}$, $p_2 = \frac{1}{2\hat{h}_2}(c - \lambda_1 p_1^2)$, $p_3 = 0$.

Перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{X} \rangle + \frac{h_1}{\lambda_1}, \\ \tilde{y} = \langle \hat{\mathbf{q}}_2, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{2\hat{h}_2}(c - \lambda_1 p_1^2), \\ \tilde{z} = \langle \hat{\mathbf{q}}_3, \mathbf{X} \rangle \end{cases}$$

Найпростіше рівняння $\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2\hat{h}_2 \tilde{y} = 0$ є рівнянням параболічного циліндру.

У всіх випадках, окрім параболічного циліндру, початок нової системи координат знаходиться в точці $\mathbf{X}_0 = -(p_1 \mathbf{q}_1 + p_2 \mathbf{q}_2 + p_3 \mathbf{q}_3)$ Для параболічного циліндру $\mathbf{X}_0 = -(p_1 \mathbf{q}_1 + p_2 \hat{\mathbf{q}}_2)$.

Приклад 3.5. Звести до канонічного виду і знайти відповідне претворення координат для рівняння

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad c = 30.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - (7+6+5)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Власні вектори

$$\mathbf{V}_1 = \{1, 2, 2\}, \quad \mathbf{V}_2 = \{2, 1, -2\}, \quad \mathbf{V}_3 = \{2, -2, 1\}.$$

таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо за цим базисом вектор $\mathbf{b}$:

$$h_1 = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle = -3, \quad h_2 = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle = -12, \quad h_3 = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{b} \rangle = 9.$$

Знайдемо координати паралельного переносу

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = -1, \quad p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2} = -2, \quad p_3 = \frac{h_3}{\lambda_3} = 1.$$

Перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x + 2y + 2z}{3} - 1 = \frac{x + 2y + 2z - 3}{3} \\ \tilde{y} = \frac{2x + y - 2z}{3} - 2 = \frac{2x + y - 2z - 6}{3}, \\ \tilde{z} = \frac{2x - 2y + z}{3} + 1 = \frac{2x - 2y + z + 3}{3}. \end{cases}$$

Знайдемо новий вільний член рівняння $\tilde{c}$:

$$c - (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^2) = 30 - (3 + 24 + 9) = -6.$$

Отже маємо найпростіше рівняння

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 - 6 = 0.$$

Канонічне рівняння отримає вигляд

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{1} + \frac{\tilde{z}^2}{2/3} = 1.$$

Поверхня є еліпсоїдом з напівосями $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2/3}$. Площини

$$x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 2x + y - 2z - 6 = 0, \quad 2x - 2y + z + 3 = 0$$

є площинами симетрії. Радіус-вектор центру симетрії в початковій системі координат є вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= -(p_1 \mathbf{q}_1 + p_2 \mathbf{q}_2 + p_3 \mathbf{q}_3) = \\ &= -\frac{1}{3} \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко перевірити, що точка з координатами $(1, 2, -1)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + y - 2z - 6 = 0, \\ 2x - 2y + z + 3 = 0, \end{cases}$$

тобто є точкою перетину площин симетрії.

■

Приклад 3.6. Звести до канонічного виду і знайти відповідне претворення координат для рівняння

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz - 27 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -27.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - (5 + 8 + 5)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$. Власні вектори, що відповідають кратному власному значенню 9 утворюють двовимірний підпростір, що асоціюється з площиною

$$-4x + 2y - 4z = 0 \quad \sim \quad 2x - y + 2z = 0.$$

Вектор нормалі цієї площини відповідає третьому власному числу $\lambda_3 = 0$, тобто

$$\mathbf{V}_3 = \{2, -1, 2\}.$$

В якості векторів $\mathbf{V}_1$ і $\mathbf{V}_2$ можна обрати будь-які, що ортогональні $\mathbf{V}_3$. Наприклад, $\mathbf{V}_1 = \{0, 2, 1\}$. Тоді $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_1 = \{-5, -2, 4\}$. Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, тому $\mathbf{h} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ і квазіканонічне рівняння отримає вигляд

$$9\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - 27 = 0 \quad \sim \quad \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 3.$$

Це рівняння кругового циліндру з радіусом $R = \sqrt{3}$. Перетворення координат запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2y + z}{\sqrt{5}} \\ \tilde{y} = \frac{-5x - 2y + 4z}{\sqrt{45}} \\ \tilde{z} = \frac{2x - y + 2z}{3}. \end{cases}$$

Зауважимо, що вид перетворення неоднозначний і залежить від вибору базиса у власному підпросторі, що відповідає кратному власному значенню.

■

Приклад 3.7. Звести до канонічного виду і знайти відповідне претворення координат для рівняння

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c = 45.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - (4 + 1 + 4)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Власні вектори, що відповідають кратному власному значенню $\lambda = 0$ утворюють двовимірний підпростір, що асоціюється з площиною

$$2x - y - 2z = 0.$$

Вектор нормалі цієї площини відповідає власному значенню $\lambda_1 = 9$. Отже $\mathbf{V}_1 = \{2, -1, -2\}$. В якості векторів $\mathbf{V}_2$ і $\mathbf{V}_3$ можна обрати будь-які, що ортогональні $\mathbf{V}_1$. Наприклад, $\mathbf{V}_2 = \{2, 2, 1\}$. Тоді

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \{3, -6, 6\} \sim \{1, -2, 2\}.$$

Таким чином,

$$q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо за цим базисом вектор $\mathbf{b}$:

$$h_1 = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle = -15, \quad h_2 = \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle = -6, \quad h_3 = \langle \mathbf{q}_3, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

Оскільки $h_3 = 0$, уточнення базису не потрібне. Таким чином, найпростіше рівняння запишеться у вигляді

$$9\tilde{x}^2 + 2(-6)\tilde{y} = 0 \quad \sim \quad 3\tilde{x}^2 = 4\tilde{y}.$$

Поверхня є параболічним циліндром.

Координати уточненого паралельного переносу

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{-15}{9} = -\frac{5}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{2h_2}(c - \lambda_1 p_1^2) = \frac{1}{-12}(45 - 9(5/3)^2) = -\frac{5}{3}, \quad p_3 = 0.$$

Перетворення координат прийме вигляд

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2x - y - 2z}{3} + \frac{-5}{3} = \frac{2x - y - 2z - 5}{3}, \\ \tilde{y} = \frac{2x + 2y + z}{3} + \frac{-5}{3} = \frac{2x + 2y + z - 5}{3}, \\ \tilde{z} = \frac{x - 2y + 2z}{3}. \end{cases}$$

Для перевірки можна підставити перетворення координат у канонічне рівняння і розкрити дужки.

■

Приклад 3.8. Звести до канонічного виду і знайти відповідне перетворення координат для рівняння

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy - 16xz + 20yz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = -90.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - (2-7-4)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 - 162\lambda = 0.$$

Власні числа $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -18, \lambda_3 = 0$. Власні вектори

$$q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо за цим базисом вектор **b**.

$$h_1 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = -18, \quad h_2 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = 18, \quad h_3 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_3 \rangle = 18$$

Обчислимо паралельний перенос

$$p_1 = \frac{h_1}{\lambda_1} = -2, \quad p_2 = \frac{h_2}{\lambda_2} = -1, \quad p_3 = \frac{1}{2h_3}(c - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2) = \frac{1}{2 \cdot 18}(-108) = -3.$$

Отже, перетворення

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{-2x + y + 2z}{3} - 2 = \frac{-2x + y + 2z - 6}{3}, \\ \tilde{y} = \frac{x - 2y + 2z}{3} - 1 = \frac{x - 2y + 2z - 3}{3}, \\ \tilde{z} = \frac{2x + 2y + z}{3} - 3 = \frac{2x + 2y + z - 9}{3}. \end{cases}$$

зводить рівняння до виду

$$9\tilde{x}^2 - 18\tilde{y}^2 + 36\tilde{z} = 0 \quad \sim \quad \tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 + 4\tilde{z} = 0.$$

Вершина параболоїду знаходиться в точці

$$\mathbf{X}_0 = -\mathbf{p} = \frac{1}{3} \left(2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

■

3.3 Класифікація евклідових квадрик у E^n

Доведення леми 2 не містить інформації про вимірність простору, у якому розглядається квадрика. Тому її результат дозволяє привести до канонічних форм рівняння квадрики в евклідовому просторі вимірності $n > 3$. Для такого випадку немає детальної класифікації рівнянь, але вирізняються де-кілька класів. Нагадаємо, що *індексом інерції* квадратичної форми називається кількість **від’ємних** коефіцієнтів після зведення форми до суми квадратів. Індекс інерції не залежить від способу зведення. Будемо позначати індекс інерції символом ind .

Теорема 3. Рівняння будь-якої квадрики $\langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{b} \rangle + c = 0$ в евклідовому просторі E^n ($n \geq 4$) ортогональним перетворенням системи координат може бути зведене до одного з наступних типів

- не вироджений еліптичний тип (n -еліпсоїд)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2 + \tilde{c} = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n), ind = 0 \vee ind = n, \quad \tilde{c} \neq 0;$$

- не вироджений гіперболічний тип (n -гіперболоїд)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2 + \tilde{c} = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n), \quad 0 < ind < n, \quad \tilde{c} \neq 0;$$

- не вироджений конічний тип (n -конус)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2 = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n);$$

- не вироджений параболічний тип (n -параболоїд)

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2h\tilde{x}_{m+1} = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, m < n);$$

- вироджений тип (циліндри над квадриками в просторах меншої вимірності)

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{x}_i^2 + \tilde{c} = 0 \quad (\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, m < n).$$

Доведення. Перетворенням координат з леми 2 зведемо рівняння квадрики до вигляду

$$\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i:\lambda_i = 0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle \tilde{x}_i + c - \underbrace{\sum_{i:\lambda_i \neq 0} \lambda_i p_i^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

Якщо всі $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$), то рівняння не містить лінійної частини. Якщо на доданок $ind = 0$ (або $ind = n$), то всі коефіцієнти квадратичної частини рівняння мають один і той же знак. Тож рівняння визначає невироджену квадрик еліптичного типу при $\tilde{c} \neq 0$ і конічного типу при $\tilde{c} = 0$.

Нехай певна кількість власних значень матриці A дорівнює 0, скажімо $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Позначимо через L_0 власний підпростір вимірності $n - m$, що відповідає нульовому власному значенню. Розглянемо проєкцію $\mathbf{b}_0 = \Pi_{\downarrow L_0} \mathbf{b}$. Якщо $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, то спрощене рівняння знову не містить лінійної частини і визначає циліндр з $(n - m)$ -вимірною твірною над квадрикою в просторі вимірності m . Якщо ж $\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{0}$, то оберемо ортонормований базис в L_0 такий, що

$$\mathbf{q}_{m+1} = \frac{1}{|\mathbf{b}_0|} \mathbf{b}_0.$$

При такому виборі базису лінійна частина рівняння складається лише з одного доданку $2h_{m+1}\tilde{x}_{m+1}$ і після очевидного паралельного переносу отримаємо рівняння поверхні параболічного типу.

■

4 Інваріанти рівняння квадрики

Можна спростити процедуру знаходження канонічного рівняння без перетворення координат. Для цього використовуються інваріанти і напівінваріанти рівняння квадрики.

Означення 4.1. Функції від коефіцієнтів рівняння квадрики, значення яких не змінюються при ортогональній заміні координат називаються **інваріантами** цього рівняння щодо ортогональних перетворень.

Твердження 4.1. Нехай $X'AX + 2X'b + c = 0$ – рівняння квадрики. Тоді всі коефіцієнти характеристичного многочлена матриці A інваріантні щодо ортогональних перетворень координат.

Доведення. У результаті ортогонального перетворення, матриця квадратичної частини рівняння перетвориться за правилом

$$\tilde{A} = Q'AQ,$$

де Q – ортогональна матриця перетворення координат. Зауважимо, що з ортогональності матриці Q випливає

$$Q'Q = QQ' = E, \quad |\det Q| = 1.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det(Q'AQ - \lambda E) = \det(Q'AQ - \lambda Q'Q) = \det[Q'(A - \lambda E)Q] = \\ &= \det Q' \det(A - \lambda E) \det Q = (\det Q)^2 \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Тепер досить помітити, що два многочлени тотожні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти.

■

Наслідок 4.1. *Усі симетричні функції власних значень матриці A інваріантні щодо ортогональних перетворень координат.*

Доведення полягає в застосуванні теореми Вієта для характеристичного многочлена. Випишемо знайдені інваріанти для кривої ($n = 2$) і поверхні ($n = 3$) другого порядку.

- $n = 2$:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A.$$

Отже, інваріантами рівняння кривої 2-го порядку є

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \text{trace}(A), \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \det A$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned} -\chi_A(\lambda) = & \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ & + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det A \end{aligned}$$

Отже, інваріантами рівняння поверхні 2-го порядку є

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{trace}_1(A), \\ I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{trace}_2(A), \\ I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{trace}_3(A) = \det A. \end{cases}$$

Ще одним інваріантом рівняння квадрики відносно ортогональних перетворень координат є *визначник розширеної матриці*. Розширеною матрицею рівняння квадрики називається матриця

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ b' & c \end{pmatrix},$$

де A – матриця квадратичної частини рівняння, b – стовпчик коефіцієнтів лінійної частини і c – вільний член. Для кривої і поверхні 2 порядку, відповідно,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. Для рівняння квадрики визначник

$$\det B = \det \begin{pmatrix} A & b \\ b' & c \end{pmatrix} := J$$

є інваріантом ортогонального перетворення координат.

Доведення. Доведення розіб'ємо на два окремих випадки: (а) – ортогональне перетворення не містить паралельного переносу і (б) – ортогональне перетворення є лише паралельним переносом.

(а) Розглянемо перетворення $X = Q\tilde{X}$. Тоді за лемою 2

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'b, \quad \tilde{c} = c.$$

Складемо матрицю $\tilde{B}$ і зауважимо, що

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} Q'AQ & Q'b \\ (Q'b)' & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де 0 означає нульовий рядок (стовпець). Але матриця

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

з очевидністю є ортогональною матрицею з визначником $|\det \tilde{Q}| = 1$. Значить

$$\det \tilde{B} = \det B.$$

(б) Розглянемо паралельний перенос $X = \tilde{X} + X_0$. За лемою 2

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{b} = AX_0 + b, \quad \tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c.$$

Отже,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} A & AX_0 + b \\ X_0'A + b' & X_0'AX_0 + 2X_0'b + c \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $X_0'A$ є рядком, що дорівнює сумі рядків матриці A , помножених відповідно на $x_0^1, \dots, x_0^n$. Проілюструємо це на прикладі матриці 2×2 :

$$(x_0, y_0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = (x_0a_{11} + y_0a_{12}, x_0a_{12} + y_0a_{22}) = x_0(a_{11}, a_{12}) + y_0(a_{12}, a_{22}).$$

Отже, узяття лінійної комбінації перших n рядків з коефіцієнтами $x_0^1, \dots, x_0^n$ еквівалентне множенню зліва на X_0' підматриці у матриці $\tilde{B}$, а саме

$$\begin{bmatrix} A & AX_0 + b \end{bmatrix},$$

що складена з її перших n рядків. Результатом цієї операції є рядок

$$X_0' \begin{bmatrix} A & AX_0 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0'A & X_0'AX_0 + X_0'b \end{bmatrix}.$$

Відніmemo його з останнього рядка (нагадаємо, що $X'_0 b \equiv b' X_0$). При цьому визначник матриці $\tilde{B}$ не зміниться. Таким чином,

$$\tilde{B} \sim \begin{pmatrix} A & AX_0 + b \\ b' & X'_0 b + c \end{pmatrix}.$$

Тепер зауважимо, що AX_0 є стовпцем, що дорівнює сумі стовпців матриці A помножених відповідно на $x_0^1, \dots, x_0^n$. Проілюструємо це знову на прикладі матриці 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Отже, узяття лінійної комбінації перших n стовпців з коефіцієнтами $x_0^1, \dots, x_0^n$ еквівалентне множенню справа на X_0 підматриці у матриці $\tilde{B}$, а саме $\begin{bmatrix} A \\ b' \end{bmatrix}$, що складена з перших її n стовпців. Результатом цієї операції є стовпець

$$\begin{bmatrix} A \\ b' \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} AX_0 \\ b' X_0 \end{bmatrix}.$$

Відніmemo його з останнього стовпця (і знову скористаємося тотожністю $X'_0 b \equiv b' X_0$). При цьому визначник матриці $\tilde{B}$ не зміниться. Таким чином,

$$\tilde{B} \sim \begin{pmatrix} A & b \\ b' & c \end{pmatrix} = B.$$

Отже, $\det B := J$ є інваріантом ортогонального перетворення координат.

■

Напівінваріантами рівняння квадрики називаються такі функції коефіцієнтів, значення яких є незмінним лише при ортогональному перетворенні координат без паралельного переносу. Із формули (38) випливає, що такими інваріантами є коефіцієнти характеристичного многочлену розширеної матриці рівняння, тобто її сліди усіх порядків.

- **Напівінваріанти рівняння кривої 2 порядку.** Випишемо коефіцієнти характеристичного рівняння матриці

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\text{trace}_1(B) = a_{11} + a_{22} + c = I_1 + c,$$

$$\text{trace}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} = I_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix},$$

$$\text{trace}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = J.$$

Оскільки I_1, I_2, J є інваріантами, то єдиним суттєвим напівінваріантом є функція

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}.$$

- **Напівінваріанти рівняння поверхні 2 порядку.** Випишемо коефіцієнти характеристичного рівняння матриці

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\text{trace}_1(B) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + c = I_1 + c,$$

$$\text{trace}_2(B) = I_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_3 \\ b_3 & c \end{vmatrix},$$

$$\text{trace}_3(B) = I_3 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{13} & a_{22} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}.$$

$$\text{trace}_4(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = J.$$

Оскільки I_1, I_2, I_3, J є інваріантами, то напівінваріантами рівняння поверхні 2 порядку є функції

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_3 \\ b_3 & c \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{13} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}.$$

4.1 Застосування інваріантів для дослідження кривої 2-го порядку

Інваріантами рівняння кривої 2 порядку є

$$I_1 = \text{trace}(A), \quad I_2 = \det(A), \quad J = \det(B).$$

Порівнюючи інваріанти з пунктами доведення класифікаційної теореми легко помітити, що крива 2-го порядку є центральною тоді і тільки тоді, коли $I_2 \neq 0$ і нецентральною, якщо $I_2 = 0$.

Твердження 4.2. Канонічне рівняння центральної кривої 2-го порядку можна записати у вигляді

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{J}{I_2} = 0.$$

При цьому

- якщо $I_2 > 0$, то
 - при $J \cdot I_1 > 0$ крива є уявним еліпсом;
 - при $J = 0$ крива є парою уявних прямих, що перетинаються у дійсній точці;
 - при $J \cdot I_1 < 0$ крива є еліпсом.
- якщо $I_2 < 0$, то
 - при $J \neq 0$ крива є гіперболою;
 - при $J = 0$ крива є парою прямих, що перетинаються.

Доведення. Крива є центральною тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \sim \det A \neq 0$. Ортогональним перетворенням її рівняння приводиться до виду

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0.$$

Розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Звідси $J = \lambda_1 \lambda_2 \tilde{c} = I_2 \tilde{c}$, а значить $\tilde{c} = \frac{J}{I_2}$ і канонічне рівняння кривої прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \frac{J}{I_2} = 0.$$

Якщо $I_2 > 0$, то λ_1 і λ_2 одного знаку. Але тоді знак λ_1 і λ_2 визначається знаком $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Тому, якщо

- $J \cdot I_1 > 0$ то знак вільного члена в канонічному рівнянні збігається зі знаком коефіцієнтів квадратичної частини рівняння, у значить крива є уявним еліпсом;
- $J \cdot I_1 < 0$, то знак вільного члена в канонічному рівнянні протилежний знаку коефіцієнтів квадратичної частини рівняння, а значить крива є дійсним еліпсом.
- $J = 0$, то з однаковості знаків λ_1 і λ_2 випливає, що наша крива є парою уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці $(0, 0)$.

Якщо $I_2 < 0$, то λ_1 і λ_2 різних знаків. Тому, якщо

- $J \neq 0$, то наше рівняння описує гіперболу;
- $J = 0$, то крива є парою дійсних прямих, що перетинаються.

■

Твердження 4.3. *Канонічне рівняння параболі можна записати у вигляді*

$$\tilde{y}^2 + 2\sqrt{-\frac{J}{I_1^3}} \tilde{x} = 0.$$

Доведення. Парабола є нецентральною кривою. Значить одне з власних значень, скажімо, $\lambda_1 = 0$. Квазіканонічне рівняння має вигляд

$$\lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_1 \tilde{x} = 0, \quad (h_1 \neq 0).$$

Зауважимо, що $\lambda_2 = I_1$. Щоб знайти h_1 , випишемо розширену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $J = -\lambda_2 h_1^2 = -I_1 h_1^2$ і значить $h_1 = \sqrt{-\frac{J}{I_1}}$. Остаточно, канонічне рівняння запишеться у вигляді

$$\tilde{y}^2 + 2\sqrt{-\frac{J}{I_1^3}} \tilde{x} = 0.$$

■

Парабола є єдиною нецентральною кривою 2-го порядку, що не розпадається. Всі інші нецентральні криві розпадаються в пари прямих. Квазіканонічне рівняння розпадної кривої 2 порядку має вигляд

$$\lambda_2 y^2 + \tilde{c} = 0.$$

Розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}$$

має очевидно нульовий визначник, тобто $J = 0$. Зауважимо, що $\lambda_2 = I_1$. Напівінваріант $K = I_1 \cdot \tilde{c}$, тому $\tilde{c} = \frac{K}{I_1}$ і канонічне рівняння розпадної кривої запишеться у вигляді

$$\tilde{y}^2 + \frac{K}{I_1^2} = 0$$

У підсумку можна зробити наступний висновок.

Твердження 4.4. Крива другого порядку є розпадною тоді і тільки тоді, коли $J = 0$.

Факт розпадиння кривої в пару прямих має важливий алгебраїчний наслідок, а саме

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2).$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Розпадиння означає, що корені квадратного рівняння

$$a_{11}x^2 + 2(a_{12}y + b_1)x + (a_{22}y^2 + 2b_2y + c) = 0$$

мають вираз лінійної функції від змінної y , а значить дискримінант рівняння має бути повним квадратом лінійної функції від змінної y . Дискримінант

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}D &= (a_{12}y + b_1)^2 - a_{11}(a_{22}y^2 + 2b_2y + c) = \\ &= (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})y^2 + 2(a_{12}b_1 - a_{11}b_2)y + (b_1^2 - a_{11}c) \end{aligned}$$

буде повним квадратом за умови

$$(a_{12}b_1 - a_{11}b_2)^2 - (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(b_1^2 - a_{11}c) = 0.$$

Спростимо вираз:

$$\begin{aligned} a_{12}^2b_1^2 - 2a_{12}a_{11}b_1b_2 + a_{11}^2b_2^2 - (a_{12}^2b_1^2 - a_{12}^2a_{11}c - a_{11}a_{22}b_1^2 + a_{11}^2a_{22}c) = \\ = -a_{11}(2a_{12}b_1b_2 - a_{11}b_2^2 - b_1^2a_{22} - a_{12}^2c + a_{11}a_{22}c). \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}c + 2a_{12}b_1b_2 - a_{22}b_1^2 - a_{11}b_2^2 - a_{12}^2c$$

Отже, якщо $J = 0$, то дійсно дискримінант квадратного рівняння відносно змінної x є повним квадратом.

Аналогічно, якщо $a_{22} \neq 0$, то за умови $J = 0$ дискримінант квадратного рівняння відносно змінної y є повним квадратом.

У випадку $a_{11} = a_{22} = 0$ коефіцієнт $a_{12} \neq 0$, інваріант $J = 2a_{12}b_1b_2 - a_{12}^2c$ і за умови $J = 0$ ми маємо

$$c = \frac{2b_1b_2}{a_{12}}.$$

Рівняння кривої за таких умов отримає вираз

$$\begin{aligned} 2(a_{12}y + b_1)x + 2b_2y + c &= 2(a_{12}y + b_1)x + 2b_2y + \frac{2b_1b_2}{a_{12}} = \\ 2(a_{12}y + b_1)x + 2\frac{b_2}{a_{12}}(a_{12}y + b_1) &= 2(a_{12}y + b_1)\left(x + \frac{b_2}{a_{12}}\right) = \frac{2}{a_{12}}(a_{12}y + b_1)(a_{12}x + b_2). \end{aligned}$$

Всі попередні висновки можна подати у вигляді таблиці

		Крива
$I_2 > 0$	$I_1 \cdot J > 0$	еліпс уявний
$I_2 > 0$	$I_1 \cdot J < 0$	еліпс дійсний
$I_2 > 0$	$J = 0$	пара уявних прямих, що перетинаються
$I_2 < 0$	$J \neq 0$	гіпербола
$I_2 < 0$	$J = 0$	пара дійсних прямих, що перетинаються
$I_2 = 0$	$J \neq 0, I_1 \neq 0$	парабола
$I_2 = 0$	$J = 0, I_1 \neq 0, K \neq 0$	пара паралельних прямих
$I_2 = 0$	$J = 0, I_1 \neq 0, K = 0$	пара прямих що злилися

Приклад 4.1. За допомогою інваріантів і напівінваріантів звести загальне рівняння кривої 2 порядку до найпростішого виду.

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$$

Розв'язок. З даних задачі

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 32 \\ 12 & 11 & 21 \\ 32 & 21 & 51 \end{pmatrix}.$$

Отже маємо

$$I_1 = 15, \quad I_2 = -100, \quad J = -2000.$$

Оскільки $I_2 < 0, J \neq 0$, то крива є гіперболою. Щоб виписати її найпростіше рівняння, знайдемо власні числа матриці A .

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = -5$. Отже маємо

$$20\tilde{x}^2 - 5\tilde{y}^2 + 20 = 0.$$

■

Приклад 4.2. За допомогою інваріантів і напівінваріантів звести загальне рівняння кривої 2 порядку до найпростішого виду.

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$$

Розв'язок. З даних задачі

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже маємо

$$I_1 = 10, \quad I_2 = 0, \quad J = 0.$$

Оскільки $I_2 = 0, J = 0$, то крива є нецентральною, розпадною. Напівінваріант $K = -1$. Маємо пару паралельних дійсних прямих. Найпростіше рівняння

$$\tilde{y}^2 = \frac{1}{100} \quad \sim \quad \tilde{y} = \pm \frac{1}{10}.$$

Оскільки крива є розпадною, то її рівняння розпадається у добуток лінійних співмножників:

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = (3x - y)(3x - y - 2).$$

■

Приклад 4.3. За допомогою інваріантів і напівінваріантів звести загальне рівняння кривої 2 порядку до найпростішого виду.

$$2xy + 10x - 6y - 30 = 0$$

Розв'язок. З даних задачі

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -30 \end{pmatrix}.$$

Отже маємо

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -1, \quad J = 0.$$

Оскільки $I_2 \neq 0, J = 0$, то крива є центральною, розпадною. Маємо також $a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} = 1, b_1 = 5, b_2 = -3$. Тому крива розпадається в добуток

$$(a_{12}x + b_2)(a_{12}y + b_1) = (x - 3)(y + 5) = 0.$$

■

4.2 Застосування інваріантів для дослідження поверхні 2-го порядку

Для поверхні 2-го порядку набір інваріантів складається з

$$I_1 = \text{trace}_1(A), \quad I_2 = \text{trace}_2(A), \quad I_3 = \det(A), \quad J = \det B.$$

Порівнюючи інваріанти з пунктами доведення класифікаційної теореми легко помітити, що *поверхня 2-го порядку є центральною тоді і тільки тоді, коли $I_3 \neq 0$ і нецентральною, якщо $I_3 = 0$* . Детальний вираз канонічних форм поверхонь 2 порядку можна одержати з використанням інваріантів і напівінваріантів рівняння поверхні.

Твердження 4.5. Канонічне рівняння центральної поверхні 2-го порядку можна записати у вигляді

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \frac{J}{I_3} = 0.$$

При цьому

- якщо $J \neq 0$, то поверхня є еліпсоїдом (дійсним/уявним) або гіперболоїдом (однопорожнинним/двопорожнинним);
- якщо $J = 0$, то поверхня є конусом (дійсним/уявним).

Доведення. Якщо $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0 \sim I_3 = \det A \neq 0$, то поверхня є центральною. Ортогональним перетворенням її рівняння приводиться до виду

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \tilde{c} = 0.$$

Розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Звідси $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \tilde{c} = I_3 \tilde{c}$, а значить $\tilde{c} = \frac{J}{I_3}$ і канонічне рівняння поверхні прийме вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \frac{J}{I_3} = 0.$$

Якщо $J \neq 0$, то в залежності від співвідношень знаків λ_i і знака $\frac{J}{I_3}$ одержимо канонічне рівняння або еліпсоїду (дійсного/уявного), або гіперболоїду (однопорожнинного/двопорожнинного). Якщо ж $J = 0$, то одержимо рівняння конусу (дійсного/уявного).

■

Нецентральні поверхні ($I_3 = 0$) можуть бути 2-х типів: з одним або з двома нульовими власними значеннями. Перший тип характеризується інваріантом $I_2 \neq 0$, а другий – інваріантами $I_2 = 0, I_1 \neq 0$.

Твердження 4.6. Канонічне рівняння поверхні 2-го порядку з інваріантами $I_3 = 0, I_2 \neq 0$ може бути записане у вигляді

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2\sqrt{-\frac{J}{I_2}} \tilde{z} = 0.$$

При цьому

- якщо $J \neq 0$, то отримаємо канонічне рівняння параболоїду (еліптичного/гіперболічного);

- якщо $J = 0$, то отримаємо канонічне рівняння одного з циліндрів над центральною кривою 2-го порядку;

Доведення. Рівняння поверхні з одним нульовим власним значенням приводиться до квазіканонічного виду двох типів

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3 \tilde{z} = 0 \quad (h_3 \neq 0) \quad \text{або} \quad \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0$$

В першому випадку

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $J = -\lambda_1 \lambda_2 h_3^2 = -I_2 h_3^2 \neq 0$ і можемо знайти $h_3 = \sqrt{-\frac{J}{I_2}} \neq 0$. Поверхня є еліптичним або гіперболічним параболоїдом.

В другому випадку

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix},$$

а значить $J = 0$ і немає можливості уточнити значення параметру $\tilde{c}$ через інваріанти. Але ми можемо виразити $\tilde{c}$ через напівінваріанти. Дійсно, $L = \lambda_1 \lambda_2 \tilde{c} = I_2 \tilde{c}$, а значить $\tilde{c} = \frac{L}{I_2}$. Отже, квазіканонічне рівняння запишеться у вигляді

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \frac{L}{I_2} = 0$$

Поверхня належить класу циліндрів над центральною кривою 2-го порядку, адже $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

■

Твердження 4.7. Поверхня 2-го порядку з інваріантами $I_3 = 0, I_2 = 0, I_1 \neq 0$ є циліндром над нецентральною кривою 2-го порядку.

Доведення. Квазіканонічне рівняння поверхні з двома нульовими власними значеннями має вигляд

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2 \tilde{y} = 0 \quad (h_2 \neq 0) \quad \text{або} \quad \lambda_1 \tilde{x}^2 + \tilde{c} = 0.$$

У першому випадку розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

має нульовий визначник ($J = 0$) і немає можливості уточнити значення параметру h_2 через інваріанти. Але використовуючи напівінваріанти ми можемо записати, що $L = -\lambda_1 h_2^2$. Зауважимо, що $\lambda_1 = I_1$ і тому остаточно

$$h_2 = \sqrt{-\frac{L}{I_1}}.$$

Значить канонічне рівняння можна записати у вигляді

$$\tilde{x}^2 + 2\sqrt{-\frac{L}{I_1^3}}\tilde{y} = 0.$$

Знайдене рівняння є рівнянням параболічного циліндру.

У другому випадку розширена матриця

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Маємо $\lambda_1 = I_1$, $K = \lambda_1 \tilde{c} = I_1 \tilde{c}$ і тому $\tilde{c} = \frac{K}{I_1}$. Канонічне рівняння запишеться у вигляді

$$\tilde{x}^2 + \frac{K}{I_1^2} = 0.$$

Знайдене рівняння визначає пари паралельних дійсних або уявних площин, а також дві площини, що зливаються.

■

Поверхня 2-го порядку називається *невиродженою*, якщо вона не є конусом або циліндром 2-го порядку. Як висновок, *поверхня 2-го порядку є неvirодженою тоді і тільки тоді, коли $J \neq 0$; поверхня 2-го порядку є virодженою тоді і тільки тоді, коли $J = 0$.*

Серед вироджених поверхонь є такі, що розпадаються у пари площин. В такому випадку рівняння поверхні розпадається в добуток двох лінійних співмножників. Аналогічно випадку кривої 2 порядку, рівняння поверхні може бути розв'язане відносно однієї із змінних у такий спосіб, що корені рівняння є лінійними функціями від інших координат. Умови розпадиння забезпечуються (напів-) інваріантами:

$I_2 \neq 0, I_3 = 0, J = 0, L = 0$ – пара площин, що перетинаються,

$I_1 \neq 0, I_2 = 0, I_3 = 0, J = 0, L = 0, K \neq 0$ – пара паралельних площин,

$I_1 \neq 0, I_2 = 0, I_3 = 0, J = 0, L = 0, K = 0$ – пара площин, що зливаються.

5 Взаємне розташування прямої і квадрики

5.1 Класифікація напрямків

Нехай $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ – рівняння квадрики і $l : \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{V}$ – рівняння прямої. Позначимо через $\Phi(\mathbf{X})$ ліву частину рівняння квадрики, тобто покладемо

$$\Phi(\mathbf{X}) = \langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c.$$

Спільні точки прямої і квадрики відповідають таким значенням параметру t , що

$$\langle \mathcal{A}(\mathbf{X}_0 + t\mathbf{V}), \mathbf{X}_0 + t\mathbf{V} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 + t\mathbf{V} \rangle + c = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ симетричний і задовольняє тотожності $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{A}\mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$. З огляду на це рівняння на параметр t спрощується до

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle t^2 + 2\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle t + \Phi(\mathbf{X}_0) = 0. \quad (39)$$

Отже, пряма і квадрика можуть мати не більше двох спільних точок.

Нехай $\mathbf{X}_0$ довільна, але *фіксована* точка простору. Будемо змінювати напрямки $\mathbf{V}$ прямої l і аналізувати можливі випадки її взаємного розташування з квадрикою.

- Напрямок $\mathbf{V}$ називається *особливим*, якщо $\mathcal{A}\mathbf{V} = 0$.

Зазначимо, що особливий напрямок – це в точності напрямок власного вектора оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному значенню $\lambda = 0$. Якщо $\mathbf{V}$ – особливий напрямок, то для прямої l рівняння (39) приймає вигляд:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle t + \Phi(\mathbf{X}_0) = 0.$$

Для прямої особливого напрямку очевидно можливі 3 варіанти:

- Якщо $\langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle \neq 0$, то пряма має з квадрикою єдину спільну точку.
- Якщо $\langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$ але $\Phi(\mathbf{X}_0) \neq 0$, то пряма і квадрика не мають спільних точок.
- Якщо $\langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$ і $\Phi(\mathbf{X}_0) = 0$, то пряма лежить на квадриці.

- Напрямок $\mathbf{V}$ називається *асимптотичним*, якщо

$$\mathcal{A}\mathbf{V} \neq 0, \quad \langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = 0.$$

Для прямої асимптотичного напрямку так само можливі 3 варіанти:

- якщо $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle \neq 0$, то пряма має з квадрикою єдину спільну точку;
- якщо $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$ але $\Phi(\mathbf{X}_0) \neq 0$, то пряма і квадрика не мають спільних точок;

- якщо $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$ і $\Phi(\mathbf{X}_0) = 0$, то пряма лежить на квадриці.
 - Напрямок $\mathbf{V}$ називається *хордальним*, якщо $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \neq 0$.
- Для прямої хордального напрямку рівняння (39) є квадратним і, отже, можливі 3 варіанти:
- корені дійсні і різні – пряма має з квадрикою дві різні спільні точки.
 - корені дійсні і збігаються – пряма має з поверхнею одну, але "подвійну" спільну точку. Такі напрямки називаються *дотичними*, а відповідна пряма – дотичною до квадрики.
 - корені різні, але комплексні – прямі цього напрямку не мають дійсних спільних точок з поверхнею.

5.2 Діаметри

Нехай $\mathbf{V}$ – хордальний напрямок. *Діаметром*, що відповідає напрямку $\mathbf{V}$, називається геометричне місце точок середин хорд, паралельних напрямку $\mathbf{V}$.

Твердження 5.1. *Діаметр, що відповідає хордальному напрямку $\mathbf{V}$ квадрики $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ є гіперплощиною³ з рівнянням*

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо хордальний напрямок $\mathbf{V}$. Тоді рівняння $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{V}$ задає сімейство паралельних прямих, кожна з яких визначається положенням початкової точки $\mathbf{X}_0$. Причому на кожній такої прямої ця початкова точка може бути обрана довільно. Нехай P і Q – точки перетину прямої з квадрикою. На кожній прямій хордального напрямку помістимо початкову точку в середину відрізка PQ .

Нехай точці Q відповідає значення параметра t_P , а точці P – значення параметра t_Q . Якщо $\mathbf{X}_0$ – середина відрізка PQ , то $t_P = -t_Q$. Тобто $t_P + t_Q = 0$. Але t_P і t_Q – це корені рівняння (39). Отже, якщо $\mathbf{X}_0$ – середина хорди, то з теореми Вієта випливає $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$. Значить середини всіх хорд лежить у гіперплощині $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$.

І навпаки, якщо початкова точка прямої лежить у гіперплощині $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$, то рівняння (39) не містить лінійної частини, а значить корені рівняння (якщо існують) рівні за модулем і протилежні за знаком.

■

Якщо пряма хордального напрямку не має спільних точок з поверхнею, то розв'язки рівняння (39) комплексні і комплексно сполучені. Але тоді $t_P + t_Q$ є дійсним числом. Отже, має сенс говорити про *дійсні* середини *уявних* хорд

³Для кривої 2 порядку це пряма, для поверхні – це площина з вектором нормалі $\mathcal{A}\mathbf{V}$.

квадріки. Тому в якості діаметру можна приймати не частину гіперплощини $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$, що відповідає дійсним хордам, а всю гіперплощину.

Прямі асимптотичного напрямку не утворюють хорд із квадрікою, але для них все ж таки визначена гіперплощина $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$, що приймається як діаметр, що відповідає асимптотичному напрямку. Таким чином, *тільки для прямих особливого напрямку поняття діаметру не визначене*.

Для кривих 2 порядку визначається поняття сполучених діаметрів. А саме, діаметр $D'(\mathbf{V})$ називається *сполученим* до діаметру $D(\mathbf{V})$, якщо $D'(\mathbf{V})$ відповідає хордам, паралельним діаметру $D(\mathbf{V})$.

Головним діаметром $D(\mathbf{V})$ поверхні 2-го порядку називається діаметр, що перпендикулярний до своїх хорд.

З визначення діаметру випливає, що *будь-який головний діаметр є гіперплощиною симетрії квадріки*.

Твердження 5.2. *Діаметр $D(\mathbf{V}) : \langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$ є головним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$ ($\lambda \neq 0$), тобто $\mathbf{V}$ – власний вектор матриці A , що відповідає ненульовому власному значенню. Рівняння головного діаметра має вигляд:*

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{X} \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$$

Доведення. Якщо $D(\mathbf{V})$ – діаметр, то його вектор нормалі $\mathbf{N} = \mathcal{A}\mathbf{V}$, а $D(\mathbf{V}) \perp \mathbf{V}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{N} \parallel \mathbf{V}$, тобто, коли $\mathcal{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$. ■

Порівнюючи рівняння головного діаметру з перетвореннями координат в розділах 3.1.1 та 3.2.1, легко зрозуміти, що принаймні одна з координатних осей/площин збігається з головним діаметром.

Приклад 5.1. *Написати рівняння головних діаметрів кривої*

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80.$$

Розв'язок. Випишемо матричні елементи даного рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -16 \\ -28 \end{pmatrix}, \quad c = 80.$$

Випишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 13\lambda + 36, \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9.$$

Знайдемо власні вектори: $\mathbf{V}_1 = \{2, -1\}$, $\mathbf{V}_2 = \{1, 2\}$ Знайдемо, далі $\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{b} \rangle = 32 + 28 = 60$. Звідси, $D_1 : 2x - y + \frac{60}{4} = 0 \sim 2x - y + 15$. Аналогічно, $D_2 : x + 2y - 8 = 0$. ■

5.3 Гіперплощини симетрії загальної квадрики

Гіперплощина називається *гіперплощиною симетрії* квадрики, якщо для будь-якої точки M , що лежить на квадриці, симетрична відносно гіперплощини точка $\tilde{M}$ також лежить на квадриці.

Твердження 5.3. *Нехай $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ – квадрика, що не є парною гіперплощиною, що збігаються. Гіперплощина $\Pi : \langle \mathbf{X}, \mathbf{V} \rangle + D = 0$ з вектором нормалі $\mathbf{V}$ і вільним членом D є гіперплощиною симетрії квадрики тоді і тільки тоді, коли*

- $\mathcal{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$; гіперплощина симетрії визначається однозначно і збігається з головним діаметром; $D = \langle \mathbf{V}, \mathbf{b} \rangle$;
- $\mathcal{A}\mathbf{V} = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{V}, \mathbf{b} \rangle = 0$; будь-яка гіперплощина з вектором нормалі $\mathbf{V}$ є гіперплощиною симетрії.

Якщо $\mathcal{A}\mathbf{V} = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{V}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$, то не існує гіперплощини симетрії, с вектором нормалі $\mathbf{V}$.

Доведення. Нехай $\Pi : \langle \mathbf{X}, \mathbf{V} \rangle + D = 0$ – шукана гіперплощина симетрії. Введемо в розгляд одиничний вектор $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ і запишемо рівняння шуканої гіперплощини в нормальній формі

$$\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle + d = 0 \quad (d = D/|\mathbf{V}|).$$

Нехай точка X_0 належить поверхні, тобто $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle + c = 0$. Нехай $\mathbf{X}_1$ – точка симетрична до $\mathbf{X}_0$ відносно Π . Тоді $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 - 2h\boldsymbol{\nu}$, де $h = \langle \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\nu} \rangle + d$ – відхилення точки $\mathbf{X}_0$ від гіперплощини Π . Якщо Π гіперплощина симетрії, то для будь-якої точки $\mathbf{X}_0$ на поверхні, точка $\mathbf{X}_1$ так само повинна належати поверхні. Це значить, що для будь-якої точки $\mathbf{X}_0$ на поверхні, $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_1 \rangle + c = 0$. Розпишемо:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\mathbf{X}_0 - 2h\boldsymbol{\nu}), \mathbf{X}_0 - 2h\boldsymbol{\nu} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 - 2h\boldsymbol{\nu} \rangle + c &= \\ \langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \rangle - 4h\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\nu} \rangle + 4h^2\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle - 4h\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle + c &= \\ 4h^2\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle - 4h(\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle) + \underbrace{\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle + c}_{=0} &= \\ 4h(\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle h - (\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle)) &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки поверхня не є двічі покритою гіперплощиною, то $h \neq 0$ а значить

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle h - (\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle) = 0.$$

Покладемо $\lambda = \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle$ і підставимо $h = \langle \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\nu} \rangle + d$. Тоді маємо

$$\lambda(\langle \mathbf{X}_0, \boldsymbol{\nu} \rangle + d) - (\langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle) = 0 \quad \sim \quad \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\nu} - \lambda\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle - \lambda d = 0$$

для всіх точок $\mathbf{X}_0$, що лежать на поверхні. Формально, останнє рівняння означає, що будь-яка точка $\mathbf{X}_0$ поверхні має належати гіперплощині з вектором нормалі $\mathcal{A}\boldsymbol{\nu} - \lambda\boldsymbol{\nu}$ і вільним членом $\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle - \lambda d$. Оскільки поверхня не є двічі покритою гіперплощиною, то такої гіперплощини не існує. Отже

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\nu} = \lambda\boldsymbol{\nu}, \quad \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle - \lambda d = 0.$$

Якщо $\lambda \neq 0$, то $d = \frac{\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda}$ і це головний діаметр. Якщо ж $\lambda = 0$, то можливі два випадки: $\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle = 0$ і значить будь-яка гіперплощина з вектором $\boldsymbol{\nu} \in$ гіперплощиною симетрії; або $\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$ і тоді не існує гіперплощини симетрії з вектором нормалі $\boldsymbol{\nu}$.

■

Приклад 5.2. Визначити площини симетрії поверхні

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = 1.$$

Власними числами матриці A є $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Власні вектори

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Площина симетрії з вектором нормалі V_1 існує і єдина:

$$\Pi_1 : x + y + 2z - 6 = 0.$$

Поверхня має сімейство площин симетрії з вектором нормалі V_2 , бо $\langle \mathbf{V}_2, \mathbf{b} \rangle = 0$:

$$-x + y + D = 0.$$

Не існує площини симетрії з вектором нормалі V_3 , оскільки $\langle \mathbf{V}_3, \mathbf{b} \rangle = 3 \neq 0$.

■

5.4 Центр симетрії квадрики

Точка O називається *центром симетрії* квадрики, якщо для будь-якої точки M , що лежить на квадриці, точка $\tilde{M}$ що центрально симетрична до точки M відносно центру симетрії O , також лежить на квадриці.

Твердження 5.4. Точка з радіус-вектором $\mathbf{X}_0$ є центром симетрії квадрики $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ тоді і тільки тоді, коли її координати є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$A\mathbf{X}_0 + b = 0,$$

де A – матриця оператора $\mathcal{A}^4$, а стовпчик b складається з координат вектору

⁴тобто, матриця квадратичної частини рівняння

б. Кількість центрів симетрії визначається вимірністю простору розв'язків отриманої системи рівнянь.

Доведення. Розглянемо ще раз рівняння (39), а саме

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle t^2 + 2\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle t + \Phi(\mathbf{X}_0) = 0.$$

Очевидно, що якщо $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b} = 0$ для будь-якого напрямку $\mathbf{V}$, то $\mathbf{X}_0$ – центр симетрії поверхні, і навпаки. Отже $\mathbf{X}_0$ – центр симетрії тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b} = 0$ для будь-якого $\mathbf{V}$. Переходячи до координатного запису умови $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b} = 0$, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$AX_0 = -b,$$

матрицею якої є матриця квадратичної частини рівняння, стовпчиком невідомих – координати можливого центру симетрії, а стовпчиком правих частин – коефіцієнти лінійної частини рівняння (координати вектору $-\mathbf{b}$). Кількість центрів симетрії визначається вимірністю простору розв'язків отриманої системи рівнянь і визначається теоремою Кронекера-Капеллі.

■

Приклад 5.3. Знайти центри симетрії поверхні

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz + x + 2y - 3z - 12 = 0.$$

Розв'язок. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \quad c = -12.$$

Складемо систему рівнянь $AX = -b$ і випишемо її матричний варіант

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1/2 \\ 2 & 4 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & 9 & 3/2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Центри симетрії заповнюють площину

$$2x + 2y - 6z + 1 = 0.$$

■

Приклад 5.4. Знайти центри симетрії поверхні

$$4x^2 + 2y^2 + 10z^2 + 4xy + 12xz + 8yz + 14x - 10y + 4z + 7 = 0.$$

Розв’язок. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 7.$$

Складемо систему рівнянь $AX = -b$ і випишемо її матричний варіант

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 10 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Центри симетрії заповнюють пряму

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6x + 7 = 0, \\ 2x + 2y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

■

Приклад 5.5. Знайти центри симетрії поверхні

$$4x^2 + 2y^2 + 10z^2 + 4xy + 12xz + 8yz + 14x - 10y + 7 = 0.$$

Розв’язок. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 7.$$

Складемо систему рівнянь $AX = -b$ і випишемо її матричний варіант

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Центрів симетрії немає

■

Приклад 5.6. Знайти центри симетрії кривої

$$x^2 - 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Розв’язок. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

Складемо систему рівнянь $AX = -b$ і випишемо її матричний варіант

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Центр симетрії єдиний і знаходиться в точці $(7, 5)$.

■

5.5 Дотична гіперплощина загальної квадрики

Пряма називається *дотичною* до квадрики, якщо вона проходить через точку на квадриці і має з нею єдину подвійну точку або цілком їй належить. Якщо існує площина, що містить всі дотичні прямі до квадрики в даній точці, то вона називається *дотичною гіперплощиною* до квадрики.

Твердження 5.5. *Нехай точка X_0 належить квадриці $\Phi(\mathbf{X}) = \langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ і не є центром її симетрії. Тоді в точці X_0 існує і єдина дотична площина, рівняння якої може бути записане у вигляді*

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} + \mathbf{X}_0 \rangle + c = 0$$

Доведення. Нехай $\mathbf{X}_0$ належить поверхні і не є центром симетрії, тобто $\Phi(\mathbf{X}_0) = 0$, $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тоді рівняння (39) набуде вигляду

$$t(\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle t + 2\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle) = 0.$$

Одному кореню $t = 0$ відповідає точка X_0 . Цей корінь буде подвійним тоді і тільки тоді, коли

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0.$$

Тобто множина дотичних напрямків $\mathbf{V}$ ортогональна вектору $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}$. Будь-який вектор, що відкладений від точки $\mathbf{X}_0$ має дотичний напрямок тоді і тільки тоді, коли його кінець $\mathbf{X}$ задовольняє умові

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \rangle = 0.$$

Останнє рівняння визначає гіперплощину, з вектором нормалі $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}$. Оскільки $\mathbf{X}_0$ не є центром симетрії, то $\mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ а значить гіперплощина визначена однозначно. Перетворимо це рівняння:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \rangle &= \langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle - (\underbrace{\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle}_{= -\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle - c}) = \\ &= \langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}_0 \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{X} + \mathbf{X}_0 \rangle + c = 0, \end{aligned}$$

що й треба було довести. ■

Точка на квадриці, для якої не існує дотичної площини називається особливою. Отже, точка на квадриці є особливою тоді і тільки тоді, коли вона є центром симетрії. Таким чином, особливі точки квадрики є розв'язками системи

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{X}) = 0, \\ \mathcal{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Рівняння дотичної гіперплощини можна виписати в коротший спосіб, скориставшись поняттям частинної похідної. Позначимо ліву частину рівняння квадрики через $\Phi(x_1, \dots, x_n)$. Частинною похідною від функції Φ за змінною x_i

називається похідна Φ як функції лише x_i у припущенні, що всі інші змінні є сталими величинами. Частинна похідна Φ за змінною x_i позначається як $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. Наприклад,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy - 2xz + 3x + y + 3z - 1) &= 2x + 3y - 2z + 3, \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy - 2xz + 3x + y + 3z - 1) &= 3x + 1, \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + 3xy - 2xz + 3x + y + 3z - 1) &= -2x + 3.\end{aligned}$$

Вектор, складений з частинних похідних функції Φ називається *вектором градієнту* і позначається $grad(\Phi)$. Нескладно перевірити, що рівняння дотичної площини можна записати у вигляді

$$\langle grad(\Phi)|_{\mathbf{X}_0}, \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \rangle = 0,$$

тим самим впевнившись, що вектор градієнту спрямований уздовж нормалі до дотичної площини поверхні. Особливі точки поверхні визначаються рівнянням $grad(\Phi)|_{\mathbf{X}_0} = \mathbf{0}$.

Приклад 5.7. Знайти рівняння дотичної прямої до кривої

$$xy + y^2 + 5x + 2y - 7 = 0$$

в точці $(2, -1)$

Розв'язок. Безпосередня перевірка показує, що точка належить кривій.

Перший спосіб. Випишемо матричні компоненти рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = -7.$$

Вектор нормалі дотичної має вираз

$$AX_0 + b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, рівняння дотичної

$$2(x - 2) + (y + 1) = 0 \quad \sim \quad 2x + y - 3 = 0.$$

Другий спосіб. Знайдемо вектор градієнту функції

$$\Phi(x, y) = xy + y^2 + 5x + 2y - 7$$

в заданій точці.

$$grad(\Phi)|_{X_0} = \{\Phi_x, \Phi_y\}|_{(x=2, y=-1)} = \{y + 5, x + 2y + 2\}|_{(x=2, y=-1)} = \{4, 2\}.$$

Отже, рівняння дотичної

$$4(x - 2) + 2(y + 1) = 0 \quad \sim \quad 2x + y - 3 = 0.$$

■

Приклад 5.8. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні

$$x^2 - y^2 + xz + yz - 8x - 2y - 3z + 23 = 0$$

в точці $(0, -1, 6)$

Розв'язок. Безпосередня перевірка показує, що точка належить поверхні. Знайдемо вектор градієнту функції

$$\Phi(x, y) = x^2 - y^2 + xz + yz - 8x - 2y - 3z + 23$$

в заданій точці.

$$\text{grad}(\Phi) = \{\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z\} = \{2x + z - 8, -2y + z - 2, x + y - 3\}.$$

$$\text{grad}(\Phi)|_{(0, -1, 6)} = \{-2, 6, -4\}.$$

Отже, рівняння дотичної площини

$$2(x - 0) - 6(y + 1) + 4(z - 6) = 0 \quad \sim \quad x - 3y + 2z - 15 = 0.$$

■

5.6 Прямі на загальній квадриці

Зробимо останнє зауваження в аналізі рівняння (39).

Твердження 5.6. Пряма $l : \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{V}$ лежить на квадриці $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle + c = 0$ тоді і тільки тоді, коли

1. $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 \rangle + c = 0$;
2. $\langle \mathcal{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{V} \rangle = 0$;
3. $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = 0$.

Для доведення досить помітити, що виписані умови перетворюють на нуль рівняння (39) тотожно відносно t . Умова (1) означає, що пряма проходить через точку на квадриці; умова (3) означає, що напрямок прямої є асимптотичним; умова (2) для особливої точки не накладає обмежень на напрям прямої, а значить будь-яка пряма асимптотичного напрямку, що проходить через особливу точку, лежить на квадриці; умова (2) для неособливої точки означає, що *пряма асимптотичного напрямку лежить на поверхні тоді і тільки тоді, коли її напрямок водночас є дотичним*.

Зазначимо, що множина всіх асимптотических напрямків заповнює конус $\langle \mathcal{A}\mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = 0$, що називається асимптотичним конусом квадрики.

Приклад 5.9. *На поверхні*

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy - 10yz - 4 = 0$$

знайти прямолінійні твірні, що проходять через точку $(-1, 1, 2)$.

Розв'язок. Безпосередня перевірка показує, що точка $(-1, 1, 2)$ належить поверхні. Напрям шуканої прямої визначається вектором $\mathbf{V}$, що одночасно є асимптотичним і дотичним напрямком на поверхні. Вектор нормалі дотичної площини в заданій точці є вектором градієнту:

$$\text{grad}(\Phi) = \{2x - 2y, 10y - 2x - 10z, 8z - 10y\}|_{(-1,1,2)} = \{-4, -8, 6\}.$$

Нехай $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Умови асимптотичності і дотичності складають систему

$$\begin{cases} v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_3^2 - 2v_1v_2 - 10v_2v_3 = 0, \\ 2v_1 + 4v_2 - 3v_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи визначений з точністю до коефіцієнту пропорційності. Частинними розв'язками є

$$\mathbf{V}_1 = \{1, 1, 2\}, \quad \mathbf{V}_2 = \{-11, 25, 26\}.$$

Отже, через задану точку проходять дві прямі, що цілком лежать на поверхні:

$$l_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}, \quad l_2 : \frac{x+1}{-11} = \frac{y-1}{25} = \frac{z-2}{26}.$$

■

Поверхня називається 2-лінійчастою, якщо через кожну її точку проходить 2 різні прямі, що цілком лежать на поверхні.

Твердження 5.7. *Довести, що однопорожнинний гіперboloїд*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

є 2-лінійчастою поверхнею.

Доведення. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні, тобто,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Пряма, що проходить через точку M_0 , цілком лежить на поверхні, якщо її напрямний вектор $\mathbf{V} = \{v_x, v_y, v_z\}$ задовольняє умовам асимптотичності і дотичності одночасно. Вектором нормалі гіперboloїду в точці M_0 є вектор

$$\mathbf{N} = \left\{ \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right\}.$$

Множина асимптотичних напрямків заповнює конус

$$\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} - \frac{v_z^2}{c^2} = 0.$$

Отже, шуканий напрямок є розв'язком системи

$$\begin{cases} \frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} - \frac{v_z^2}{c^2} = 0, \\ \frac{x_0 v_x}{a^2} + \frac{y_0 v_y}{b^2} - \frac{z_0 v_z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, то з першого рівняння системи випливає, що $v_z \neq 0$ і можна покласти

$$v_x = a \cos \alpha, \quad v_y = b \sin \alpha, \quad v_z = c.$$

Тоді друге рівняння системи запишеться у вигляді

$$\frac{x_0}{a} \cos \alpha + \frac{y_0}{b} \sin \alpha = \frac{z_0}{c}.$$

Оскільки $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \neq 0$, то можна покласти

$$\cos \beta = \frac{\frac{x_0}{a}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}}, \quad \sin \beta = \frac{\frac{y_0}{b}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}}$$

і переписати друге рівняння у вигляді

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\frac{z_0}{c}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}} = \frac{\frac{z_0}{c}}{\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}}.$$

Оскільки $\frac{|z_0|}{c} < \sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}$, то можна покласти $\cos \theta = \frac{z_0}{c} / \sqrt{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}$ і записати рівняння у вигляді

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \theta$$

звідки випливає, що $\alpha = \beta \pm \theta$, тобто система завжди має 2 розв'язки.

■

Доведене твердження не дає алгоритму знаходження прямолінійних твірних на поверхні однопорожнинного гіперболоїду, але дає підставу стверджувати, що знайдені у будь-який спосіб дві прямолінійні твірні і є шуканими прямими. Найпростіший спосіб знайти такі твірні можна отримати у наступний спосіб. Перепишемо рівняння як

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

і розкладемо ліву і праву частини на множники

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Стає очевидним, що рівняння однопорожнинного гіперболоїду є наслідком кожної з наступних систем лінійних рівнянь

$$(\lambda)$$

Твердження 5.8. Довести, що гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0)$$

є 2-лінійчастою поверхнею.

Доведення. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні, тобто,

$$\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0.$$

Пряма, що проходить через точку M_0 , цілком лежить на поверхні, якщо її напрямний вектор $\mathbf{V} = \{v_x, v_y, v_z\}$ задовольняє умовам асимптотичності і дотичності одночасно. Вектором нормалі гіперболоїду в точці M_0 є вектор

$$\mathbf{N} = \left\{ \frac{x_0}{p}, -\frac{y_0}{q}, -1 \right\}.$$

Множина асимптотичних напрямків є розв'язком рівняння

$$\frac{v_x^2}{p} - \frac{v_y^2}{q} = 0.$$

Отже, шуканий напрямок є розв'язком системи

$$\begin{cases} \frac{v_x^2}{p} - \frac{v_y^2}{q} = 0, \\ \frac{x_0 v_x}{p} - \frac{y_0 v_y}{q} - v_z = 0. \end{cases}$$

Множина розв'язків легко знаходиться з точністю до напрямку вектору $\mathbf{V}$ і коефіцієнту пропорційності двома способами

$$\mathbf{V}_1 : \begin{cases} v_x = \sqrt{p}, \\ v_y = \sqrt{q}, \\ v_z = \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}, \end{cases} \quad \mathbf{V}_2 : \begin{cases} v_x = \sqrt{p}, \\ v_y = -\sqrt{q}, \\ v_z = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}. \end{cases}$$

Отже, через точку M_0 проходять 2 прямі

$$l_1 : \begin{cases} x = x_0 + \sqrt{p}t, \\ y = y_0 + \sqrt{q}t, \\ z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = x_0 + \sqrt{p}t, \\ y = y_0 - \sqrt{q}t, \\ z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) t, \end{cases}$$

що цілком лежать на поверхні.

■

Докладніше про властивості прямолінійних твірних на поверхнях однопорожнинного гіперболоїду і гіперболічного параболоїду дивіться в [1], [8].

6 Жмуток кривих 2-го порядку і його використання

Жмутком кривих 2 порядку називається сукупність всіх кривих 2 порядку, що проходять через 4 точки, що не лежать на одній прямій. Коректність означення жмутка міститься в наступній теоремі єдиності.

Теорема 5. *Нехай $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ п'ять точок на площині, жодні 4 з яких не лежать на одній прямій. Тоді існує єдина крива 2 порядку, що проходить через ці 5 точок.*

Доведення. Запишемо загальне рівняння кривої 2 порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

і будемо накладемо вимогу, щоб координати заданих точок задовольняли рівнянню кривої. Отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2b_1x_1 + 2b_2y_1 + c = 0 \\ a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2b_1x_2 + 2b_2y_2 + c = 0 \\ a_{11}x_3^2 + 2a_{12}x_3y_3 + a_{22}y_3^2 + 2b_1x_3 + 2b_2y_3 + c = 0 \\ a_{11}x_4^2 + 2a_{12}x_4y_4 + a_{22}y_4^2 + 2b_1x_4 + 2b_2y_4 + c = 0 \\ a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2b_1x_5 + 2b_2y_5 + c = 0 \end{cases} \quad (40)$$

відносно невідомих коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ рівняння кривої. Невідомих параметрів в системі (40) шість, але два рівняння кривої 2 порядку, що відрізняються множителем визначають одну й ту ж криву. Тому достатньо перевірити, що в умовах твердження система (40) має єдиний розв'язок з точністю до одного параметру. Для цього необхідно і достатньо, щоб ранг системи дорівнював 5, тобто щоб всі рівняння системи були незалежними.

Припустимо протилежне. Нехай одне з рівнянь, скажімо п'яте, є наслідком перших чотирьох. Це означає, що якщо шукана крива проходить через 4 точки, то вона обов'язково проходить і через п'яту.

Покажемо, що в такому разі принаймні 3 точки лежать на одній прямій. Припустимо, що це не так. Тоді точки M_1, M_2, M_3, M_4 визначають пару прямих, скажімо M_1M_2 і M_3M_4 , жодна з яких не проходить через точку M_5 . Добуток рівнянь цих прямих є кривою 2 порядку, що проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4 , але не проходить через M_5 . Суперечність.

Покажемо тепер, що в умовах припущення принаймні 4 точки мають лежати на одній прямій. Із попередніх міркувань випливає, що принаймні 3 точки мають лежати на одній прямій. Нехай точки M_1, M_2, M_3 належать прямій l_1 . Припустимо, що жодна з точок M_4, M_5 не належить прямій l_1 . Через точку M_4 проведемо довільну пряму l_2 , що не проходить через точку M_5 . Добуток рівнянь прямих l_1 і l_2 визначить рівняння кривої 2 порядку, що проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4 , але не проходить через точку M_5 . Суперечність.

Значить, якщо одне з рівнянь є наслідком інших чотирьох, то принаймні 4 точки мають лежати на одній прямій, а це суперечить умовам теореми.

■

Теорема 6. (Теорема єдиності) Якщо двом рівнянням 2 порядку

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

$$\Phi'(x, y) = a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2b'_1x + 2b'_2y + c' = 0$$

задовольняють точки однієї і тієї ж самої множини точок на площині, то рівняння відрізняються числовим множником.

Доведення. За класифікаційною теоремою 1 множина розв'язків рівняння $\Phi(x, y) = 0$ складається з множин 3 типів:

- нерозпадна крива;
- розпадна, але не пара прямих, що збігаються;
- пара прямих, що збігаються.

Для нерозпадної кривої пряма може мати з кривою не більше двох спільних точок і значить жодні три не лежать на одній прямій. За теоремою 5 рівняння такої кривої єдине, з точністю до числового множника. Отже, $\Phi'(x, y) = \lambda\Phi(x, y)$.

Якщо крива розпадна, але не є парою прямих, що зливаються, на ній можна вказати 5 точок, жодні 4 з яких не лежать на одній прямій: три взяти на прямій l_1 , а інші дві – на прямій l_2 . Знову за теоремою 5 рівняння такої кривої єдине, з точністю до числового множника. Отже і в цьому випадку $\Phi'(x, y) = \lambda\Phi(x, y)$.

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає пару прямих, що зливаються. Тоді існує єдина пряма така, що її рівняння $l : Ax + By + C = 0$ визначає криву 2 порядку рівнянням

$$\Phi(x, y) = (Ax + By + C)^2.$$

Якщо $A'x + B'y + C' = 0$ визначає ту ж саму пряму $l : A'x + B'y + C' = 0$, то $A' = kA, B' = kB, C' = kC$, а значить

$$\Phi'(x, y) = (A'x + B'y + C')^2 = k^2(Ax + By + C)^2 = k^2\Phi(x, y),$$

що й завершує доведення.

■

Задамо на площині 4 точки M_1, M_2, M_3, M_4 , що не лежать на одній прямій. Для будь-якої точки M_5 , що не колінеарна жодній трійці точок з M_1, M_2, M_3, M_4 , існує єдина крива 2 порядку, що проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . Тому через точки M_1, M_2, M_3, M_4 можна провести безліч кривих 2 порядку. Ця множина кривих називається *жмутком* кривих 2 порядку, який визначається точками M_1, M_2, M_3, M_4 .

Нехай $\Phi_1(x, y)$ і $\Phi_2(x, y)$ дві криві 2 порядку, що проходять через точки M_1, M_2, M_3, M_4 . Тоді для будь-яких значень параметрів λ_1 і λ_2 рівняння

$$\lambda_1 \Phi_1(x, y) + \lambda_2 \Phi_2(x, y) = 0 \quad (41)$$

визначить криву 2 порядку, що також проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4 . В такому випадку говорять, що крива 41 є лінійною комбінацією кривих $\Phi_1(x, y)$ і $\Phi_2(x, y)$. Справедливе і обернене твердження: якщо в жмутку обрано дві різні криві $\Phi_1(x, y)$ і $\Phi_2(x, y)$, то будь-яка інша крива жмутка є лінійною комбінацією кривих $\Phi_1(x, y)$ і $\Phi_2(x, y)$. Дійсно, жмуток не містить двічі покритої прямої, тому якщо $\Phi(x, y)$ належить жмутку, то на ній є точка, що не колінеарна точкам M_1, M_2, M_3, M_4 . Позначимо її $M_5(x_5, y_5)$. Крива $\Phi(x, y)$ за теоремою 5 є єдиною кривою 2 порядку, що проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . З іншого боку, в лінійній комбінації $\lambda_1 \Phi_1(x, y) + \lambda_2 \Phi_2(x, y)$ знайдеться крива, що також проходить через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . Дійсно, наклавши вимогу

$$\lambda_1 \Phi_1(x_5, y_5) + \lambda_2 \Phi_2(x_5, y_5) = 0$$

із пропорції

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\Phi_2(x_5, y_5)}{\Phi_1(x_5, y_5)}$$

легко знайдемо необхідні коефіцієнти. Таким чином, $\Phi(x, y) = \lambda_1 \Phi_1(x, y) + \lambda_2 \Phi_2(x, y)$.

Рівняння (41) називається *рівнянням жмутка* кривих другого порядку. Типове використання жмутка міститься у наступному прикладі.

Приклад 6.1. Знайти рівняння кривої 2 порядку, що проходить через точки $M_1(0, 1), M_2(2, -1), M_3(3, 1), M_4(2, 0), M_5(1, 3)$.

Розв'язок. Складемо рівняння пар прямих M_1M_2, M_3M_4 та M_1M_3, M_2M_4 .

$$\begin{aligned} M_1M_2 : \frac{x-0}{2-0} &= \frac{y-1}{-1-1}, & M_4M_3 : \frac{x-2}{3-2} &= \frac{y-0}{1-0}; \\ M_1M_3 : \frac{x-0}{3-0} &= \frac{y-1}{1-1}, & M_4M_2 : \frac{x-2}{2-2} &= \frac{y-0}{0-(-1)}. \end{aligned}$$

після розкриття пропорцій маємо

$$\begin{aligned} M_1M_2 : x + y - 1 &= 0, & M_4M_3 : x - y - 2 &= 0; \\ M_1M_3 : y - 1 &= 0, & M_4M_2 : x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Складемо рівняння розпадних прямих, що проходять через точки M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$\Phi_1(x, y) = (x + y - 1)(x - y - 2) = 0, \quad \Phi_2(x, y) = (x - 2)(y - 1) = 0.$$

Складемо рівняння жмутка

$$\lambda_1(x + y - 1)(x - y - 2) + \lambda_2(x - 2)(y - 1) = 0$$

і підставимо координати точки M_5 :

$$\lambda_1(1 + 3 - 1)(1 - 3 - 2) + \lambda_2(1 - 2)(3 - 1) = 0 \quad \sim \quad -12\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0.$$

Покладемо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -6$. Рівняння шуканої кривої 2 порядку

$$(x + y - 1)(x - y - 2) - 6(x - 2)(y - 1) = 0.$$

Виконавши дії, отримаємо

$$x^2 - 6xy - y^2 + 3x + 11y - 10 = 0.$$

■

Щодо вищих вимірностей, то через $\frac{n(n+3)}{2}$ точок проходить принаймні одна квадріка [2].

7 Афінне перетворення й афінна класифікація квадрік

Нехай $A_1, \dots, A_m$ який-небудь набір точок у $\mathbb{R}^n$. Кожна пара з них, скажімо (A_1, A_2) , визначає відповідний вектор $\overrightarrow{A_1 A_2}$ у векторному просторі $\mathbf{R}^n$. Покладемо $A'_i = F(A_i)$. Перетворення F породжує перетворення $\mathbf{F}$ векторного простору $\mathbf{R}^n$, що визначається формулою

$$\mathbf{F}(\overrightarrow{A_1 A_2}) = \overrightarrow{A'_1 A'_2}.$$

Відображення $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається афінним перетворенням, якщо $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ зберігає лінійні комбінації векторів, тобто

$$\mathbf{F}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{F}(\mathbf{a}_i)$$

для будь-яких векторів з векторного простору $\mathbf{R}^n$.

Координатний вираз для афінного перетворення міститься у наступному твердженні.

Твердження 7.1. *Нехай $(O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ – афінна система координат в $\mathbb{R}^n$ і $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – афінне перетворення. Покладемо $\tilde{O} = F(O)$ і позначимо $\mathbf{X}_0 = \overrightarrow{O\tilde{O}}$. Для будь-якої точки $M(x^1, \dots, x_n)$ координати точки $\tilde{M} = F(M)$ обчислюються за формулою*

$$\tilde{X} = QX + X_0 \quad (\det Q \neq 0),$$

де Q – матриця, стовпчики якої складаються з координат векторів $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}(\mathbf{e}_i)$ в розкладанні за базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Доведення. Нехай $(O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ деяка фіксована афінна система координат у $\mathbb{R}^n$. Зі збереження лінійної залежності/незалежності випливає, що перетворення переводить базис $\mathbf{R}^n$ у базис $\mathbf{R}^n$. Покладемо $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}(\mathbf{e}_i)$, $\tilde{O} = F(O)$. Тоді $(\tilde{O}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ визначить нову афінну систему координат у $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = (\mathbf{e})X$ радіус-вектор довільної точки $\mathbb{R}^n$ у системі координат $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Розкладання вектору за базисом можна подати ту вигляді матричного добутку рядка $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ на стовпчик з координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а саме $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e})X$.

Зі збереження лінійних співвідношень випливає, що

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = x^1 \mathbf{F}(\mathbf{e}_1) + \dots + x^n \mathbf{F}(\mathbf{e}_n) = x^1 \mathbf{f}_1 + \dots + x^n \mathbf{f}_n = (\mathbf{f})X.$$

Позначимо через $\tilde{X}$ координати точки $F(X)$, а через X_0 координати точки $\tilde{O}$ у системі координат $(O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тоді за правилом додавання векторів

$$(\mathbf{e})\tilde{X} = (\mathbf{e})X_0 + (\mathbf{f})X = (\mathbf{e})X_0 + (\mathbf{e})QX = (\mathbf{e})(X_0 + QX),$$

де Q **невироджена** матриця перетворення базисів. Отже, $\tilde{X} = X_0 + QX$.

■

Афінне перетворення має обернене, що також є афінним перетворенням. Композиція афінних перетворень є афінним перетворенням. Тотожне перетворення є афінним перетворенням. Отже, афінні перетворення утворюють групу.

При афінному перетворенні *квадріка переходить у квадріку*. Доведення дослівно повторює викладки з леми 1. Ортогональне перетворення (ізометрія) характеризується матрицею з визначником $|\det Q| = 1$ і тому є афінним перетворенням.

Афінними не ізометричними перетвореннями є, наприклад, гомотетія $\tilde{X} = QX$ з матрицею

$$Q = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k > 0);$$

розтягання/стискання $\tilde{X} = QX$ з матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad (k_i > 0).$$

Дві фігури Φ_1 і Φ_2 називаються *афінно еквівалентними*, якщо існує афінне перетворення F , таке що $F(\Phi_1) = \Phi_2$. Застосовуючи стискання/розтягіння,

легко переконатися у наступних еквівалентностях для кривих 2 порядку:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 & \sim x^2 + y^2 = \pm 1 & \text{афінне дійсне/уявне коло;} \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \sim x^2 - y^2 = 1 & \text{афінна гіпербола;} \\
 \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0 & \sim x^2 \pm y^2 = 0 & \text{пара прямих, що пертинаються;} \\
 y^2 = 2px & \sim y^2 = x & \text{афінна парабола;} \\
 y^2 = \pm b^2 & \sim y^2 = \pm 1 & \text{пара паралельних прямих;} \\
 y^2 = 0 & \sim y^2 = 0 & \text{пара прямих, що зливаються.}
 \end{aligned}$$

Аналогічні еквівалентності мають місце і для поверхонь 2 порядку

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 & \sim x^2 + y^2 + z^2 = \pm 1 & \text{афінна дійсна/уявна сфера;} \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 & \sim x^2 + y^2 - z^2 = \pm 1 & \text{афінні гіперболоїди;} \\
 \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2pz & \sim x^2 \pm y^2 = z & \text{афінні параболоїди;} \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0 & \sim x^2 + y^2 \pm z^2 = 0 & \text{афінні конуси;} \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 & \sim x^2 \pm y^2 = \pm 1 & \text{афінний круговий циліндр;} \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \sim x^2 - y^2 = 1 & \text{афінний гіперболічний циліндр;} \\
 y^2 = 2px & \sim y^2 = x & \text{афінний параболічний циліндр;} \\
 \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0 & \sim x^2 \pm y^2 = 0 & \text{пара площин, що пертинаються;} \\
 y^2 = \pm b^2 & \sim y^2 = \pm 1 & \text{пара паралельних площин;} \\
 y^2 = 0 & \sim y^2 = 0 & \text{пара площин, що зливаються.}
 \end{aligned}$$

Таким чином, кожній евклідовій квадриці відповідає певний клас афінних квадрик. Сутність теореми про афінну класифікацію квадрик полягає в тому, що ця відповідність є *взаємно однозначною*.

Твердження 7.2. *Афінним перетворенням рівняння кривої 2-го порядку приводиться до однієї з наступних канонічних форм*

- $x^2 + y^2 = \pm 1$ – афінне дійсне/уявне коло;
- $x^2 - y^2 = 1$ – афінна гіпербола;
- $x^2 = y$ – афінна парабола;

- $x^2 \mp y^2 = 0$ – пара афінних дійсних/уявних прямих, що перетинаються;
- $y^2 = \pm 1$ – пара афінних дійсних/уявних паралельних прямих;
- $y^2 = 0$ – пара афінних прямих, що злилися.

Доведення. Нехай крива 2 порядку подана рівнянням

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Застосуємо метод Лагранжа зведення квадратичної частини рівняння до суми квадратів. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Виконаємо алгебраїчне перетворення

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}xy + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}y^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}y^2\right) + a_{22}y^2 =$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y^2 = \tilde{a}_{11}\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{22}y^2,$$

в процесі якого ми застосували перетворення координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y, \\ \tilde{y} = y, \end{cases}$$

що вочевидь є афінним. Таке перетворення зводить квадратичну частину рівняння до суми квадратів, а лінійну частину переводить в іншу лінійну частину. Додатковий паралельний перенос (виділенням повних квадратів за змінними $(\tilde{x}, \tilde{y})$) є афінним перетворенням, після якого рівняння кривої 2 порядку зведеться одного з виглядів

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}(\xi)^2 + \tilde{a}_{22}(\eta)^2 + \tilde{c}_1 &= 0 \quad (\tilde{a}_{22} \neq 0), \\ \tilde{a}_{11}(\xi)^2 + 2\tilde{b}_2(\eta)^2 &= 0 \quad (\tilde{a}_{22} = 0, \tilde{b}_2 \neq 0), \\ \tilde{a}_{11}(\xi)^2 + \tilde{c}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Додаткове афінне перетворення стискання/розтягіння зводить рівняння кривої до одного з 9 перелічених типів. Якщо $a_{11} = 0$ але $a_{22} \neq 0$, то слід виконати аналогічні перетворення. Якщо $a_{11} = a_{22} = 0$, то $a_{12} \neq 0$. Перетворення

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + y, \\ \tilde{y} = x - y, \end{cases}$$

є афінним і зводить квадратичну частину рівняння кривої до вигляду $a_{12}\tilde{x}^2 - a_{12}\tilde{y}^2$ і після цього можна знову виконати перетворення, аналогічні розглянутому випадку $a_{11} \neq 0$.

За теоремою про *індекс інерції* кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів квадратичної форми не залежить від способу зведення її до суми квадратів. Тож використаний метод є загальним.

■

В подібний спосіб рівняння поверхні 2 порядку зводиться до 17 афінних типів рівнянь.

Афінне перетворення не зберігає довжин відрізків і кутів, але зберігає пропорції. Нехай l_1 і l_2 дві паралельні прямі. Зафіксуємо $A_1, A_2 \in l_1$ і $A_3, A_4 \in l_2$. Відношення довжин відрізків

$$\frac{|A_1 A_2|}{|A_3 A_4|}$$

називається *простим відношенням чотирьох точок*.

Твердження 7.3. *При афінному перетворенні просте відношення чотирьох точок зберігається і називається основним інваріантом афінного перетворення.*

Доведення. Нехай дано дві паралельні прямі

$$l_1 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + t\mathbf{V}, \quad l_2 : \mathbf{X} = \mathbf{X}_2 + \theta\mathbf{V}$$

з напрямним вектором $\mathbf{V}$. На прямій l_1 зафіксуємо дві довільні точки $A_1(t_1)$, $A_2(t_2)$, а на прямій l_2 – точки $A_3(\theta_3)$, $A_4(\theta_4)$. Тоді під дією афінного перетворення

$$\tilde{X} = X_0 + QX$$

пряма l_1 переходить у пряму $\tilde{l}_1$, а l_2 у пряму $\tilde{l}_2$ з рівняннями

$$\tilde{l}_1 : \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + Q\mathbf{X}_1 + t(Q\mathbf{V}), \quad \tilde{l}_2 : \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + Q\mathbf{X}_2 + \theta(Q\mathbf{V}).$$

Точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходять у точки B_1, B_2, B_3, B_4 з координатами відповідно:

$$\begin{aligned} A_1 : X_1 + t_1 V, \quad B_1 : X_0 + QX_1 + t_1 (QV), \\ A_2 : X_1 + t_2 V, \quad B_2 : X_0 + QX_1 + t_2 (QV), \\ A_3 : X_2 + \theta_3 V, \quad B_3 : X_0 + QX_2 + \theta_3 (QV), \\ A_4 : X_2 + \theta_4 V, \quad B_4 : X_0 + QX_2 + \theta_4 (QV), \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} |A_1 A_2| &= |V| |t_2 - t_1|, \quad |B_1 B_2| = |QV| |t_2 - t_1|, \\ |A_3 A_4| &= |V| |\theta_4 - \theta_3|, \quad |B_3 B_4| = |QV| |\theta_4 - \theta_3|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що відношення

$$\frac{|A_1 A_2|}{|A_3 A_4|} = \frac{|t_2 - t_1|}{|\theta_4 - \theta_3|} = \frac{|B_1 B_2|}{|B_3 B_4|}$$

не залежать від афінного перетворення, а визначаються вибором точок на паралельних прямих.

■

Твердження 7.4. *Будь-яке афінне перетворення є композицією ортогонального перетворення (руху) і стискання/розтягіння уздовж взаємно перпендикулярних осей.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = 2$. Довільне коло під дією афінного перетворення F перейде в замкнену криву 2-го порядку, тому що афінне перетворення взаємне однозначне. Серед кривих 2-го порядку замкненою є тільки еліпс. Отже, образом кола буде еліпс. Позначимо через $\tilde{d}_1$ і $\tilde{d}_2$ його головні діаметри. Діаметр $\tilde{d}_1$ поділяє навпіл хорди, паралельні до діаметру $\tilde{d}_2$. Оскільки при афінному перетворенні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, то сімейство хорд, паралельних діаметру $\tilde{d}_2$ є образом сімейства паралельних хорд кола. З огляду на те, що афінне перетворення зберігає відношення відрізків, то діаметр $\tilde{d}_1$ є образом діаметру d_1 кола, що проходить через середини сімейства паралельних хорд кола. З тієї ж причини, діаметр $\tilde{d}_2$ є образом діаметра кола d_2 , що проходить через середини сімейства хорд кола, паралельних до діаметру d_1 . Очевидно, що діаметри d_1 і d_2 – два взаємно перпендикулярних діаметри кола. Тоді прямі d_1 і d_2 можна сумістити з прямими $\tilde{d}_1$ і $\tilde{d}_2$ рухом. При цьому центр кола й еліпса збіжаться. Щоб одержати з даного кола даний еліпс досить тепер виконати стискання/розтягіння уздовж діаметрів $\tilde{d}_1$ і $\tilde{d}_2$.

При $n > 2$ розгляди аналогічні. Сфера переходить в еліпсоїд. Діаметральні площини еліпсоїду є образами діаметральних площин сфери, перпендикулярних відповідним сімействам паралельних хорд. Оскільки головні діаметри еліпсоїду взаємно перпендикулярні (нормалі до них – власні вектори матриці квадратичної частини рівняння поверхні, і вони можуть завжди бути обрані ортонормованими), їм відповідають діаметри сфери так само взаємно ортогональні. Ці діаметри сфери і головні діаметри еліпсоїду можна сумістити рухом. Еліпсоїд отримаємо зі сфери стисканням/розтягінням уздовж нормалей до головних діаметрів.

■

Література

- [1] О. А. Борисенко. Аналітична геометрія / О. А. Борисенко, Л. М. Ушакова. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.
- [2] М. Берже. Геометрия т.2/ М. Берже, М.: Мир, 1984. – 366 с.
- [3] В.В. Воеводин. Линейная алгебра/В.В. Воеводин. – М.:Наука, 1974. – 336 с.
- [4] А. И. Кострикин. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1985. – 303 с.

- [5] В.В. Кириченко. Збірник задач з аналітичної геометрії/ За редакцією В.В. Кириченка. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013. – 200 с.
- [6] П.С. Моденов. Сборник задач по аналитической геометрии/ П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука. 1976. – 384 с.
- [7] А.В. Погорелов. Аналитическая геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1968. – 176 с.
- [8] М.М. Постников. Аналитическая геометрия/ М.М. Постников. – М.: Наука, 1988 – 220 с.

Навчальне видання

Ямпольський Олександр Леонідович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Криві і поверхні 2 порядку: загальна теорія.

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів 1-го курсу математичних спеціальностей університетів.

Коректор М. С. Хащина
Комп'ютерне верстання О.Л. Ямпольський
Макет обкладинки І. М. Дончик

Формат $60 \times 84/16$. Умов. друк. арк. 1,75. Наклад 100 прим. Зам. № 72/12.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61077, м. Харків, м. Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
тел. 705-24-32