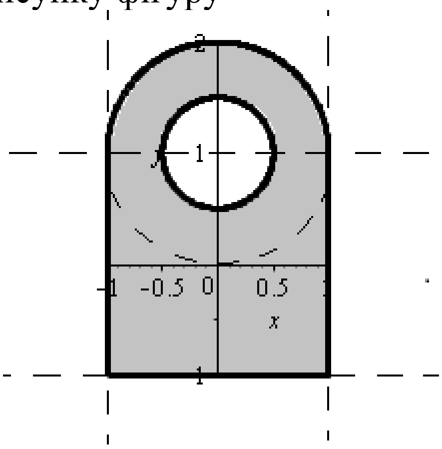
Доля Петро Григорович
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
факультет математики і інформатики
кафедра теоретичної та прикладної інформатики
2024 р.

Аналітичні методи геометричного моделювання з Python.

Глава 4. Неявні рівняння кривих і поверхонь.

Зміст

Нехай Ω є областю n-вимірного простору. Припустимо, що за допомогою операцій над множинами ми можемо репрезентувати її у вигляді доповнення, перетину та об'єднання кількох підобластей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$,, що мають більш просту форму ніж Ω, і для кожної Ω_i ми знаємо функцію $\omega_i(x_1, \dots, x_n)$ позитивну всередині області, негативну – поза нею і рівну нулю на її межі. Її ми зватимемо функцією ідентифікації або просто ідентифікатором області. Наприклад, показану на наступному рисунку фігуру



за допомогою логічної формули $\Omega = \big((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3\big) \cap \Omega_4^{\neg}$ (тут $\Omega_4^{\neg}$ позначає доповнення області) можна подати у вигляді комбінації підобластей Ω_i з ідентифікаторами $\omega_i(x, y)$:

Ω_1: $\omega_1(x,y) = 1 - x^2 \geq 0$; вертикальна смуга;

Ω_2: $\omega_2(x,y) = 1 - y^2 \geq 0$; горизонтальна смуга;

Ω_3: $\omega_3(x,y) = 1 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$; зсунуте вгору коло радіуса 1;

Ω_4: $\omega_4(x,y) = \dfrac{1}{4} - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$. зсунуте вгору коло радіуса 1/2.

Побудуємо функцію двох змінних $ir(x,y)$, яка позитивна в області першого квадранта $x > 0, y > 0$, дорівнює нулю на його граничних променях $y = 0 \land x \geq 0$, $x = 0 \land y \geq 0$, і негативна для інших значень x, y. Побудуємо також функцію двох змінних $ur(x,y)$, яка негативна у внутрішніх точках третього квадранта $x < 0, y < 0$, дорівнює нулю на його граничних променях $y = 0 \land x \leq 0$, $x = 0 \land y \leq 0$, і позитивна для інших точок площини XY. Замінимо в логічній формулі операції перетину $\cap$ функцією $ir(\dots,\dots)$ з аргументами ідентифікаторами відповідних підобластей, операції об'єднання $\cup$ – функціями $ur(\dots,\dots)$, а операцію доповнення – арифметичним запереченням (тобто замість $\Omega_i^{\neg}$ в формулі використаємо $-\omega_i$). Тоді отримувана композиція функцій $ir(\dots), ur(\dots)$ та $\omega_i(x,y)$ дасть функцію ідентифікації результівної області. Наприклад, для області, утворюваної логічною формулою $\Omega = \big((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3\big) \cap \Omega_4^{\neg}$, суперпозиція

$$\omega(x,y) = ir(ur(ir(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)), \omega_3(x,y))\ , -\omega_4(x,y))$$

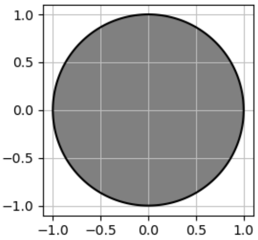
являтиме функцію ідентифікації, а неявним рівнянням її межі буде $\omega(x,y) = 0$. Наведений підхід є предметом обговорення цієї глави.

4.1. Неявні рівняння меж плоских фігур.

Як зазначено вище, для визначення замкнутої області (фігури) будемо застосовувати функцію $\omega(x,y)$, яка позитивна всередині зони, дорівнює нулю на її межі, і негативна зовні області. Наприклад, для кола одиничного радіуса з центром в початку координат такою функцією може бути $\omega(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Для напівплощини, що розташована з одного боку прямої $a\,x + b\,y + c = 0$ такою функцією буде або $\omega(x,y) = a\,x + b\,y + c$, або $\omega(x,y) = -a\,x - b\,y - c$, в залежності від обраної частини площини. Для стислості такі функції ми зватимемо функціями ідентифікації області або коротко – ідентифікатором області. Очевидно, що для області таких функцій можна побудувати безліч. Маючи функції ідентифікації $\omega_1(x,y)$ і $\omega_2(x,y)$ двох областей, можна побудувати такі ж функції (позитивні всередині і негативні зовні) $\omega_\cap(x,y)$ для області перетину $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\omega_\cup(x,y)$ – для об'єднання $\Omega_1 \cup \Omega_2$ та $\omega_\backslash(x,y)$ – для різниці $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ областей. При цьому неявним рівнянням межі нової області буде відповідно $\omega_\cap(x,y) = 0$, $\omega_\cup(x,y) = 0$ або $\omega_\backslash(x,y) = 0$. У літературі для способа побудови таких функцій є обґрунтування [1], засноване на використанні булевих функцій. Але існує інша інтерпретація, яка надається в цій главі.

Для візуалізації області, якщо є її функція ідентифікації, можна використовувати різноманітні програмні середовища. В Python це можуть бути пакет символьних обчислень SymPy та візуалізації символьних виразів spb (Sympy Plotting Backends).

```
from sympy import symbols
from spb import plot_implicit
x,y = symbols("x y")
w=1-x**2-y**2
plot_implicit(w>0,(x,-1.1,1.1),(y,-1.1,1.1),
    aspect=(1,1),border_color="k",
    n=200,color='gray')
```



Якщо нерівність прибрати, тобто використати інструкцію
`plot_implicit(w,(x,-1.1,1.1),(y,-1.1,1.1),...)`
то буде накреслено криву – контур області. Повсюди далі ми зазвичай будуватимемо зафарбовану область, щоб показувати не тільки лінію, що представляє межу, але й ту частину площини, в якій функція ідентифікації позитивна.

4.1.1. Перетин областей.

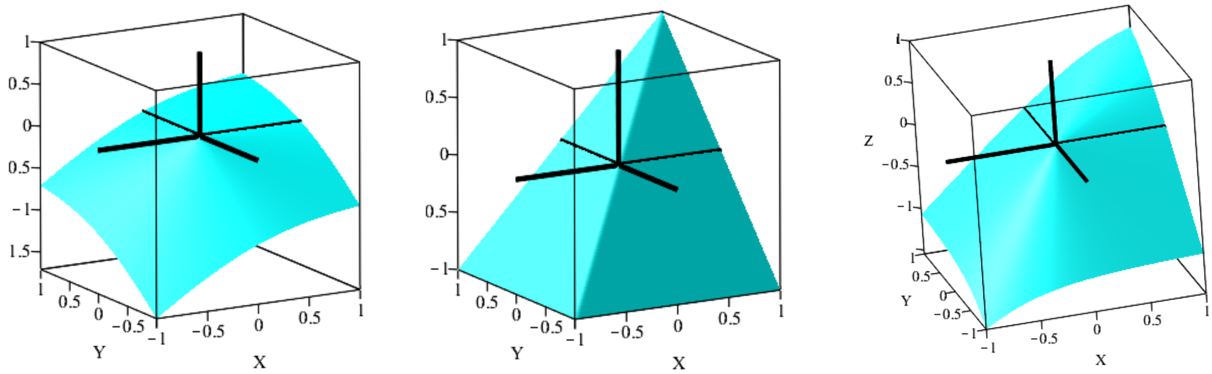
Розглянемо функцію двох змінних $ir(x,y)$ позитивну в зоні першого квадранта $x>0, y>0$ таку, що обертається в нуль на його граничних променях $y=0 \wedge x\geq 0$, $x=0 \wedge y\geq 0$, і негативну для інших значень x,y. Прикладами таких функцій є

$$ir_0(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right); \qquad (1a)$$

$$ir_1(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|); \qquad (1b)$$

$$ir_\alpha(x,y,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\,\alpha\,x\,y}\right), -1<\alpha\leq 1. \qquad (1c)$$

Ми їх зватимемо виконавчими функціями операції перетину областей, або коротко «функціями перетину». Їх графіки наведено на наступному рисунку.



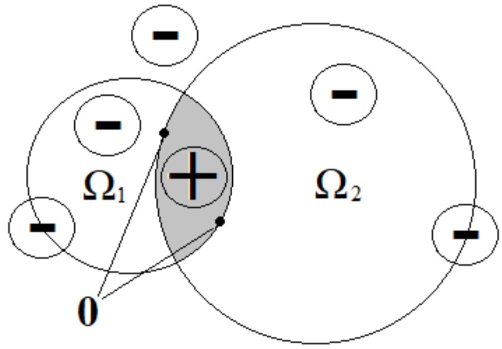
$ir_0(x,y)$ $\qquad$ $ir_1(x,y)$ $\qquad$ $ir_\alpha(x,y,4/5)$

Далі ми часто використовуватимемо позначення $ir(u,v)$, і в якості останнього виступатиме будь-яка з функцій (1), або будь-яка інша, що задовольняє спеціальним умовам знаків

$$ir(u,v)=\begin{cases} ir(u,v)>0\,,\ u>0\ \wedge\ v>0 \\ ir(u,v)=0\,,(u=0\ \wedge\ v\geq 0)\ \vee\ (u\geq 0\ \wedge\ v=0) \\ ir(u,v)<0 \quad \text{в інших випадках} \end{cases} \qquad (2)$$

Зауважимо, що $ir(u,v)$ є функцією ідентифікації першого квадранта $u \geq 0 \ \wedge \ v \geq 0$.

Припустимо, що ідентифікатором замкнутої області Ω_1 є функція $\omega_1(x,y)$, а замкнутої області Ω_2 – функція $\omega_2(x,y)$. Розглянемо множину точок (x,y), яка визначається нерівністю $ir(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)) \geq 0$. Покажемо, що вона збігається з областю перетину $\Omega_1 \cap \Omega_2$, і $ir(\omega_1,\omega_2)=0$ лише в граничних точках $\Omega_1 \cap \Omega_2$.



Знаки функції $ir(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))$.

Нехай точка $P(x,y) \notin \Omega_1 \ \wedge \ P(x,y) \notin \Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y)<0$ і $\omega_2(x,y)<0$. Відповідно до (2), $ir(\omega_1<0,\omega_2<0)<0$ як функція двох від'ємних аргументів.

Нехай $P(x,y) \in \Omega_1 \backslash \partial\Omega_1 \ \wedge \ P(x,y) \notin \Omega_2$, де $\partial\Omega$ позначає межу області Ω. Тоді $\omega_1(x,y)>0$, $\omega_2(x,y)<0$ і $ir(\omega_1>0,\omega_2<0)<0$, оскільки другий аргумент $ir(u,v)$ від'ємний.

Нехай $P(x,y) \notin \Omega_1 \wedge \ P(x,y) \in \Omega_2 \backslash \ \partial\Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y)<0$, $\omega_2(x,y)>0$ і $ir(\omega_1<0,\omega_2>0)<0$, оскільки перший аргумент $ir(u,v)$ від'ємний.

Якщо $P(x,y) \in \partial\Omega_1 \ \wedge \ P(x,y) \notin \Omega_2$, то $\omega_1(x,y)=0$, $\omega_2(x,y)<0$. Тому, відповідно до (2), $ir(\omega_1=0,\omega_2<0)<0$.

Якщо $P(x,y) \notin \Omega_1 \wedge \ P(x,y) \in \partial\Omega_2$ то $\omega_1(x,y)<0$, $\omega_2(x,y)=0$. Тому, відповідно до (2), $ir(\omega_1<0,\omega_2=0)<0$.

Нехай $P(x,y) \in \Omega_1 \backslash \partial\Omega_1 \wedge \ P(x,y) \in \Omega_2 \backslash \partial\Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y)>0$ і $\omega_2(x,y)>0$. Відповідно до (2), отримуємо $ir(\omega_1>0,\omega_2>0)>0$.

Якщо $P(x,y) \in \partial\Omega_1 \wedge \ P(x,y) \in \Omega_2$, то, $\omega_1(x,y)=0$, $\omega_2(x,y) \geq 0$. Тому, відповідно до (2), $ir(\omega_1=0,\omega_2 \geq 0)=0$.

Якщо $P(x,y) \in \Omega_1 \wedge \ P(x,y) \in \partial\Omega_2$, то $\omega_1(x,y) \geq 0$, $\omega_2(x,y)=0$. Тому, відповідно до (2), $ir(\omega_1 \geq 0,\omega_2=0)=0$.

Таким чином, вираз $ir(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))$ додатний лише для внутрішніх точок області $\Omega_1 \cap \Omega_2$, дорівнює нулю в її граничних точках, і від'ємний – зовні. Отже, виконується наступна

Лема 1. Функція $\omega_\cap(x,y)$ ідентифікації зони перетину $\Omega_1 \cap \Omega_2$ замкнутих областей Ω_1 і Ω_2 може бути побудована за формулою

$$\omega_\cap(x,y) = ir\big(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)\big)\,, \tag{3}$$

де $\omega_1(x,y)$ і $\omega_2(x,y)$ є функціями ідентифікації областей Ω_1 та Ω_2.

Слідство. Неявне рівняння межі області $\Omega_1 \cap \Omega_2$ має вигляд

$$ir\big(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)\big) = 0\,. \tag{4}$$

Зауваження. Перетин будь-якого набору замкнутих множин є замкнутою множиною. Тому, якщо Ω_1 і Ω_2 замкнуті області, то $\Omega_1 \cap \Omega_2$ теж є замкнутою.

Приклад 1. Побудувати неявне рівняння контура прямокутника $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$.

Розв'язання. Функцію ω_1 ідентифікації смуги $-a \le x \le a\ (a > 0)$ можна записати, наприклад, у вигляді $\omega_1(x, y) = a - |\, x\,|$. Аналогічно, ідентифікатор смуги $-b \le y \le b\ (b > 0)$ може мати вигляд $\omega_2(x, y) = b - |\, y\,|$. Використовуючи для функції $ir(\omega_1, \omega_2)$ вираз ($1b$), ідентифікатор $\omega_r(x, y)$ області перетину смуг, тобто зони прямокутника, матиме вигляд

$$\omega_r(x, y) = \frac{1}{2}(\omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) - |\omega_1(x, y) - \omega_2(x, y)|) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(a + b - |\, x\,| - |\, y\,| - \big|\, a - b + |\, y\,| - |\, x\,|\big|\big).$$

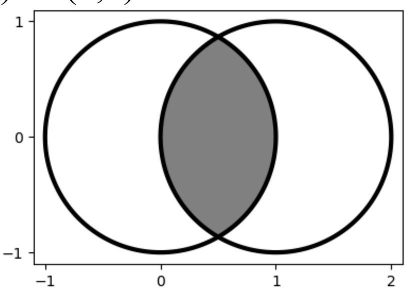
Рівнянням контура прямокутника $[-a,\ a] \times [-b,\ b]$ буде

$$a + b - |\, x\,| - |\, y\,| - \big|\, a - b + |\, y\,| - |\, x\,|\big| = 0,$$

оскільки множник 1/2 є несуттєвим.

■

Приклад 2. Побудувати неявне рівняння контура зони перетину двох одиничних кіл з центрами в точках (0,0) та (1,0).



Розв'язання. Функції ідентифікації кіл мають вид $\omega_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ та $\omega_2(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - y^2$. Тоді, відповідно до (3), маємо $\omega(x, y) = ir(1 - x^2 - y^2, 1 - (x - 1)^2 - y^2)$. Обираючи ($1b$) в якості виконавчої функції перетину, після деяких спрощень отримуємо

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2}|\, 2\,x - 1\,|$$

Неявним рівнянням межі «луночки» буде $\omega(x, y) = 0$.

Приклад 3. Побудувати неявне рівняння контура чверті одиничного кола, розташованого в першому квадранті $x \ge 0\,, y \ge 0$.

Розв'язання. Подамо область як перетин напівплощин $y \ge 0$, $x \ge 0$ з одиничним колом $1 - x^2 - y^2 \ge 0$. Функції ідентифікації цих зон можна обрати наступними:

$$\omega_1(x, y) = y\,, \qquad \omega_2(x, y) = x\,, \qquad \omega_3(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Перетин напівплощин визначає зону першого квадранта з ідентифікатором

$$\omega_{12}(x, y) = ir_1\big(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)\big) = ir_1(y, x) = (x + y - |x - y|)/2$$

Перший квадрант ми перетинаємо з областю одиничного кола. Функція ідентифікації результівної області дорівнюватиме

$$\omega_{123}(x, y) = ir\big(\omega_{12}(x, y), \omega_3(x, y)\big)$$

Виконаємо обчислення в Python за допомогою модуля символьної математики SymPy.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
x,y = symbols("x y")
```

Відповідно до (1b) створіть виконавчу функцію $ir(u,v)$ операції перетину.

```
def ir(x,y):
    return (x+y-Abs(x-y))/2
```

Створіть символьні вирази, які відповідають функціям ідентифікації $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

```
w1=y
w2=x
w3=1-x**2-y**2
```

Виконайте суперпозицію цих виразів відповідно до операції перетинання і надрукуйте результівну функцію ідентифікації (щоб спростити відповідь, домножимо результат на сталу 4, що є несуттєвим).

```
w12=ir(w1,w2)
w123=ir(w12,w3)
```

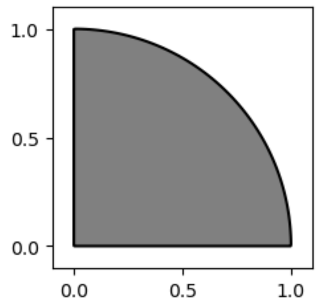
Ідентифікатором чверті кола буде функції $\omega_{123}(x,y)$, яка має наступний вид

```
display(simplify(4*w123))
```

$$2 + x + y - 2x^2 - 2y^2 - |x - y| - \left|-2 + x + y + 2x^2 + 2y^2 - |x - y|\right|$$

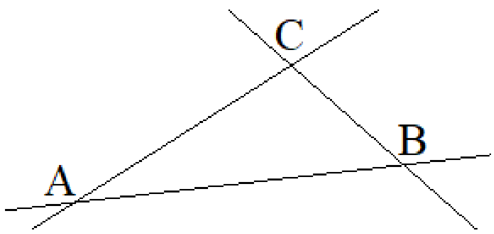
Використовуючи символьний вираз `w123`, побудуйте зображення чверті кола.

```
plot_implicit(w123>0,(x,-0.1,1.1),(y,-0.1,1.1),n=200,
    aspect=(1,1),border_color="k",color='gray',grid=False)
plt.gca().set(xticks=[0,0.5,1],yticks=[0,0.5,1])
plt.show()
```



Звісно, що неявним рівнянням контура фігури буде $\omega_{123}(x,y) = 0$

Приклад 4. Побудувати неявне рівняння контура трикутника з вершинами в точках `A(-2,-2),B(1,0),C(0,2)`.



Р о з в ' я з а н н я . Подамо зону трикутника як перетин трьох напівплощин. Перша буде розташована нижче прямої AC, друга – лівіше прямої BC, третя – вище прямої AB. Ідентифікатори цих напівплощин можна задати наступними:

$$\omega_{AC}(x,y) = 2 + 2x - y, \quad \omega_{BC}(x,y) = 2 - 2x - y, \quad \omega_{AB}(x,y) = 2 - 2x + 3y.$$

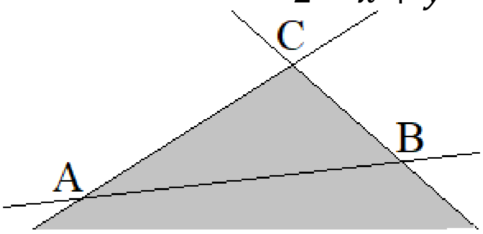
Для перевірки того, що ми правильно обрали знаки функцій ідентифікації, достатньо обчислити їх значення в одній внутрішній точці, наприклад, в (0,0).

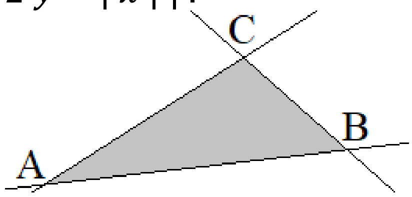
Перетин перших двох напівплощин виділяє зону кута, зафарбованого на наступному рисунку ліворуч. Її ідентифікатором буде

$$\omega_{\angle ACB}(x,y) = ir_1(2 + 2\,x - y, 2 - 2\,x - y) = 2 - 2\,|\,x\,| - y\,.$$

Зону кута ми перетинаємо з напівплощиною, що лежить вище прямої AB, і отримуємо трикутник (наступний рисунок праворуч). Його функцією ідентифікації буде

$$\omega_{ABC}(x,y) = ir_1(2 - 2\,|\,x\,| - y,\ 2 - 2\,x + 3\,y) =$$
$$= 2 - x + y - |\,x\,| - |\,x - 2\,y - |\,x\,|\,|\,.$$





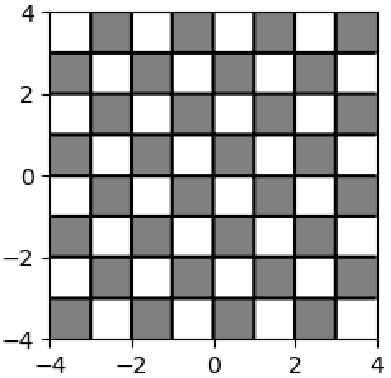
Неявним рівнянням контура трикутника буде $\omega_{ABC}(x,y) = 0$.

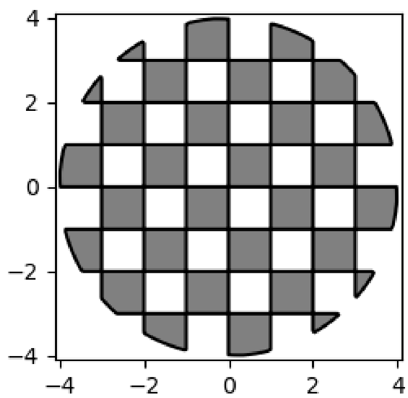
Зауваження. В Python візуалізацію трикутника можна виконати по-аналогії з попереднім прикладом.

Приклад 5. Побудувати функцію, яка буде додатною всередині множини темних точок площини, зображених на наступному рисунку праворуч, і яка дорівнює нулю на їх межі. Це є набором чорних квадратних клітин шахової дошки, розташованих всередині і на межі кола.

Р о з в ' я з а н н я . Нехай ширина клітини дорівнює одиниці, а коло має радіус 4 і центр на початку координат. Легко бачити, що функцію ідентифікації області «нескінченної шахівниці» (наступний рисунок ліворуч) можна побудувати по формулі $\omega_1(x,y) = \sin\pi\,x \cdot \sin\pi\,y$, а внутрішня область кола визначається функцією $\omega_2(x,y) = 16 - x^2 - y^2$. Тоді

$$\omega(x,y) = ir_1(\sin\pi\,x \cdot \sin\pi\,y, 16 - x^2 - y^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin\pi\,x \cdot \sin\pi\,y + 16 - x^2 - y^2 - |\sin\pi\,x \cdot \sin\pi\,y - 16 + x^2 + y^2|)$$





4.1.2. Доповнення областей.

Легко зрозуміти що, коли $\omega_\Omega(x,y)$ є функцією ідентифікації області Ω, то ідентифікатором $\omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y)$ замикання доповнення $\overline{\Omega^\neg} = \Omega^\neg \cup \partial\Omega$ ($\Omega^\neg$ позначає доповнення області Ω, $\overline{\Omega}$ – замикання, а $\partial\Omega$ – множину точок межі Ω) буде $-\omega_\Omega(x,y)$. Дійсно, область $\Omega^\neg \cup \partial\Omega$ складається з точок площини, що не належать Ω, і граничних точок Ω. Якщо точка $P(x,y) \in \partial\Omega$, то $\omega_\Omega(x,y) = 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y) = -\omega_\Omega(x,y) = 0$. Якщо $P(x,y) \in \Omega^\neg$, то $\omega_\Omega(x,y) < 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y) = -\omega_\Omega(x,y) > 0$. Якщо $P(x,y) \in \Omega \setminus \partial\Omega$, то $\omega_\Omega(x,y) > 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y) = -\omega_\Omega(x,y) < 0$. Таким чином, виконується наступна

Лема 2. Функція $\omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y)$ позитивна поза областю Ω, рівна нулю на її межі, і від'ємна всередині (ідентифікатор замикання доповнення), може бути побудована за формулою

$$\omega_{\Omega^\neg \cup \partial\Omega}(x,y) = -\omega_\Omega(x,y) \tag{5}$$

де $\omega_\Omega(x,y)$ є функцією ідентифікації області Ω.

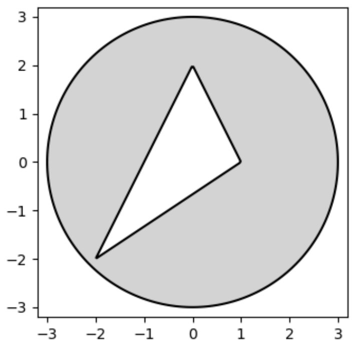
Приклад 1. Побудувати ідентифікатор зовнішності трикутника з вершинами в точках `A(-2,-2)`, `B(1,0)`, `C(0,2)`, що розташована всередині кола радіуса 3 і центром на початку координат.

Розв'язання. Для нашого трикутника у прикладі 4 попереднього пункту ми побудували функцію ідентифікації у вигляді

$$\omega_{ABC}(x,y) = 2 - x + y - |\, x \,| - |\, x - 2\, y - |\, x \,|\, |$$

Очевидно, що функція позитивна поза зоною трикутника, рівна 0 на його межі, і від'ємна в середині, буде відрізнятися від цієї тільки знаком. Тоді для бажаної області (зовнішність трикутника всередині кола) матимемо

$$\omega(x,y) = ir_1(-\omega_{ABC}(x,y), 9 - x^2 - y^2) =$$
$$= 7 + x - y - x^2 - y^2 + |x| + \left|-x + 2\, y + |x|\right| -$$
$$- \left|-11 + x - y + x^2 + y^2 + |\, x \,| + \left|-x + 2\, y + |\, x \,|\right|\right|.$$



Зауваження. Перетворення, які виконувалися в попередніх прикладах, можна робити в будь якій системі символьних обчислень або, наприклад, в Python за допомогою процедур модуля SymPy.

4.1.3. Об'єднання плоских областей.

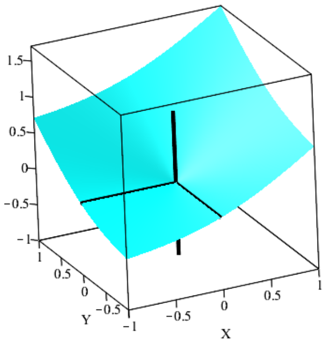
Аналогічно до п. 4.1.1 можна конструювати неявні рівняння меж об'єднаних областей. Для цього нам знадобляться наступні допоміжні функції.

$$ur_0(x,y) = \tfrac{1}{2}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\right); \qquad (6a)$$

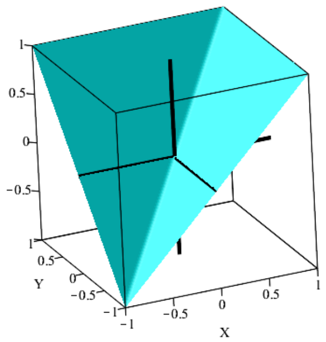
$$ur_1(x,y) = \tfrac{1}{2}(x + y + |x - y|); \qquad (6b)$$

$$ur_\alpha(x,y,\alpha) = \tfrac{1}{1+\alpha}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,\alpha\, x\, y}\,\right), -1 < \alpha \le 1. \qquad (6c)$$

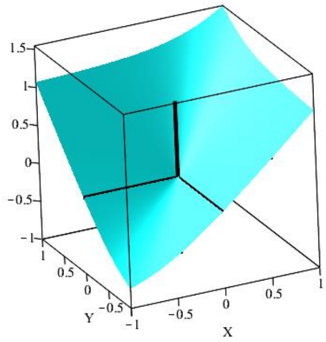
Порівняно з функціями $ir_\alpha(x,y)$ вони мають лише відмінність у знаку. Ми їх зватимемо виконавчими функціями операції об'єднання областей, або коротко «функціями об'єднання». Їх графіки наведено на наступному рисунку



$ur_0(x,y)$



$ur_1(x,y)$

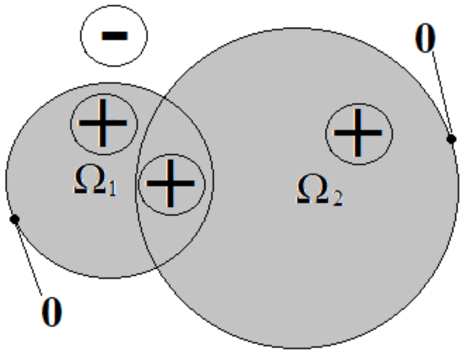


$ur_\alpha(x,y,4/5)$

В подальшому ми часто застосовуватиме позначення $ur(u,v)$, і в якості останнього виступатиме будь-яка з функцій (6), або будь-яка інша, що задовольняє спеціальним умовам знаків

$$ur(u,v) = \begin{cases} < 0\,, \; u < 0 \;\wedge\; v < 0\,; \\ = 0\,, (u = 0 \;\wedge\; v \le 0) \;\vee\; (u \le 0 \;\wedge\; v = 0)\,; \\ > 0\,, \text{в інших випадках}\,. \end{cases} \qquad (7)$$

Припустимо, що ідентифікатором замкнутої області Ω_1 є функція $\omega_1(x,y)$, а замкнутої області Ω_2 – функція $\omega_2(x,y)$. Розглянемо множину точок (x,y), яка визначається нерівністю $ur(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)) \ge 0$. Покажемо, що вона збігається з областю об'єднання $\Omega_1 \cup \Omega_2$, і $ur(\omega_1,\omega_2) = 0$ лише в граничних точках $\Omega_1 \cup \Omega_2$.



Знаки функції $ur(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y))$.

Нехай точка $P(x,y) \notin \Omega_1 \;\wedge\; P(x,y) \notin \Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y) < 0$ і $\omega_2(x,y) < 0$. Відповідно до (7), $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 < 0) < 0$ як функція двох від'ємних аргументів. Тобто для будь-якої зовнішньої точки області $\Omega_1 \cup \Omega_2$ функція $ur(\omega_1,\omega_2) < 0$.

Нехай $P(x,y) \in \Omega_1 \backslash \partial\Omega_1 \;\wedge\; P(x,y) \notin \Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y) > 0$ і $\omega_2(x,y) < 0$. Відповідно до (7), $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 < 0) > 0$.

Нехай $P(x,y) \notin \Omega_1 \wedge P(x,y) \in \Omega_2 \backslash \partial\Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y) < 0$ і $\omega_2(x,y) > 0$. Відповідно до (7) маємо $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 > 0) > 0$.

Нехай $P(x,y) \in \Omega_1 \backslash \partial\Omega_1 \wedge P(x,y) \in \Omega_2 \backslash \partial\Omega_2$. Тоді $\omega_1(x,y) > 0$ і $\omega_2(x,y) > 0$. Відповідно до (7), $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0) > 0$.

Якщо $P(x,y) \in \Omega_1 \wedge P(x,y) \in \partial\Omega_2$, то $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 = 0) > 0$.

Якщо $P(x,y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x,y) \in \Omega_2$, то $ur(\omega_1 = 0, \omega_2 > 0) > 0$.

Таким чином, для будь-якої внутрішньої точки області $\Omega_1 \cup \Omega_2$ функція $ur(\omega_1, \omega_2) > 0$.

Якщо $P(x,y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x,y) \notin \Omega_2$, то $ur(\omega_1 = 0, \omega_2 < 0) = 0$.

Якщо $P(x,y) \notin \Omega_1 \wedge P(x,y) \in \partial\Omega_2$, то $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 = 0) = 0$.

Отже $ur(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)) = 0$ лише в граничних точках області $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Таким чином, виконується наступна

Лема 3. Функція $\omega_\cup(x,y)$ ідентифікації об'єднання $\Omega_1 \cup \Omega_2$ замкнутих областей Ω_1 і Ω_2 може бути побудована за формулою

$$\omega_\cup(x,y) = ur\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big)\,, \tag{8}$$

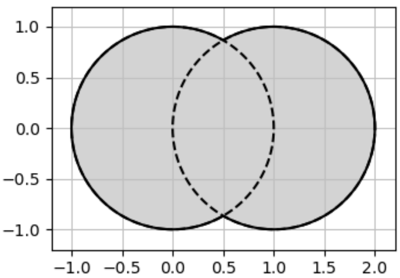
де $\omega_1(x,y)$ і $\omega_2(x,y)$ є функціями ідентифікації областей Ω_1 та Ω_2.

Слідство. Неявне рівняння межі області $\Omega_1 \cup \Omega_2$ має вигляд

$$ur\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big) = 0\,. \tag{9}$$

Зауваження. Об'єднання скінченної кількості замкнутих множин є замкнутою множиною. Тому, якщо Ω_1 і Ω_2 замкнуті області, то $\Omega_1 \cup \Omega_2$ теж є замнутою.

Приклад 1. Побудувати рівняння межі області об'єднання двох одиничних кіл з центрами в точках (0,0) та (1,0).



Р о з в ' я з а н н я . Функції ідентифікації кіл мають вид $\omega_1(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ та $\omega_2(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$. Тоді, відповідно до (8), матимемо $\omega_\cup(x,y) = ur(1 - x^2 - y^2, 1 - (x-1)^2 - y^2)$. Обираючи $(6b)$ в якості виконавчої функції операції об'єднання, після деяких спрощень (і домноження на 2) отримаємо

$$\omega_\cup(x,y) = 1 + 2\,x - 2x^2 - 2\,y^2 + |\,2\,x - 1\,|$$

Неявним рівнянням зовнішнього контура області об'єднання буде $\omega_\cup(x,y) = 0$. ■

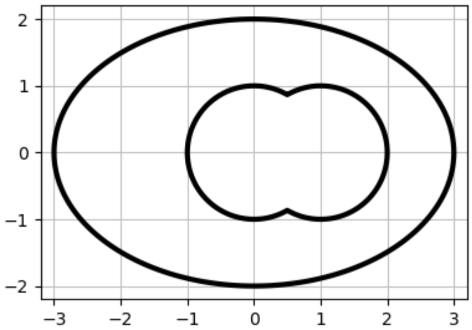
Приклад 2. Побудувати рівняння межі області, яка є перетином зовнішності двох одиничних кіл з центрами в точках (0,0) та (1,0), та внутрішності еліпса $1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$.

Р о з в ' я з а н н я . Функція $\omega_\cup(x,y)$ ідентифікації області об'єднання кіл побудована в попередньому прикладі, а ідентифікатором її зовнішності (з межею) буде $\omega_{\overline{\cup}}(x,y) = -\omega_{\cup}(x,y)$. Перетинаючи цю зону (зовнішність двох кіл) з внутрішністю еліпса, ідентифікатор якого має вид $\omega_O(x,y) = 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, отримаємо ідентифікатор області. Прирівнявши його до нуля, отримаємо неявне рівняння бажаного контура.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols,Abs, init_printing,
                            simplify,pi,sin,sqrt,expand
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ur(x,y): return (x+y+Abs(x-y))/2
def ir(x,y): return (x+y-Abs(x-y))/2
x,y = symbols("x y")
w1=1-x**2-y**2
w2=1-(x-1)**2-y**2
w12=expand(ur(w1,w2))
w3=1-x**2/9-y**2/4
w123=simplify(72*ir(-w12,w3))
display(w123)    # ідентифікатор області
```

$18 - 36x + 32x^2 + 27y^2 - 18\,|\,2x - 1\,| - \left|\,54 + 36x - 40x^2 - 45y^2 + 18\,|\,2x - 1\,|\right|$

```
plot_implicit(w123,(x,-3.2,3.2),(y,-2.2,2.2),
    aspect=(1,1),n=200,color='k',
    rendering_kw={ "linewidths":3})
plt.show()
```



Отже, неявним рівнянням наведеної лінії є `w123=0`.

4.1.4. Різниця областей.

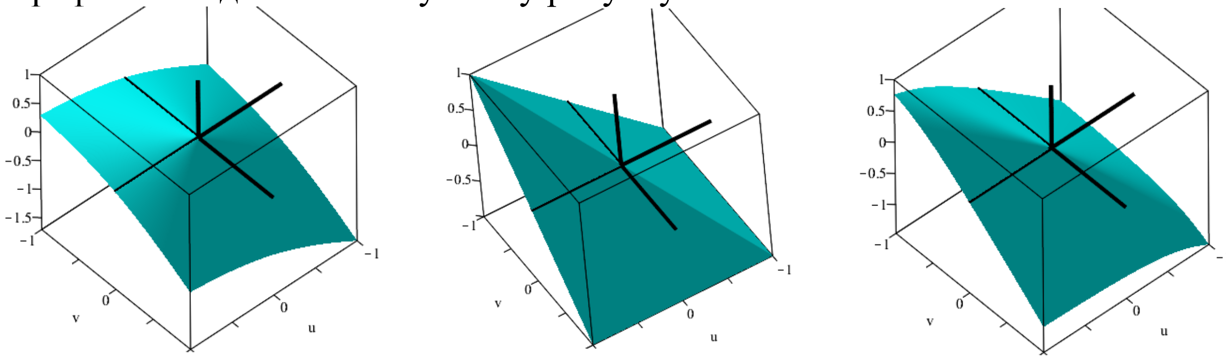
Оскільки має місце $\Omega_1 \backslash \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2^{\neg}$, а ідентифікатор $\omega_{\overline{\Omega^{\neg}}}$ замикання доповнення $\overline{\Omega^{\neg}}$ конструюється заміною знаку $(\omega_{\overline{\Omega^{\neg}}} = -\omega_{\Omega})$, то виконавчі функції $dr(x,y)$ замикання різниці областей $\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2}$ можна будувати за формулою $dr(x,y) = ir(x,-y)$. Наприклад

$$dr_0(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - y - \sqrt{x^2 + y^2}\right); \qquad (10a)$$

$$dr_1(x,y) = \frac{1}{2}(x - y - |\,x + y\,|); \qquad (10b)$$

$$dr_\alpha(x,y,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x - y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2\,\alpha\,x\,y}\,\right), -1 < \alpha \le 1\,. \qquad (10c)$$

Їх графіки наведено на наступному рисунку.



$dr_0(x,y)$ $\qquad$ $dr_1(x,y)$ $\qquad$ $dr_\alpha(x,y,4/5)$

Для виконавчих функцій замикання різниці областей суттєвим є лише наступний розподіл знаків

$$dr(u,v) = \begin{cases} > 0\,,\ u > 0\ \wedge\ v < 0\,; \\ = 0\,, (u = 0\ \wedge\ v \le 0)\ \vee\ (u \ge 0\ \wedge\ v = 0)\,; \\ < 0\,, \text{в інших випадках}\,. \end{cases} \qquad (11)$$

Перефразуючи твердження п. 4.1.1, маємо

Лема 4. Функція $\omega_{\overline{\Omega_1\backslash\Omega_2}}(x,y)$ ідентифікації замикання різниці областей $\overline{\Omega_1\backslash\Omega_2}$ може бути побудована за формулою

$$\omega_{\overline{\Omega_1\backslash\Omega_2}}(x,y) = dr\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big)\,, \qquad (12)$$

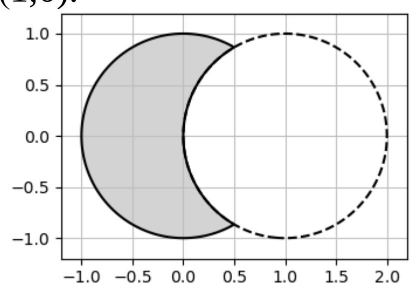
де $\omega_1(x,y)$ і $\omega_2(x,y)$ є функціями ідентифікації областей Ω_1 та Ω_2.

Слідство. Неявне рівняння межі області $\Omega_1\backslash\,\Omega_2$ має вигляд

$$dr\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big) = 0\,. \qquad (13)$$

Зауваження. Різниця $\Omega_1\backslash\,\Omega_2$ двох замкнутих множин Ω_1, Ω_2 не є замкнутою множиною. Тому в лемі використовується «замикання різниці областей», бо функції ідентифікації конструюються для замкнутих областей.

Приклад 1. Сконструювати неявне рівняння межі різниці двох одиничних кіл з центрами в точках (0,0) та (1,0).

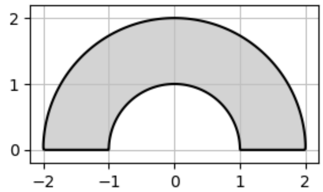


Р о з в ' я з а н н я. Функціями ідентифікації кіл є $\omega_1(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ та $\omega_2(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$. Тоді, відповідно до (12), матимемо $\omega_{\overline{\Omega_1\backslash\Omega_2}}(x,y) = dr(1 - x^2 - y^2, 1 - (x-1)^2 - y^2)$. Обираючи $(10b)$ в якості виконавчої функції різниці областей, після деяких спрощень (і домноження на 2) отримаємо

$$\omega_{\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2}}(x,y) = 1 - 2\,x - |\,2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,x - 1\,|$$

Неявним рівнянням контура області буде $\omega_{\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2}}(x,y) = 0$.

Приклад 2. Сконструювати неявне рівняння контура напівкільця.



Розв'язання. Функцією ідентифікації внутрішності більшого кола є $\omega_1(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, меншого – $\omega_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, а верхньої напівплощини $\omega_3(x,y) = y$. Тоді ідентифікатором зони напівкільця може бути

$$\omega(x,y) = ir\Big(dr\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big), \omega_3(x,y)\Big) =$$
$$= ir(dr(4 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2), y).$$

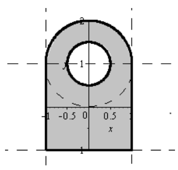
Після множення на 4 і спрощення, неявне рівняння контура матиме вигляд

$$3 + 2\,y - |\,2x^2 + 2y^2 - 5\,| - \big|2y - 3 + |\,2x^2 + 2y^2 - 5\,|\big| = 0\,.$$

4.1.5. Приклади і допоміжні твердження.

При конструюванні областей зустрічаються різноманітні комбінації. Покажемо на прикладах, як запропонований метод працює у випадках складних геометричних фігур.

Приклад 1. Сконструюємо функцію ідентифікації фігури, яка наведена на початку поточної глави.



Розв'язання. За допомогою логічної формули $\Omega = \big((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3\big) \cap \Omega_4^{\neg}$ бажану область точок площини можна подати у вигляді комбінації підобластей Ω_i з наступними ідентифікаторами $\omega_i(x,y)$:

Ω_1: $\omega_1(x,y) = 1 - x^2 \geq 0$;	вертикальна смуга;
Ω_2: $\omega_2(x,y) = 1 - y^2 \geq 0$;	горизонтальна смуга;
Ω_3: $\omega_3(x,y) = 1 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$;	зсунуте вгору коло радіуса 1;
Ω_4: $\omega_4(x,y) = 1/4 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0$.	зсунуте вгору коло радіуса 1/2.

Заміняючи в логічній формулі операцію перетину $\cap$ функцією $ir(\dots,\dots)$ з аргументами ідентифікаторами відповідних підобластей, операцію об'єднання $\cup$ – функцією $ur(\dots,\dots)$, а операцію доповнення – арифметичним запереченням (тобто замість $\Omega_4^{\neg}$ в аналітичному виразі використаємо $-\omega_4$), отримаємо наступну суперпозицію

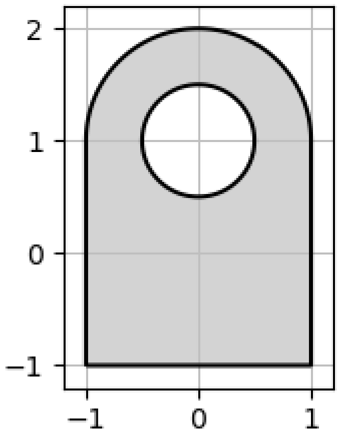
$$\omega(x,y) = ir\Big(ur\Big(ir\big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big), \omega_3(x,y)\Big)\ , -\omega_4(x,y)\Big)\ ,$$

яка являтиме функцію ідентифікації наведеної фігури.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify,S
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
x,y = symbols("x y")
w1=1-x**2
w2=1-y**2
w3=1-x**2-(y-1)**2
w4=S(1)/4-x**2-(y-1)**2
w=ir(ur(ir(w1,w2),w3),-w4)
display(simplify(8*w))       # для спрощення додано множник 8
```

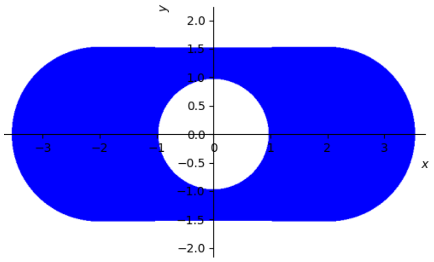
$$5-4\,y+x^2+y^2-\left|\,x^2-y^2\,\right|+\left|\,2-4\,y+x^2+y^2-\left|\,x^2-y^2\,\right|\right|$$
$$-\left|\,1+7x^2+7y^2-12y+\left|\,x^2-y^2\,\right|-\left|\,2+x^2+y^2-4y-\left|x^2-y^2\right|\right|\right|$$

```
plot_implicit(w>0,(x,-1.2,1.2),(y,-1.2,2.2),
    aspect=(1,1),border_color="k",n=200,color='lightgray',
    grid=True,legend=False)
plt.show()
```



Звісно, що друкувати довгі формули немає сенсу - комп'ютер може їх обробити без нашої участі.

Приклад 2. Побудувати неявне рівняння зони «стадіону з круговим отвором».



Р о з в ' я з а н н я . Нехай розміри фігури будуть таким, як на наведеному рисунку: висота 3, ширина 7, радіус внутрішнього кола $r = 1$, абсциси центрів півкіл, що утворюють ліву і праву межу, дорівнюють ± 2. Ввівши параметри $a = 2$ (абсциса центра правого півкола), $b = 1.5$ (напіввисота), фігуру Ω можна подати як послідовну комбінацію наступних областей:

Ω_1 (смуга)	$-a \leq x \leq a$	$\omega_1(x,y) = a^2 - x^2$
Ω_2 (смуга)	$-b \leq y \leq b$	$\omega_2(x,y) = b^2 - y^2$
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$	Прямокутник	$\omega_{12}(x,y) = ir(\omega_1,\omega_2)$
Ω_3 (ліве коло)	$b^2 - (x+a)^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_3(x,y) = b^2 - (x+a)^2 - y^2$
Ω_4 (праве коло)	$b^2 - (x-a)^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_4(x,y) = b^2 - (x-a)^2 - y^2$
$\Omega_{123} = \Omega_{12} \cup \Omega_3$	Прямокутник з лівим колом	$\omega_{123}(x,y) = ur(\omega_{12},\omega_3)$
$\Omega_{1234} = \Omega_{123} \cup \Omega_4$	Стадіон без отвору	$\omega_{1234}(x,y) = ur(\omega_{123},\omega_4)$
Ω_5 (коло-отвір)	$r^2 - x^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_5(x,y) = r^2 - x^2 - y^2$
$\Omega = \Omega_{1234} \setminus \Omega_5$	Результівна фігура	$\omega(x,y) = dr(\omega_{1234},\omega_5)$

В попередніх прикладах ми використовували Python і його модуль символьної математики SymPy. Покажемо, як описуваний підхід реалізувати за допомогою NumPy та Matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Створіть виконавчі функції булевих операцій.

```
def ir(u,v): return (u+v-np.abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+np.abs(u-v))/2
def dr(u,v): return (u-v-np.abs(u+v))/2
```

Створіть сітку точок, що гарантовано покриває досліджувану фігуру.

```
x_=np.linspace(-4,4,401)
y_=np.linspace(-2,2,201)
x,y=np.meshgrid(x_,y_)
```

Послідовно обчисліть вирази по формулам, наведеним в таблиці.

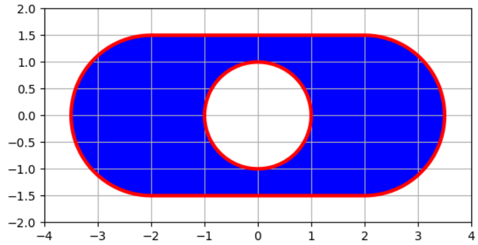
```
a,b,r=2,1.5,1
w1=a**2-x**2
w2=b**2-y**2
w12=ir(w1,w2)
w3=b**2-(x+a)**2-y**2
w4=b**2-(x-a)**2-y**2
w123=ur(w12,w3)
w1234=ur(w123,w4)
w5=r**2-x**2-y**2
w=dr(w1234,w5)
```

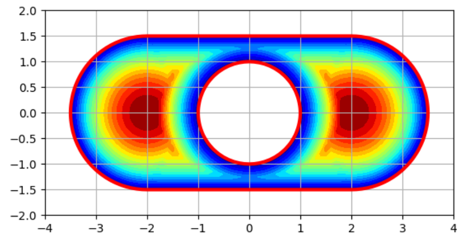
Тут масив `w` містить у вузлах сітки `(x,y)` значення функції ідентифікації області Ω. Побудуємо графік її нульової лінії рівня, тобто контур межі області.

```
fig,ax = plt.subplots(1,1)
ax.contour(x,y, w, [0], linewidths=3,colors='r')
```

Щоб візуалізувати область, можна використати функцію `contourf()`. Але вона фарбує зони між лініями рівня, тому їй потрібно передати принаймні два значення, одне з яких буде нулем, а інше – максимумом `w`. Оскільки `w` негативне зовні, то можна просто обрати величину `w.max()`.

```
ax.contourf(x,y,w,[0,w.max()],colors='b')
ax.grid(True)
ax.set_aspect(1)      # наступний рисунок ліворуч
```





Діапазон `[0,w.max()]` можна розбити на кілька рівнів і побудувати зафарбований контурний графік функції ідентифікації. Для цього замініть інструкцію `ax.contourf(x,y,w,...)` на дві наступні

```
vals=np.linspace(0,w.max(),20)
ax.contourf(x,y,w,vals,cmap='jet')      # попередній рисунок праворуч
```

Ви отримаєте зображення, яке показано на попередньому рисунку праворуч.

Функція ідентифікації, зазвичай, грає допоміжну роль, а в області потрібно візуалізувати якесь скалярне поле. Для цього можна використати масковані масиви. Наприклад, нехай скалярне поле має вигляд $f(x,y) = x^2 + y^2$. Розфарбуємо досліджувану область (стадіон з отвором) відповідно до значень $f(x,y)$.

В продовження попереднього сценарію введіть наступні інструкції.

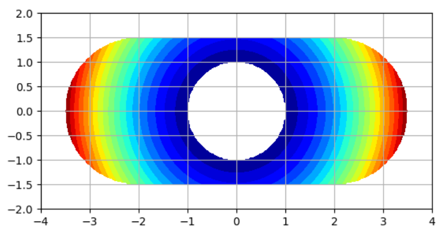
```
f=lambda x,y: x**2+y**2
```

Створіть масковані масиви координат точок сітки і значень скалярного поля.

```
X=np.ma.masked_where(w<0,x)
Y=np.ma.masked_where(w<0,y)
F=f(X,Y)          # маскований масив значень скалярного поля в області
```

Побудуйте залитий контурний графік поля в області.

```
fig2,ax2 = plt.subplots(1,1)
vals=np.linspace(F.min(),F.max(),20)
ax2.contourf(X,Y,F, vals, cmap='jet')
ax2.grid(True)
ax2.set_aspect(1)
```



Зауваження. Щоб надрукувати формулу функції ідентифікації `w(x,y)`, в попередньому коді можна було б замість масивів `wi` працювати з функціями `wi(x,y)`. Тоді, за допомогою інструкції `W=sympy.lambdify((x,y), w(x,y),"sympy")`, функцію `w(x,y)` можна було б конвертувати на символьну `W`, а потім опублікувати вираз `W(x,y)`.

■

В деяких задачах зручно застосовувати допоміжні твердження, які можуть спростити результівний вираз функції ідентифікації.

Твердження 1. Дано дві області: одна Ω_1 обмежена зверху кривою $y = f_1(x)$, а інша Ω_2 – знизу кривою $y = f_2(x)$. Функції ідентифікації цих областей мають вигляд $\omega_1(x,y) = f_1(x) - y$ і $\omega_2(x,y) = y - f_2(x)$. Тоді функція ідентифікації зони перетину $\Omega_1 \cap \Omega_2$ може бути наступною

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x,y) &= ir_1\big(f_1(x) - y,\ y - f_2(x)\big) = \\ &= \frac{1}{2}\,(f_1(x) - f_2(x) - |\, f_1(x) + f_2(x) - 2\,y\,|)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Приклад 3. Написати неявне рівняння правильного шестикутника з центром на початку координат і з одиничним радіусом описаного кола.

Розв'язання. Можна побудувати цю область як перетин шести напівплощин або трьох смуг. Однак ми вчинимо по-іншому. В попередніх главах наводилися формули побудови явного рівняння ламаної. Буде простіше, якщо ми сконструюємо шестикутник як перетин двох областей, показаних на наступному рисунку ліворуч і всередині.

Вузли верхньої ламаної (наступний рисунок ліворуч) мають координати $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а тангенси кутів нахилу нескінченних променів дорівнюють $\sqrt{3}$ і $-\sqrt{3}$. Рівняння ламаної, що зверху обмежує область, можна побудувати за формулою Бернштейна (зробіть це самостійно)

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Аналогічно рівняння ламаної, що знизу обмежує область, показану на наступному рисунку всередині, має вигляд

$$y_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2 + \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Тоді ідентифікаторами розглядуваних зон будуть функції

$$\omega_1(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) - y\,,$$

$$\omega_2(x,y) = y + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right)\,.$$

І в результаті отримуємо

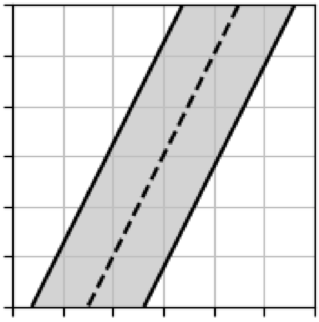
$$\omega_6(x,y) = ir_1(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \left|\,x + \frac{1}{2}\,\right| - \left|\,x - \frac{1}{2}\,\right|\right) - |\,y\,|$$

Неявним рівнянням контура шестикутника буде $\omega_6(x,y) = 0$ (на попередньому рисунку праворуч пунктиром показані межі областей, що перетинаються; рівнянню $\omega_6(x,y) = 0$ задовольнятимуть лише точки контура шестикутника). ■

Часто в логічних формулах побудови геометричних фігур зустрічаються похилі смуги. Тоді корисним буде наступне

Твердження 2. Функцією ідентифікації смуги напівширини h навколо прямої $a\,x + by + c = 0$ може бути

$$\omega(x, y) = h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - |\, a\,x + b\,y + c \,|\,. \tag{2}$$

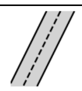
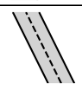
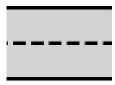
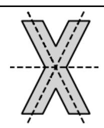


Доведення. Дійсно, нехай осьова лінія L смуги має рівняння $a\,x + b\,y + c = 0$. Нормалізуємо його, записавши у вигляді $a'\,x + b'\,y + c' = 0$, де $a' = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $b' = b/\sqrt{a^2 + b^2}$, $c' = c/\sqrt{a^2 + b^2}$. Тоді відстань будь-якої точки (x_0, y_0) до прямої L обчислюватиметься за формулою $\delta = |\, a'x_0 + b'y_0 + c'|$. Множина всіх точок x, y площини XY, відстань яких до прямої L менша за h (очевидно, що це смуга), визначатиметься нерівністю $\delta \le h$, тобто $|\, a'x + b'y + c'| \le h$ або $|\, a\,x + b\,y + c| \le h\,\sqrt{a^2 + b^2}$. Тоді точки (x, y) смуги задовольняють нерівності $\omega(x, y) = h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - |\, a\,x + b\,y + c \,| \ge 0$. При чому в точках межі смуги $\omega(x, y) = 0$, оскільки вони знаходяться на відстані h від осьової лінії, і для них виконується рівність $a'x + b'y + c' = \pm h$. Очевидно, що поза зоною смуги $\omega(x, y) < 0$. Таким чином функція (2) задовольняє всім вимогам, які накладаються на функції ідентифікації.

■

Приклад 4. Написати неявне рівняння контура літери Х (першої в назві Харків).

Розв'язання. Нехай напівтовщина літери $h = 1$, напіввисота $H = 5$, а її центр знаходиться на початку координат. На площині XY зону точок літери Х представимо у вигляді перетину трьох смуг.

Ω_1 (похила смуга 1)		$\omega_1(x, y) = \sqrt{5} - \|2\,x - y\|$
Ω_2 (похила смуга 2)		$\omega_2(x, y) = \sqrt{5} - \|2\,x + y\|$
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (безмежний хрест)		$\omega_{12}(x, y) = ur(\omega_1, \omega_2)$
Ω_3 (горизонтальна смуга)		$\omega_3(x, y) = H - \|\, y \,\|$
$\Omega_Х = \Omega_{12} \cap \Omega_3$ (літера Х)		$\omega_Х(x, y) = ir(\omega_{12}, \omega_3)$

Логічна формула побудови фігури у формі літери Х має вигляд $\Omega_Х = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap \Omega_3$. Заміняючи в ній операції об'єднання $\cup$ та перетину $\cap$ функціями $ur()$ і $ir()$, отримаємо наступну функцію ідентифікації цієї області

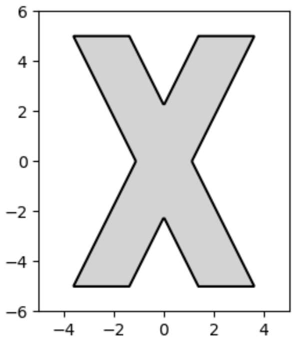
$$\omega_X(x,y) = ir\Big(ur\big(\omega_1(x,y),\omega_2(x,y)\big),\omega_3(x,y)\Big).$$

Для конструювання ідентифікаторів похилих смуг в наступному сценарії ми створимо окрему функцію `strip(a,b,c,h)`, яка прийматиме коефіцієнти a, b, c рівняння осьової лінії $a\,x + b\,y + c = 0$ і напівширину h смуги, а повертатиме вирази $a\,x + b\,y + c$ та $\omega(x,y)$ – ідентифікатор смуги.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify,sqrt
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
x,y = symbols("x y")
def strip(a,b,c,h):
    lin=a*x+b*y+c
    w=h*sqrt(a**2+b**2)-Abs(lin)
    return lin,w
lin1,w1=strip(2,-1,0,1)      # w1 – ідентифікатор першої смуги
lin2,w2=strip(-2,-1,0,1)     # w2 – ідентифікатор другої смуги
w12=ur(w1,w2)
w3=5-Abs(y)                  # ідентифікатор горизонтальної смуги
wx=ir(w12,w3)
display(simplify(4*wx))      # множник 4 несуттєвий
```

$$10 + 2\sqrt{5} - 2\,|\,y\,| - |\,2\,x - y\,| - |\,2x + y\,| + \Big|\,|2x - y| - |\,2\,x + y\,|\Big| - \Big|2\,|\,y\,| - |\,2\,x - y\,| - |\,2\,x + y\,| + \Big|\,|\,2\,x - y\,| - |\,2\,x + y\,|\Big| - 10 + 2\sqrt{5}\,\Big|$$

```
pd=plot_implicit(wx>0,(x,-5,5),(y,-6,6),aspect=(1,1),
    border_color="k",n=200,color='lightgray',grid=False)
```



4.2. Неявні рівняння поверхонь тривимірних тіл.

4.2.1. Конструювання рівнянь меж просторових тіл.

Методику конструювання рівнянь меж плоских областей можна розповсюдити для побудови неявних рівнянь меж (поверхонь) просторових тіл. Тільки в цьому випадку слід використовувати функції ідентифікації тривимірних областей (функції трьох змінних).

Нехай у тривимірному просторі дано замкнуті області (тіла) Ω_i, для яких відомі функції $\omega_i(x, y, z)$ позитивні всередині області, негативні - зовні, і рівні нулю на їх межах. Функції ω_i, що мають вказані властивості, ми зватимемо функціями ідентифікації або просто ідентифікаторами тіл Ω_i. Очевидно, що неявні рівняння поверхонь Ω_i можна тоді записати у вигляді $\omega_i(x, y, z) = 0$. Крім того, побудуємо функції

$$ir(u, v) = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$$
$$ur(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|) \qquad (1)$$
$$dr(u, v) = \frac{1}{2}(u - v - |u + v|)$$

Їх ми зватимемо виконавчими функціями операцій перетину, об'єднання і різниці областей. Функція $ir(u, v)$ позитивна в зоні першого квадранта $u > 0, v > 0$, дорівнює нулю на його граничних променях $u = 0 \ \wedge \ v \geq 0,\ u = 0 \ \wedge \ v \geq 0$, і негативна для інших значень u, v. Функція $ur(u, v)$ негативна у внутрішніх точках третього квадранта $u < 0 \ \wedge v < 0$, дорівнює нулю на його граничних променях $v = 0 \ \wedge \ u \leq 0, u = 0 \ \wedge \ v \leq 0$, і позитивна для інших точок площини UV (вона негативна у квадранті, в якому обидва аргументи u, v від'ємні, і позитивна в інших квадрантах). Функція $dr(u, v)$ позитивна в зоні 4-го квадранта $u > 0 \ \wedge \ v < 0$, дорівнює нулю лише на його граничних променях $(u = 0 \ \wedge \ v \leq 0) \ \vee \ (u \geq 0 \ \wedge \ v = 0)$, і від'ємна в інших точках площини UV.

Якщо $\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)$ є ідентифікаторами замкнутих областей Ω_1, Ω_2, то справедливі наступні твердження:

1. Функція $\omega_\cap(x, y, z) = ir\big(\omega_1(x, y, z),\ \omega_2(x, y, z)\big)$ є ідентифікатором області $\Omega_\cap = \Omega_1 \cap \Omega_2$;
2. Функція $\omega_\cup(x, y, z) = ur\big(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)\big)$ є ідентифікатором області $\Omega_\cup = \Omega_1 \cup \Omega_2$;
3. Функція $\omega_{dr}(x, y, z) = dr\big(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)\big)$ є ідентифікатором області $\Omega_{dr} = \overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2}$.

Доведення цих тверджень виконується обчисленням знака/значення відповідної функції $\omega_{\_}(x, y, z)$ в усіх можливих місцях розташування точки (x, y, z): одночасно всередині Ω_1, Ω_2; зовні Ω_1, але всередині Ω_2; на межі Ω_1 і всередині Ω_2, і так далі (слід відтворити доведення лем 1, 3 і 4 попереднього параграфа).

Зауваження. Для виконавчих функцій операцій перетину, об'єднання і різниці суттєвим є лише відповідний розподіл знаків, і замість формул (1) для $ir(u, v)$, $ur(u, v)$, $dr(u, v)$ можна обирати будь-які, визначені відповідно в формулах (1), (6), (10) попереднього параграфа, наприклад,

$$ir_\alpha(u, v, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x\,y}\right), \quad -1 < \alpha \leq 1\,,$$
$$ur_\alpha(u, v, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x\,y}\right), \quad -1 < \alpha \leq 1\,, \qquad (2)$$

$$dr_\alpha(u,v,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}\left(x - y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2\,\alpha\,x\,y}\right), \quad -1 < \alpha \le 1\,.$$

Застосовуючи твердження 1 – 3, можна конструювати неявні рівняння поверхонь різноманітних тіл. Нехай тіло Ω, як множина точок у просторі, утворюється за допомогою деяких булевих операцій (перетин, об'єднання, доповнення і т.д.) над підобластями Ω_i, що мають простішу ніж Ω форму. Припустимо що для кожної з підобластей Ω_i відома функція ідентифікації $\omega_i(x,y,z)$. Тоді суперпозиція функцій (1) і ідентифікаторів ω_i областей Ω_i дозволяє побудувати функцію ідентифікації результівної області Ω. Наприклад, якщо $\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2 \cup \Omega_3) \cap \Omega_4^{\neg}$, то $\omega_\Omega = ir(ur(ir(\omega_1,\omega_2),\omega_3),-\omega_4)$, де для стислості ми опустили аргументи x,y,z всіх функцій ω_i $(i = 1,2,3,4)$. Як наслідок, неявне рівняння поверхні тіла Ω матиме вигляд $\omega_\Omega(x,y,z) = 0$. Цей підхід працює так само як для плоских фігур, функції ідентифікації яких залежать лише від двох змінних x,y.

Приклад 1. Сконструювати неявне рівняння поверхні тривимірного тіла, яке задано нерівностями $x^2 + y^2 \le 1$ та $y^2 + z^2 \le 1$ (перетин кругових циліндрів одиничного радіуса, осі яких співпадають з осями координат Z та X), і візуалізувати фігуру.

Розв'язання. Нерівності виділяють зони тривимірного простору. Для кожної з них створимо індикаторну функцію (додатну всередині, нуль – на межі, від'ємну зовні).

Область	Функція ідентифікації ($\omega \ge 0$)
$x^2 + y^2 \le 1$	$\omega_1(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2$
$y^2 + z^2 \le 1$	$\omega_2(x,y,z) = 1 - y^2 - z^2$

Перетин цих областей утворюватиме тіло з функцією ідентифікації

$$\omega(x,y,z) = ir(\omega_1(x,y,z),\omega_2(x,y,z)).$$

Отже неявним рівнянням поверхні тіла буде $\omega(x,y,z) = 0$. Реалізуємо ці побудови в Python, застосовуючи символьні обчислення. Оскільки модуль Matplotlib не містить процедур побудови тривимірних контурних графіків (і поверхонь по їх неявним рівнянням), то для візуалізації використовуватимемо пакет `Mayvi`, який рекомендуємо встановити у ваше Python середовище.

```
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify,lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
x,y,z= symbols('x y z')
```

Створіть виконавчу функцію $ir(x,y)$ операції перетину.

```
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
```

Створіть функції ідентифікації областей $x^2 + y^2 \le 1$, $y^2 + z^2 \le 1$ та області їх перетину.

```
w1=1-x**2-y**2
w2=1-y**2-z**2
```

```
w=simplify(ir(w1,w2))
display(simplify(w))
```
$1 - x^2/2 - y^2 - z^2/2 - |x^2 - z^2|/2$

Тобто неявним рівнянням поверхні результівного тіла є

$$1 - \frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}|x^2 - z^2| = 0\,.$$

Для візуалізації поверхні по неявному рівнянню застосуємо функцію `mayavi.mlab.contour3d()`. Але спочатку символьний вираз `w` перетворимо на числову функцію, щоб її можна було застосовувати до масивів координат точок тривимірної сітки.

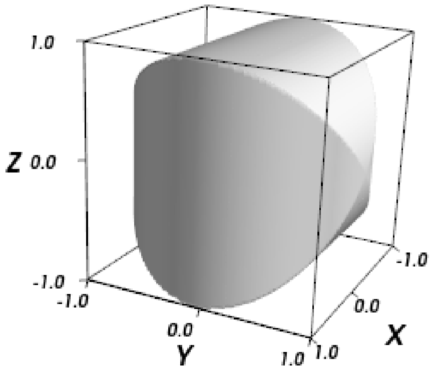
```
F=lambdify((x,y,z), w, 'numpy')
```

Створіть просторову сітку точок з координатами `(X,Y,Z)`, яка покриває досліджувану область, і масив значень виразу $\omega(x,y,z)$ в цих точках.

```
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j,-1.1:1.1:100j,-1.1:1.1:100j]
W=F(X,Y,Z)
```

Тепер побудуйте поверхню нульового рівня виразу $\omega(x,y,z)$.

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W, contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```

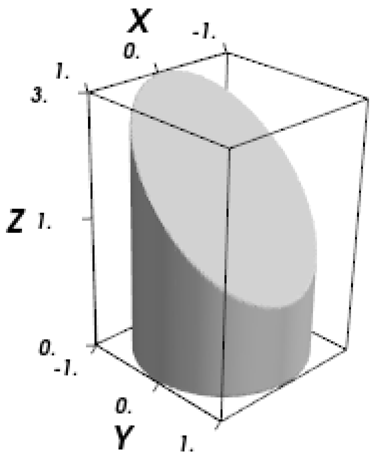


Приклад 2. Побудувати зображення поверхні кругового циліндра одиничного радіуса, вісь якого співпадає з координатною віссю Z, і який обмежений знизу площиною z = 0, а зверху – площиною $y + z - 2 = 0$.

Розв'язання. Конструйоване тіло можна подати як послідовну комбінацію наступних областей:

Область	Пояснення	Функція ідентифікації ($\omega \geq 0$)
Ω_1	$x^2 + y^2 \leq 1$; нескінченний циліндр	$\omega_1(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2$
Ω_2	$z \geq 0$; півпростір	$\omega_2(x,y,z) = z$
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$	напівнескінченний циліндр	$\omega_{12}(x,y,z) = ir(\omega_1,\omega_2)$
Ω_3	$z \leq 2 - y$; півпростір	$\omega_3(x,y) = 2 - y - z$
$\Omega_{123} = \Omega_{12} \cap \Omega_3$	результівне тіло	$\omega_{123}(x,y) = ir(\omega_{12},\omega_3)$

Програмна реалізація цього прикладу частково повторює попередній код.

```
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify,lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
x,y,z= symbols('x y z')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
```
Створюємо функції ідентифікації основних областей та зон їх перетину.
```
w1=1-x**2-y**2
w2=z
w12=simplify(ir(w1,w2))
w3=2-y-z
w123=simplify(ir(w12,w3))
```
Надрукуємо функцію ідентифікації результівного тіла (додавши несуттєвий множник 4)
```
display(simplify(4*w123))
```
$$5-2y-z-x^2-y^2-|x^2+y^2+z-1|-\left|3-2y-3z+x^2+y^2+|x^2+y^2+z-1|\right|$$
Символьний вираз `w123` перетворимо на числову функцію.
```
F=lambdify((x,y,z), w123, 'numpy')
```
Створюємо просторову сітку точок і масив `W` значень виразу $\omega_{123}(x,y,z)$ в цих точках.
```
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j,-1.1:1.1:100j,-0.1:3.1:100j]
W=F(X,Y,Z)
```
Тепер побудуйте поверхню нульового рівня функції ідентифікації.
```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W, contours=[0],color=(0.7,0.7,0.7))
mlab.outline()
mlab.axes()
```


Приклад 3. По неявному рівнянню побудувати зображення поверхні куба $|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1$ з циліндричним отвором $x^2+y^2 \le 0.7^2$.

Розв'язання. Для зон простору, які відповідають нерівностям, створимо функції ідентифікації.

Область	Функція ідентифікації ($\omega \geq 0$)
$\|x\| \leq 1$	$\omega_1(x,y,z) = 1 - \| x \|$
$\|y\| \leq 1$	$\omega_2(x,y,z) = 1 - \| y \|$
$\|z\| \leq 1$	$\omega_3(x,y,z) = 1 - \| z \|$
$x^2 + y^2 \leq 0.7^2$	$\omega_4(x,y,z) = 0.49 - \mathrm{x}^2 - y^2$

Перетин перших трьох зон/шарів утворює область у формі куба з функцією ідентифікації

$$\omega_{cube}(x,y,z) = ir(ir(\omega_1,\omega_2),\omega_3)\,.$$

Тоді область куба з циліндричним отвором матиме наступний ідентифікатор

$$\omega(x,y,z) = dr(\omega_{cube},\omega_4)\,.$$

Реалізуємо ці побудови в Python, застосовуючи символьні обчислення і бібліотеку наукової графіки `mayavi`.

```
from sympy import symbols,Abs,init_printing,simplify,lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
x,y,z= symbols('x y z')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def dr(u,v): return (u-v-Abs(u+v))/2
```

Створіть вирази для функцій ідентифікації шарів $|\,x\,| \leq 1\,, |\,y\,| \leq 1\,, |\,z\,| \leq 1$ і циліндра $x^2 + y^2 \leq 0.7^2$

```
w1=1-Abs(x)
w2=1-Abs(y)
w3=1-Abs(z)
w4=0.49-x**2-y**2
w12=simplify(ir(w1,w2))
```

Згенеруйте вираз функцій ідентифікації куба $\mathtt{w}_{\mathtt{cube}}$ і надрукуйте його (додавши непринциповий множник 4)

```
wcube=simplify(ir(w12,w3))
display(4*wcube)
```

$$4 - |\,x\,| - |\,y\,| - 2\,|\,z\,| - \big|\,|\,x\,| - |\,y\,|\,\big| - \Big|\,|\,x\,| + |\,y\,| - 2\,|\,z\,| + \big|\,|\,x\,| - |\,y\,|\,\big|\,\Big|$$

Прирівнявши останній вираз нулю, ви отримаєте неявне рівняння куба. Далі створіть ідентифікатор куба з отвором.

```
w=dr(wcube,w4)
```

З символьного виразу `w` створіть числову функцію, щоб її можна було застосовувати до масивів координат точок тривимірної сітки.

```
F=lambdify((x,y,z),w,'numpy')
```

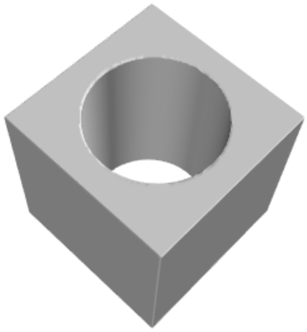
Створіть просторову сітку точок і масив значень виразу $\omega(x,y,z)$ в цих точках.

```
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j,-1.1:1.1:100j,-1.1:1.1:100j]
W=F(X,Y,Z)
```

Тепер побудуйте поверхню нульового рівня виразу/масива $\omega(x,y,z)$.

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
```

```
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
```



Приклад 4. По неявному рівнянню побудувати зображення області, заданої нерівностями $x^2 + y^2 \leq 1$, $|z| \leq 2$ та $x^2 + z^2 \leq 1$, $|y| \leq 2$ (об'єднання двох ортогональних циліндрів).

Р о з в ' я з а н н я . Нерівності виділяють зони тривимірного простору. Для кожної з них створіть функцію ідентифікації.

Область	Функція ідентифікації ($\omega \geq 0$)
$x^2 + y^2 \leq 1$	$\omega_1(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$
$\lvert z \rvert \leq 2$	$\omega_2(x, y, z) = 2 - \lvert z \rvert$
$x^2 + z^2 \leq 1$	$\omega_3(x, y, z) = 1 - x^2 - z^2$
$\lvert y \rvert \leq 2$	$\omega_4(x, y, z) = 2 - \lvert y \rvert$

Перші дві нерівності $x^2 + y^2 \leq 1$, $|z| \leq 2$ виділяють зону циліндра довжини 4. Його функція ідентифікації буде

$$\omega_{12}(x, y, z) = ir\big(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)\big).$$

Аналогічно нерівності $x^2 + z^2 \leq 1$, $|y| \leq 2$ задають зону іншого циліндра, функцією ідентифікації якого є

$$\omega_{34}(x, y, z) = ir\big(\omega_3(x, y, z), \omega_4(x, y, z)\big).$$

Поєднання обох циліндрів утворює тіло з функцією ідентифікації

$$\omega(x, y, z) = ur\big(\omega_{12}(x, y, z), \omega_{34}(x, y, z)\big).$$

Реалізуємо ці побудови в Python, при чому обійдемося без символьних розрахунків, і відразу будуватимемо числові масиви.

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
```

Створіть виконавчі функції операцій перетину та об'єднання

```
def ir(u,v): return (u+v-np.abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+np.abs(u-v))/2
```

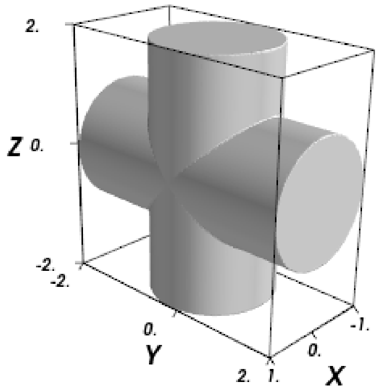
Побудуйте масиви значень функцій ідентифікації на обраній сітці точок

```
x, y, z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j,-2.1:2.1:200j,-2.1:2.1:200j]
w1=1-x**2-y**2
w2=2-np.abs(z)
w12=ir(w1,w2)
w3=1-x**2-z**2
w4=2-np.abs(y)
w34=ir(w3,w4)
```

```
w=ur(w12,w34)
```

Побудуйте поверхню $\omega(x, y, z) = 0$

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(x, y, z, w, contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



Приклад 5. Сконструювати неявне рівняння поверхні літер слова **ХНУ** (абревіатура від Харківський національний університет) і побудувати його графік.

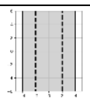
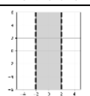
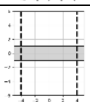
Розв'язання. Спочатку сконструюємо функцію ідентифікації $\omega_{XHY2D}(x, y)$ слова **ХНУ** як області на площині. Потім, розглядаючи її як ідентифікатор $\omega_{XHY3D}(x, y, z) = \omega_{XHY2D}(x, y)$ просторової області нескінченно протяжної вздовж осі Z (нескінченного циліндра з перерізом у формі області слова ХНУ), перетнемо її шаром $|z| \le w$ (w – напівтовщина літер слова). В результаті отримаємо тривимірний ідентифікатор $\omega_{XHY3D}(x, y, z)$ просторової області у формі заданого слова.

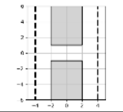
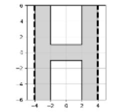
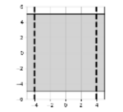
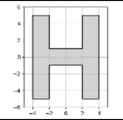
Перед конструюванням ідентифікатора $\omega_{XHY2D}(x, y)$ сконструюємо функції ідентифікації областей окремих літер $\omega_X(x, y)$, $\omega_H(x, y)$, $\omega_Y(x, y)$. Їх ми будуватимемо так, щоб відповідні області були розташовані в околі початку координат, і мали однакову висоту літер та «ширину ліній». Ідентифікатори областей зсунутих літер **Н** і **У** матимуть вигляд $\omega_H(x - x_H, y)$ і $\omega_Y(x - x_Y, y)$, де x_H, x_Y величини зсувів вздовж осі X. Тому функцію ідентифікації двовимірної фігури у формі слова **ХНУ** можна побудувати за формулою

$$\omega_{XHY2D}(x, y) = ur\left(ur\left(\omega_X(x, y), \omega_H(x - x_H, y)\right), \omega_Y(x - x_Y, y)\right).$$

Для області в формі літери **Х** функція ідентифікації $\omega_X(x, y)$ була сконструйована в прикладі 4 попереднього пункту.

Фігуру в формі літери **Н** побудуємо, використовуючи комбінації між наступними областями.

	Ω_{H1}- широка вертикальна смуга	$\omega_{H1}(x, y) = 4 - \mid x \mid$
	Ω_{H2}- вузька вертикальна смуга	$\omega_{H2}(x, y) = 2 - \mid x \mid$
	Ω_{H3}- вузька горизонтальна смуга	$\omega_{H3}(x, y) = 1 - \mid y \mid$

	$\Omega_{H23} = \Omega_{H2} \setminus \Omega_{H3}$- вузька вертикальна смуга з горизонтальним вирізом	$\omega_{H23}(x,y) = dr(\omega_{H2},\omega_{H3})$
	$\Omega_{H123} = \Omega_{H1} \setminus \Omega_{H3}$- необмежена по висоті зона в формі літери Н	$\omega_{H123}(x,y) = dr(\omega_{H1},\omega_{H23})$
	Ω_h- широка горизонтальна смуга	$\omega_h(x,y) = 5 - \mid y \mid$
	$\Omega_H = \Omega_{H123} \cap \Omega_3$ – область в формі літери Н	$\omega_H(x,y) = ir(\omega_{H123},\omega_h)$

Область в формі літери **У** створимо з області літери **Х**, як перетин з напівплощиною $y \geq 2\,x - \sqrt{5}$ (межа півплощини співпадатиме з правою частиною контура «ніжки» літери **У**). Тоді для ідентифікатора **У** можна буде покласти $\omega_Y(x,y) = ir\big(\omega_{\text{X}}(x,y),\ y - 2\,x + \sqrt{5}\big)$.

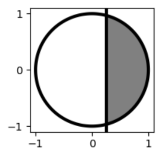
Описану послідовність дій реалізовано в наступному сценарії.

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols,Abs,simplify,sqrt,lambdify
mlab.close(all=True)
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
def dr(u,v): return (u-v-Abs(u+v))/2
x,y,z = symbols("x y z")
def strip(a,b,c,h):   # генерування ідентифікатора w похилої смуги
    lin=a*x+b*y+c
    w=h*sqrt(a**2+b**2)-Abs(lin)
    return lin,w
# Літера Х
linX1,wX1=strip(2,-1,0,1)
linX2,wX2=strip(-2,-1,0,1)
wX12=ur(wX1,wX2)
wh=5-Abs(y)
wX=ir(wX12,wh)
# Літера Н
wH1=4-Abs(x)
wH2=2-Abs(x)
wH3=1-Abs(y)
wH23=dr(wH2,wH3)
wH123=dr(wH1,wH23)
wH=ir(wH123,wh)
# Літера У
wY=ir(wX,y-2*x+sqrt(5))
# Двовимірне слово ХНУ
wH=wH.subs(x,x-8)          # ідентифікатор зсунутої Н
wXH=ur(wX,wH)              # ідентифікатор пари літер ХН
```

```
wY=wY.subs(x,x-16)          # ідентифікатор зсунутої У
wXHY2D=ur(wXH,wY)           # ідентифікатор двовимірного слова ХНУ
# ідентифікатор тривимірного слова ХНУ
wXHY3D=ir(wXHY2D,1-Abs(z))
# числова функція і 3D масиви
F=lambdify((x,y,z),wXHY3D,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-5:21:261j,-6:6:61j,-1.1:1.1:67j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.view(azimuth=55,elevation=27,distance=40)# положення камери
r=mlab.roll(roll=-6.5)                          # кут повороту камери
```

Вправи до глави.

1. Побудувати функцію ідентифікації зони перетину одиничного кола з центром в точці (0,0) і напівплощини $x \geq \frac{1}{4}$.



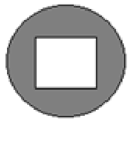
Відповідь: $\omega(x, y) = \frac{3}{8} - \frac{x^2+y^2-x}{2} - \frac{1}{2}\left| x^2 + y^2 + x - \frac{5}{4} \right|$.

2. Написати неявне рівняння прямокутного трикутника з вершинами в точках `(0,0)`, `(1,0)`, `(0,1)`, і візуалізувати його по цьому рівнянню.

3. Написати неявне рівняння паралелограма (координати вершин задайте самостійно), і візуалізувати його по цьому рівнянню.

4. Написати неявне рівняння трапеції (координати вершин задайте самостійно), і візуалізувати її по цьому рівнянню.

5. Написати неявне рівняння контура області, зображення якої наведено праворуч (параметри фігури оберіть самостійно). По згенерованому рівнянню побудуйте контур фігури.



6. Побудувати неявне рівняння контура фігури, координати точок якої задовольняють наступним обмеженням.

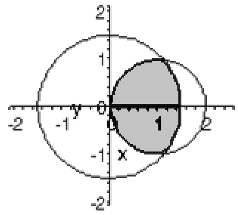
$$1 - x + y \geq 0\,,\, 1 + x + y \geq 0,\, 10 - 2x^2 - 3y^2 \geq 0.$$

7. Написати неявне рівняння контура літери К і візуалізувати її.

8. Сконструювати неявне рівняння контура слова ХНУ (абревіатура від Харківський національний університет) і побудувати його графік.

9. Написати неявне рівняння контура фігури, зображення якої наведено праворуч. По згенерованому рівнянню виконайте візуалізацію.

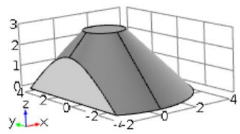
Відповідь: $\frac{9}{8}-x^2-y^2+x-\frac{1}{2}\left|2x-\frac{9}{4}\right|$



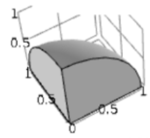
10. Побудувати функцію ідентифікації циліндра радіуса r і висотою h (вісь циліндра розташувати на осі Z, а нижню основу – в площині XY). Графічно зобразити циліндр (при деяких r,h), використовуючи неявне рівняння його поверхні.

11. Побудувати ідентифікато прямого кругового конуса радіуса r і висотою h (вісь конуса розташувати на осі Z, а основу – в площині XY). Графічно зобразити тіло (при деяких r,h), використовуючи неявне рівняння його поверхні.

12. Сконструювати неявне рівняння поверхні тіла, зображеного праворуч. Розміри фігури оберіть самостійно. Візуалізуйте результат.



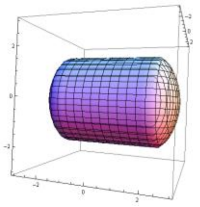
13. Сконструювати неявне рівняння поверхні тіла, зображеного праворуч. Розміри фігури оберіть самостійно. Візуалізуйте результат.



14. Побудувати неявне рівняння поверхні тіла, координати точок якого задовольняють наступним обмеженням:

$$x^2+y^2+z^2\le 9\ ,\ \ y^2+z^2\le 4\ .$$

Візуалізуйте результівне рівняння.



15. Сконструювати неявне рівняння тривимірної літери – першої літери вашого прізвища або імені. Візуалізуйте результат.

16. Написати неявне рівняння вертикального циліндра (фіксованої висоти) із горизонтальним циліндричним отвором. Параметри фігури оберіть самостійно. Візуалізуйте результівне рівняння.

17. Написати неявне рівняння вертикального циліндра (фіксованої висоти) із горизонтальним отвором квадратного перерізу. Параметри фігури оберіть самостійно. Візуалізуйте результівне рівняння.

Література до глави.

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212с.

2. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.