



Доля Петро Григорович  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна  
факультет математики і інформатики  
кафедра теоретичної та прикладної інформатики  
2024 р.

## Аналітичні методи геометричного моделювання з Python

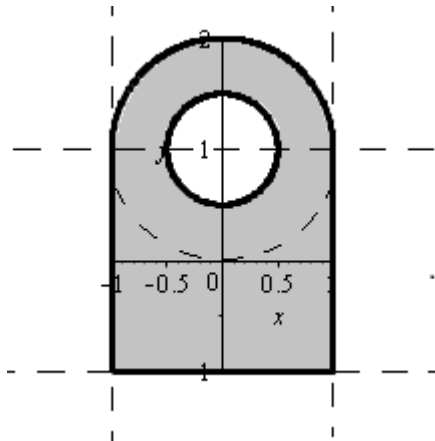
### Глава 4. Неявні рівняння кривих і поверхонь.

#### Зміст

4.1.  Неявні рівняння меж плоских фігур. ....	1
4.1.1.  Перетин областей. ....	3
4.1.2.  Доповнення областей. ....	8
4.1.3.  Об'єднання областей. ....	9
4.1.4.  Різниця областей. ....	12
4.1.5.  Приклади і допоміжні твердження. ....	13
4.2.  Конструювання рівнянь поверхонь тривимірних тіл. ....	21
4.3.  Перетворення функцій ідентифікації. ....	29
4.4.  Ідентифікатори окремих фігур. ....	47
4.4.1.  Ідентифікатори чотирикутників. ....	47
4.4.2.  Інші способи конструювання функцій ідентифікації. ....	54
4.5.  Додаткові способи формоутворення просторових тіл. ....	63
Вправи до глави. ....	84
Література до глави. ....	87

#### 4.1. Неявні рівняння меж плоских фігур.

Нехай  $\Omega$  є областю  $n$ -вимірного простору. Припустимо, що за допомогою операцій над множинами ми можемо репрезентувати її у вигляді доповнення, перетину та об'єднання кількох підобластей  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ , що мають більш просту форму ніж  $\Omega$ , і для кожної  $\Omega_i$  ми знаємо функцію  $\omega_i(x_1, \dots, x_n)$  позитивну всередині області, негативну – поза нею і рівну нулю на її межі. Її ми зватимемо функцією ідентифікації або просто ідентифікатором області. Наприклад, показано на наступному рисунку фігуру



за допомогою логічної формули  $\Omega = ((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3) \cap \Omega_4^{\neg}$  (тут  $\Omega_4^{\neg}$  позначає доповнення області) можна подати у вигляді комбінації підобластей  $\Omega_i$  з ідентифікаторами  $\omega_i(x, y)$ :

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| $\Omega_1: \omega_1(x, y) = 1 - x^2 \geq 0;$                       | вертикальна смуга;              |
| $\Omega_2: \omega_2(x, y) = 1 - y^2 \geq 0;$                       | горизонтальна смуга;            |
| $\Omega_3: \omega_3(x, y) = 1 - x^2 - (y - 1)^2 \geq 0;$           | зсунуте вгору коло радіуса 1;   |
| $\Omega_4: \omega_4(x, y) = \frac{1}{4} - x^2 - (y - 1)^2 \geq 0.$ | зсунуте вгору коло радіуса 1/2. |

Побудуємо функцію двох змінних  $ir(x, y)$ , яка позитивна в області першого квадранта  $x > 0, y > 0$ , дорівнює нулю на його граничних променях  $y = 0 \wedge x \geq 0, x = 0 \wedge y \geq 0$ , і негативна для інших значень  $x, y$ . Побудуємо також функцію двох змінних  $ur(x, y)$ , яка негативна у внутрішніх точках третього квадранта  $x < 0, y < 0$ , дорівнює нулю на його граничних променях  $y = 0 \wedge x \leq 0, x = 0 \wedge y \leq 0$ , і позитивна для інших точок площини XY. Замінімо в логічній формулі операції перетину  $\cap$  функцією  $ir(\dots, \dots)$  з аргументами ідентифікаторами відповідних підобластей, операції об'єднання  $\cup$  – функціями  $ur(\dots, \dots)$ , а операцію доповнення – арифметичним запереченням (тобто замість  $\Omega_i^{\neg}$  в формулі використаємо  $-\omega_i$ ). Тоді отримувана композиція функцій  $ir(\dots), ur(\dots)$  та  $\omega_i(x, y)$  дасть функцію ідентифікації результативної області. Наприклад, для області, утвореної логічною формулою  $\Omega = ((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3) \cap \Omega_4^{\neg}$ , суперпозиція

$$\omega(x, y) = ir(ur(ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \omega_3(x, y)), -\omega_4(x, y))$$

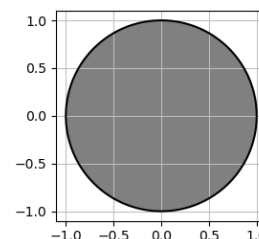
являтиме функцію ідентифікації, а неявним рівнянням її межі буде  $\omega(x, y) = 0$ . Наведений підхід є предметом обговорення цього параграфа.

Як зазначено вище, для визначення замкнутої області (фігури) будемо застосовувати функцію  $\omega(x, y)$ , яка позитивна всередині зони, дорівнює нулю на її межі, і негативна зовні області. Наприклад, для кола одиничного радіуса з центром в початку координат такою функцією може бути  $\omega(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ . Для напівплощини, що розташована з одного боку прямої  $ax + by + c = 0$  такою функцією буде або  $\omega(x, y) = ax + by + c$ , або  $\omega(x, y) = -ax - by - c$ , в залежності від обраної частини площини. Для стислості такі функції ми зватимемо функціями ідентифікації області або коротко – ідентифікатором області. Очевидно, що для області таких функцій можна побудувати безліч.

Маючи функції ідентифікації  $\omega_1(x, y)$  і  $\omega_2(x, y)$  двох областей, можна побудувати такі ж функції (позитивні всередині і негативні зовні)  $\omega_\cap(x, y)$  для області перетину  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $\omega_\cup(x, y)$  – для об'єднання  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  та  $\omega_\setminus(x, y)$  – для різниці  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  областей. При цьому неявним рівнянням межі нової області буде відповідно  $\omega_\cap(x, y) = 0$ ,  $\omega_\cup(x, y) = 0$  або  $\omega_\setminus(x, y) = 0$ . У літературі для способу побудови таких функцій є обґрунтування [1], засноване на використанні булевих функцій. Але існує інша інтерпретація, яка надається в цьому параграфі.

Для візуалізації області, якщо є її функція ідентифікації, можна використовувати різноманітні програмні середовища. В Python це можуть бути пакет символічних обчислень SymPy та візуалізації символічних виразів spb (SymPy Plotting Backends).

```
from sympy import symbols
from spb import plot_implicit
x, y = symbols("x y")
w=1-x**2-y**2
plot_implicit(w>0, (x, -1.1, 1.1), (y, -1.1, 1.1),
             aspect=(1, 1), border_color="k",
             n=200, color='gray')
```



Якщо нерівність прибрати, тобто використати інструкцію

```
plot_implicit(w, (x, -1.1, 1.1), (y, -1.1, 1.1), ...)
```

то буде накреслено криву – контур області. Повсюди далі ми зазвичай будуватимемо зафарбовану область, щоб показувати не тільки лінію, що представляє межу, але й ту частину площини, в якій функція ідентифікації позитивна.

#### 4.1.1. Перетин областей.

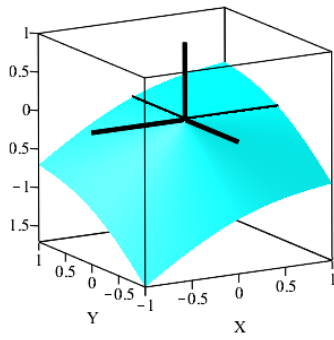
Розглянемо функцію двох змінних  $ir(x, y)$  позитивну в зоні першого квадранта  $x > 0, y > 0$ , таку, що обертається в нуль на його граничних променях  $y = 0 \wedge x \geq 0, x = 0 \wedge y \geq 0$ , і негативну для інших значень  $x, y$ . Прикладами таких функцій є

$$ir_0(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}); \quad (1a)$$

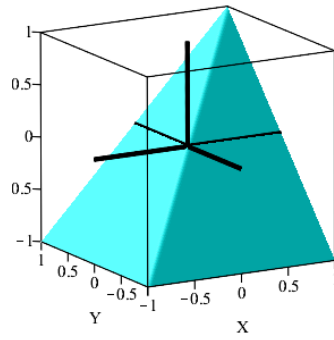
$$ir_1(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|); \quad (1b)$$

$$ir_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}), -1 < \alpha \leq 1. \quad (1c)$$

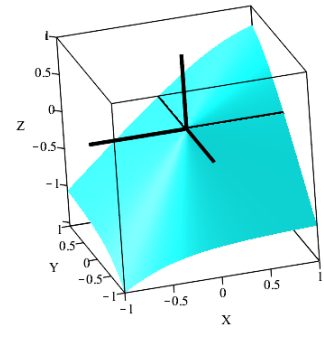
Ми їх зватимемо виконавчими функціями операції перетину областей, або коротко «функціями перетину». Їх графіки наведено на наступному рисунку.



$ir_0(x, y)$



$ir_1(x, y)$



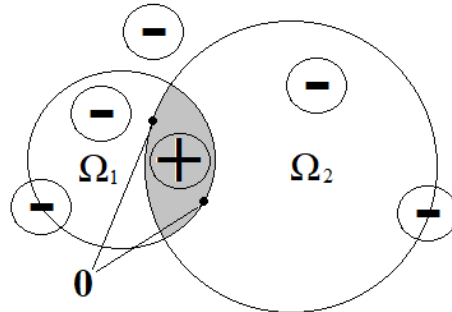
$ir_\alpha(x, y, 4/5)$

Далі ми часто використовуватимемо позначення  $ir(u, v)$ , і в якості останнього виступатиме будь-яка з функцій (1), або будь-яка інша, що задовольняє спеціальним умовам знаків

$$ir(u, v) = \begin{cases} ir(u, v) > 0, & u > 0 \wedge v > 0 \\ ir(u, v) = 0, & (u = 0 \wedge v \geq 0) \vee (u \geq 0 \wedge v = 0) \\ ir(u, v) < 0 & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (2)$$

Зауважимо, що  $ir(u, v)$  є функцією ідентифікації першого квадранта  $u \geq 0 \wedge v \geq 0$ .

Припустимо, що ідентифікатором замкнутої області  $\Omega_1$  є функція  $\omega_1(x, y)$ , а замкнутої області  $\Omega_2$  – функція  $\omega_2(x, y)$ . Розглянемо множину точок  $(x, y)$ , яка визначається нерівністю  $ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) \geq 0$ . Покажемо, що вона збігається з областю перетину  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , і  $ir(\omega_1, \omega_2) = 0$  лише в граничних точках  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .



Знаки функції  $ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$ .

Нехай точка  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) < 0$  і  $\omega_2(x, y) < 0$ . Відповідно до (2),  $ir(\omega_1 < 0, \omega_2 < 0) < 0$  як функція двох від'ємних аргументів.

Нехай  $P(x, y) \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ , де  $\partial\Omega$  позначає межу області  $\Omega$ . Тоді  $\omega_1(x, y) > 0$ ,  $\omega_2(x, y) < 0$ , і  $ir(\omega_1 > 0, \omega_2 < 0) < 0$ , оскільки другий аргумент  $ir(u, v)$  від'ємний.

Нехай  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2 \setminus \partial\Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) < 0$ ,  $\omega_2(x, y) > 0$ , і  $ir(\omega_1 < 0, \omega_2 > 0) < 0$ , оскільки перший аргумент  $ir(u, v)$  від'ємний.

Якщо  $P(x, y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ , то  $\omega_1(x, y) = 0$ ,  $\omega_2(x, y) < 0$ . Тому, відповідно до (2),  $ir(\omega_1 = 0, \omega_2 < 0) < 0$ .

Якщо  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \partial\Omega_2$  то  $\omega_1(x, y) < 0$ ,  $\omega_2(x, y) = 0$ . Тому, відповідно до (2),  $ir(\omega_1 < 0, \omega_2 = 0) < 0$ .

Нехай  $P(x, y) \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2 \setminus \partial\Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) > 0$  і  $\omega_2(x, y) > 0$ . Відповідно до (2), отримуємо  $ir(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0) > 0$ .

Якщо  $P(x, y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2$ , то,  $\omega_1(x, y) = 0$ ,  $\omega_2(x, y) \geq 0$ . Тому, відповідно до (2),  $ir(\omega_1 = 0, \omega_2 \geq 0) = 0$ .

Якщо  $P(x, y) \in \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \partial\Omega_2$ , то  $\omega_1(x, y) \geq 0$ ,  $\omega_2(x, y) = 0$ . Тому, відповідно до (2),  $ir(\omega_1 \geq 0, \omega_2 = 0) = 0$ .

Таким чином, вираз  $ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$  додатний лише для внутрішніх точок області  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , дорівнює нулю в її граничних точках, і від'ємний – зовні. Отже, виконується наступна

**Лема 1.** Функція  $\omega_\cap(x, y)$  ідентифікації зони перетину  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  замкнутих областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  може бути побудована за формулою

$$\omega_\cap(x, y) = ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \quad (3)$$

де  $\omega_1(x, y)$  і  $\omega_2(x, y)$  є функціями ідентифікації областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ .

**Наслідок.** Неявне рівняння межі області  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  має вигляд

$$ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = 0. \quad (4)$$

*Зауваження.* Перетин будь-якого набору замкнутих множин є замкнутою множиною. Тому, якщо  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  замкнуті області, то  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  теж є замкнутою.

**Приклад 1.** Побудувати неявне рівняння контура прямокутника  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ .

*Розв'язання.* Функцію  $\omega_1$  ідентифікації смуги  $-a \leq x \leq a$  ( $a > 0$ ) можна записати, наприклад, у вигляді  $\omega_1(x, y) = a - |x|$ . Аналогічно, ідентифікатор смуги  $-b \leq y \leq b$  ( $b > 0$ ) може мати вигляд  $\omega_2(x, y) = b - |y|$ . Використовуючи для функції  $ir(\omega_1, \omega_2)$  вираз (1b), ідентифікатор  $\omega_r(x, y)$  області перетину смуг, тобто зони прямокутника, матиме вигляд

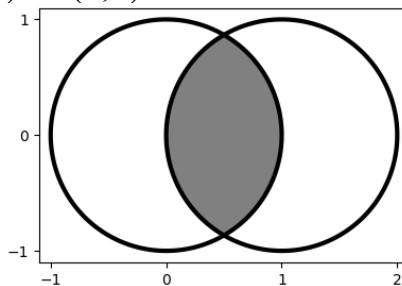
$$\begin{aligned} \omega_r(x, y) &= \frac{1}{2}(\omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) - |\omega_1(x, y) - \omega_2(x, y)|) = \\ &= \frac{1}{2}(a + b - |x| - |y| - |a - b + |y| - |x||). \end{aligned}$$

Рівнянням контура прямокутника  $[-a, a] \times [-b, b]$  буде

$$a + b - |x| - |y| - |a - b + |y| - |x|| = 0, \quad (5)$$

оскільки множник  $1/2$  є несуттєвим. ■

**Приклад 2.** Побудувати неявне рівняння контура зони перетину двох одиничних кіл з центрами в точках  $(0,0)$  та  $(1,0)$ .



*Розв'язання.* Функції ідентифікації кіл мають вид  $\omega_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  та  $\omega_2(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . Тоді, відповідно до (3), маємо  $\omega(x, y) = ir(1 - x^2 - y^2, 1 - (x - 1)^2 - y^2)$ . Обираючи (1b) в якості виконавчої функції перетину, після деяких спрощень отримуємо

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2} |2x - 1|$$

Неявним рівнянням межі «луночки» буде  $\omega(x, y) = 0$ .

**Приклад 3.** Побудувати неявне рівняння контура чверті одиничного кола, розташованого в першому квадранті  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Розв'язання. Подамо область як перетин напівплощин  $y \geq 0, x \geq 0$  з одиничним колом  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ . Функції ідентифікації цих зон можна обрати наступними:

$$\omega_1(x, y) = y, \quad \omega_2(x, y) = x, \quad \omega_3(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Перетин напівплощин визначає зону першого квадранта з ідентифікатором

$$\omega_{12}(x, y) = ir_1(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = ir_1(y, x) = (x + y - |x - y|)/2$$

Перший квадрант ми перетинаємо з областю одиничного кола. Функція ідентифікації результативної області дорівнюватиме

$$\omega_{123}(x, y) = ir(\omega_{12}(x, y), \omega_3(x, y))$$

Виконаємо обчислення в Python за допомогою модуля символічної математики SymPy.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
x, y = symbols("x y")
```

Відповідно до (1b) створіть виконавчу функцію  $ir(u, v)$  операції перетину.

```
def ir(x, y):
    return (x+y-Abs(x-y))/2
```

Створіть символні вирази, які відповідають функціям ідентифікації  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

```
w1=y
w2=x
w3=1-x**2-y**2
```

Виконайте суперпозицію цих виразів відповідно до операції перетинання і надрукуйте результативну функцію ідентифікації (щоб спростити відповідь, домножимо результат на сталу 4, що є несуттєвим).

```
w12=ir(w1, w2)
w123=ir(w12, w3)
```

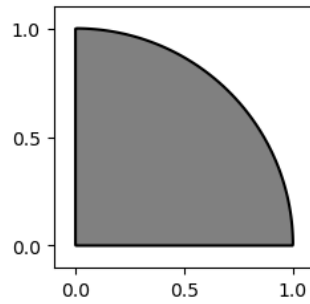
Ідентифікатором чверті кола буде функція  $\omega_{123}(x, y)$ , яка має наступний вид

$$display(simplify(4*w123))$$

$$2 + x + y - 2x^2 - 2y^2 - |x - y| - |-2 + x + y + 2x^2 + 2y^2 - |x - y||$$

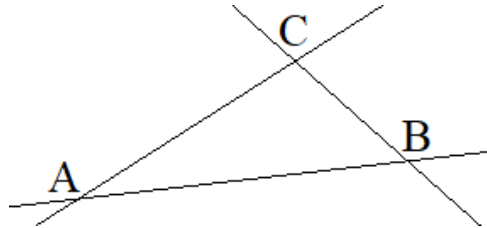
Використовуючи символний вираз  $w123$ , побудуйте зображення чверті кола.

```
plot_implicit(w123>0, (x, -0.1, 1.1), (y, -0.1, 1.1), n=200,
              aspect=(1, 1), border_color="k", color='gray', grid=False)
plt.gca().set(xticks=[0, 0.5, 1], yticks=[0, 0.5, 1])
plt.show()
```



Звісно, що неявним рівнянням контура фігури буде  $\omega_{123}(x, y) = 0$

**Приклад 4.** Побудувати неявне рівняння контура трикутника з вершинами в точках  $A(-2, -2)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 2)$ .



**Розв'язання.** Подамо зону трикутника як перетин трьох напівплощин. Перша буде розташована нижче прямої AC, друга – лівіше прямої BC, третя – вище прямої AB. Ідентифікатори цих напівплощин можна задати наступними:

$$\omega_{AC}(x, y) = 2 + 2x - y, \quad \omega_{BC}(x, y) = 2 - 2x - y, \quad \omega_{AB}(x, y) = 2 - 2x + 3y.$$

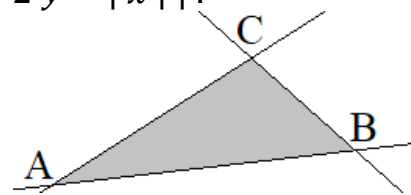
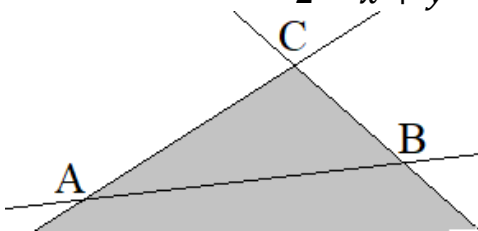
Для перевірки того, що ми правильно обрали знаки функцій ідентифікації, достатньо обчислити їх значення в одній внутрішній точці, наприклад, в  $(0,0)$ .

Перетин перших двох напівплощин виділяє зону кута, зафарбованого на наступному рисунку ліворуч. Її ідентифікатором буде

$$\omega_{\angle ACB}(x, y) = ir_1(2 + 2x - y, 2 - 2x - y) = 2 - 2|x| - y.$$

Зону кута ми перетинаємо з напівплощиною, що лежить вище прямої AB, і отримуємо трикутник (наступний рисунок праворуч). Його функцією ідентифікації буде

$$\begin{aligned} \omega_{ABC}(x, y) &= ir_1(2 - 2|x| - y, 2 - 2x + 3y) = \\ &= 2 - x + y - |x| - |x - 2y - |x||. \end{aligned}$$



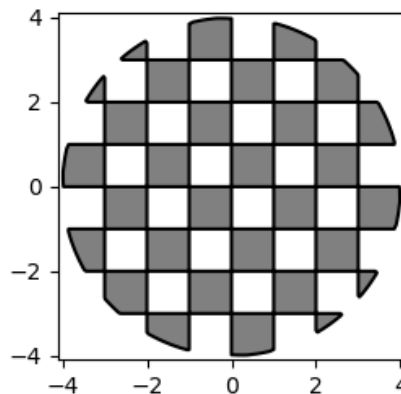
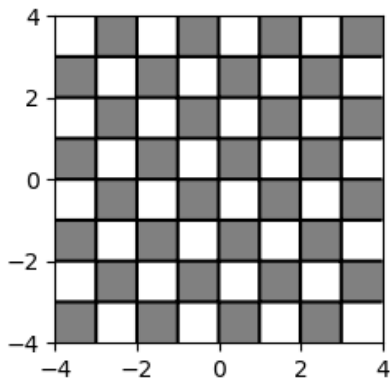
Неявним рівнянням контура трикутника буде  $\omega_{ABC}(x, y) = 0$ .

*Зауваження.* В Python візуалізацію трикутника можна виконати по-аналогії з попереднім прикладом.

**Приклад 5.** Побудувати функцію, яка буде додатною всередині множини темних точок площини, зображених на наступному рисунку праворуч, і яка дорівнює нулю на їх межі. Це є набором чорних квадратних клітин шахової дошки, розташованих всередині і на межі кола.

Розв'язання. Нехай ширина клітини дорівнює одиниці, а коло має радіус 4 і центр на початку координат. Легко бачити, що функцію ідентифікації області «нескінченної шахівниці» (наступний рисунок ліворуч) можна побудувати по формулі  $\omega_1(x, y) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$ , а внутрішня область кола визначається функцією  $\omega_2(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ . Тоді

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= ir_1(\sin \pi x \cdot \sin \pi y, 16 - x^2 - y^2) = \\ &= \frac{1}{2}(\sin \pi x \cdot \sin \pi y + 16 - x^2 - y^2 - |\sin \pi x \cdot \sin \pi y - 16 + x^2 + y^2|) \end{aligned}$$



#### 4.1.2. Ⓛ Доповнення областей.

Легко зрозуміти що, коли  $\omega_\Omega(x, y)$  є функцією ідентифікації області  $\Omega$ , то ідентифікатором  $\omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y)$  замикання доповнення  $\overline{\Omega^c} = \Omega^c \cup \partial\Omega$  ( $\Omega^c$  позначає доповнення області  $\Omega$ ,  $\overline{\Omega}$  – замикання, а  $\partial\Omega$  – множину точок межі  $\Omega$ ) буде  $-\omega_\Omega(x, y)$ . Дійсно, область  $\Omega^c \cup \partial\Omega$  складається з точок площини, що не належать  $\Omega$ , і граничних точок  $\Omega$ . Якщо точка  $P(x, y) \in \partial\Omega$ , то  $\omega_\Omega(x, y) = 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y) = -\omega_\Omega(x, y) = 0$ . Якщо  $P(x, y) \in \Omega^c$ , то  $\omega_\Omega(x, y) < 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y) = -\omega_\Omega(x, y) > 0$ . Якщо  $P(x, y) \in \Omega \setminus \partial\Omega$ , то  $\omega_\Omega(x, y) > 0 \Rightarrow \omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y) = -\omega_\Omega(x, y) < 0$ . Таким чином, виконується наступна

**Лема 1.** Функція  $\omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y)$  позитивна поза областю  $\Omega$ , дорівнює нулю на її межі, і від'ємна всередині (ідентифікатор замикання доповнення), може бути побудована за формулою

$$\omega_{\Omega^c \cup \partial\Omega}(x, y) = -\omega_\Omega(x, y) \quad (1)$$

де  $\omega_\Omega(x, y)$  є функцією ідентифікації області  $\Omega$ .

**Приклад 1.** Побудувати ідентифікатор зовнішності трикутника з вершинами в точках  $A(-2, -2)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 2)$ , що розташована всередині кола радіуса 3 і центром на початку координат.

Розв'язання. Для нашого трикутника у прикладі 4 попереднього пункту ми побудували функцію ідентифікації у вигляді

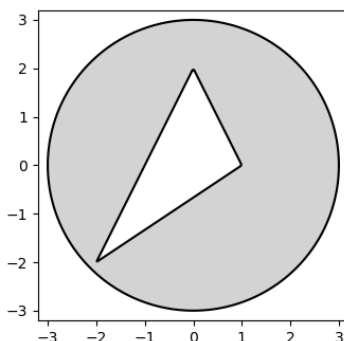
$$\omega_{ABC}(x, y) = 2 - x + y - |x| - |x - 2y - |x||$$

Очевидно, що функція позитивна поза зоною трикутника, рівна 0 на його межі, і від'ємна в середині, буде відрізнятися від цієї тільки знаком. Тоді для бажаної області (зовнішність трикутника всередині кола) матимемо

$$\omega(x, y) = ir_1(-\omega_{ABC}(x, y), 9 - x^2 - y^2) =$$



$$= 7 + x - y - x^2 - y^2 + |x| + |-x + 2y + |x|| - \\ - \left| -11 + x - y + x^2 + y^2 + |x| + |-x + 2y + |x|| \right|.$$



*Зауваження.* Перетворення, які виконувалися в попередніх прикладах, можна робити в будь якій системі символьних обчислень або, наприклад, в Python за допомогою процедур модуля SymPy.

#### 4.1.3. Об'єднання областей.

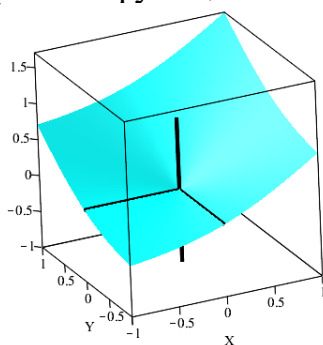
Аналогічно до п. 4.1.1 можна конструювати неявні рівняння меж об'єднаних областей. Для цього нам знадобляться наступні допоміжні функції.

$$ur_0(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad (1a)$$

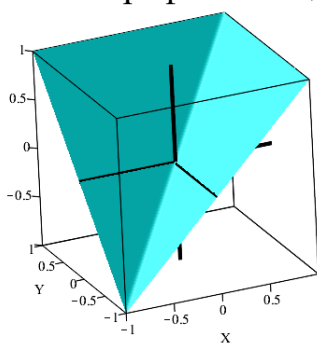
$$ur_1(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|); \quad (1b)$$

$$ur_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}), \quad -1 < \alpha \leq 1. \quad (1c)$$

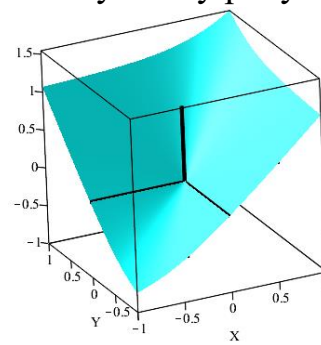
Ми їх зватимемо виконавчими функціями операції об'єднання областей, або коротко «функціями об'єднання». Їх графіки наведено на наступному рисунку



$ur_0(x, y)$



$ur_1(x, y)$



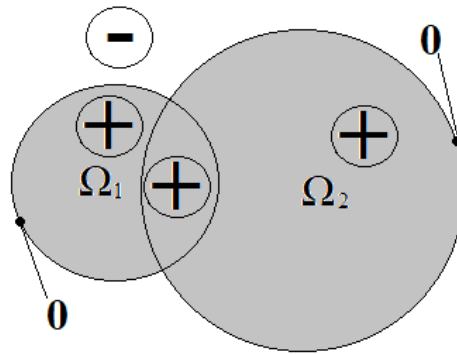
$ur_\alpha(x, y, 4/5)$

В подальшому ми часто застосовуватиме позначення  $ur(u, v)$ , і в якості останнього виступатиме будь-яка з функцій (1), або будь-яка інша, що задовольняє спеціальним умовам знаків

$$ur(u, v) = \begin{cases} < 0, & u < 0 \wedge v < 0; \\ = 0, & (u = 0 \wedge v \leq 0) \vee (u \leq 0 \wedge v = 0); \\ > 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Припустимо, що ідентифікатором замкнутої області  $\Omega_1$  є функція  $\omega_1(x, y)$ , а замкнутої області  $\Omega_2$  – функція  $\omega_2(x, y)$ . Розглянемо множину точок  $(x, y)$ , яка визначається нерівністю  $ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) \geq 0$ . Покажемо, що вона

збігається з областю об'єднання  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , і  $ur(\omega_1, \omega_2) = 0$  лише в граничних точках  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .



Знаки функції  $ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y))$ .

Нехай точка  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) < 0$  і  $\omega_2(x, y) < 0$ . Відповідно до (2),  $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 < 0) < 0$  як функція двох від'ємних аргументів. Тобто для будь-якої зовнішньої точки області  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  функція  $ur(\omega_1, \omega_2) < 0$ .

Нехай  $P(x, y) \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) > 0$  і  $\omega_2(x, y) < 0$ . Відповідно до (2),  $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 < 0) > 0$ .

Нехай  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2 \setminus \partial\Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) < 0$  і  $\omega_2(x, y) > 0$ . Відповідно до (2) маємо  $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 > 0) > 0$ .

Нехай  $P(x, y) \in \Omega_1 \setminus \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2 \setminus \partial\Omega_2$ . Тоді  $\omega_1(x, y) > 0$  і  $\omega_2(x, y) > 0$ . Відповідно до (2),  $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0) > 0$ .

Якщо  $P(x, y) \in \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \partial\Omega_2$ , то  $ur(\omega_1 > 0, \omega_2 = 0) > 0$ .

Якщо  $P(x, y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \in \Omega_2$ , то  $ur(\omega_1 = 0, \omega_2 > 0) > 0$ .

Таким чином, для будь-якої внутрішньої точки області  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  функція  $ur(\omega_1, \omega_2) > 0$ .

Якщо  $P(x, y) \in \partial\Omega_1 \wedge P(x, y) \notin \Omega_2$ , то  $ur(\omega_1 = 0, \omega_2 < 0) = 0$ .

Якщо  $P(x, y) \notin \Omega_1 \wedge P(x, y) \in \partial\Omega_2$ , то  $ur(\omega_1 < 0, \omega_2 = 0) = 0$ .

Отже  $ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = 0$  лише в граничних точках області  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Таким чином, виконується наступна

**Лема 1.** Функція  $\omega_\cup(x, y)$  ідентифікації об'єднання  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  замкнутих областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  може бути побудована за формулою

$$\omega_\cup(x, y) = ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \quad (3)$$

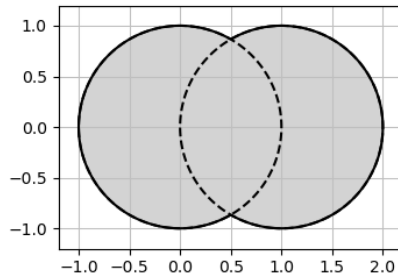
де  $\omega_1(x, y)$  і  $\omega_2(x, y)$  є функціями ідентифікації областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ .

**Наслідок.** неявне рівняння межі області  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  має вигляд

$$ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = 0. \quad (4)$$

*Зауваження.* Об'єднання скінченної кількості замкнутих множин є замкнутою множиною. Тому, якщо  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  замкнуті області, то  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  теж є замкнутою.

**Приклад 1.** Побудувати рівняння межі області об'єднання двох одиничних кіл з центрами в точках  $(0,0)$  та  $(1,0)$ .



Розв'язання. Функції ідентифікації кіл мають вид  $\omega_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  та  $\omega_2(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . Тоді, відповідно до (3), матимемо  $\omega_U(x, y) = ur(1 - x^2 - y^2, 1 - (x - 1)^2 - y^2)$ . Обираючи (1b) в якості виконавчої функції операції об'єднання, після деяких спрощень (і домноження на 2) отримаємо

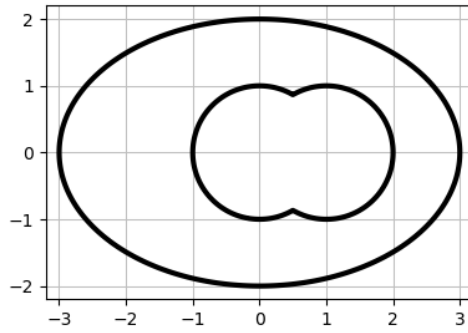
$$\omega_U(x, y) = 1 + 2x - 2x^2 - 2y^2 + |2x - 1|$$

Неявним рівнянням зовнішнього контура області об'єднання буде  $\omega_U(x, y) = 0$ . ■

**Приклад 2.** Побудувати рівняння межі області, яка є перетином зовнішності двох одиничних кіл з центрами в точках (0,0) та (1,0), та внутрішності еліпса  $1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$ .

Розв'язання. Функція  $\omega_U(x, y)$  ідентифікації області об'єднання кіл побудована в попередньому прикладі, а ідентифікатором її зовнішності (з межею) буде  $\omega_{\bar{U}}(x, y) = -\omega_U(x, y)$ . Перетинаючи цю зону (зовнішність двох кіл) з внутрішністю еліпса, ідентифікатор якого має вид  $\omega_O(x, y) = 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ , отримаємо ідентифікатор області. Прирівнявши його до нуля, отримаємо неявне рівняння бажаного контура.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, init_printing,
simplify, pi, sin, sqrt, expand
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ur(x,y): return (x+y+Abs(x-y))/2
def ir(x,y): return (x+y-Abs(x-y))/2
x,y = symbols("x y")
w1=1-x**2-y**2
w2=1-(x-1)**2-y**2
w12=expand(ur(w1,w2))
w3=1-x**2/9-y**2/4
w123=simplify(72*ir(-w12,w3))
display(w123) # ідентифікатор області
18 - 36x + 32x2 + 27y2 - 18|2x - 1| - |54 + 36x - 40x2 - 45y2 + 18|2x - 1||
plot_implicit(w123, (x, -3.2, 3.2), (y, -2.2, 2.2),
aspect=(1,1), n=200, color='k',
rendering_kw={ "linewidths":3})
plt.show()
```



Отже, неявним рівнянням наведеної лінії є  $w_1^2 + w_2^2 = 0$ .

#### 4.1.4. Різниця областей.

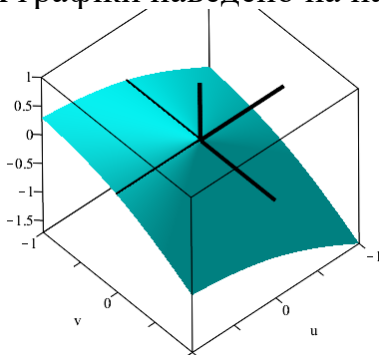
Оскільки має місце  $\Omega_1 \setminus \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2^c$ , а ідентифікатор  $\omega_{\Omega_2^c}$  замикання доповнення  $\overline{\Omega_2^c}$  конструюється заміною знаку ( $\omega_{\Omega_2^c} = -\omega_{\Omega_2}$ ), то виконавчі функції  $dr(x, y)$  замикання різниці областей  $\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}$  можна будувати за формулою  $dr(x, y) = ir(x, -y)$ . Наприклад

$$dr_0(x, y) = \frac{1}{2}(x - y - \sqrt{x^2 + y^2}); \quad (1a)$$

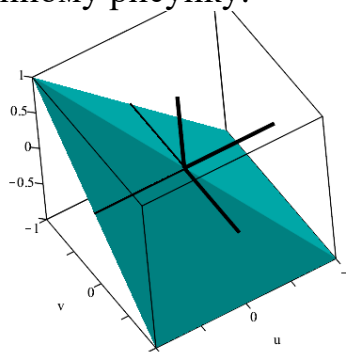
$$dr_1(x, y) = \frac{1}{2}(x - y - |x + y|); \quad (1b)$$

$$dr_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{1}{1+\alpha}(x - y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2\alpha xy}), \quad -1 < \alpha \leq 1. \quad (1c)$$

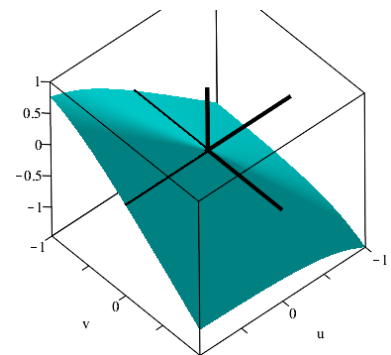
Їх графіки наведено на наступному рисунку.



$dr_0(x, y)$



$dr_1(x, y)$



$dr_\alpha(x, y, 4/5)$

Для виконавчих функцій замикання різниці областей суттєвим є лише наступний розподіл знаків

$$dr(u, v) = \begin{cases} > 0, & u > 0 \wedge v < 0; \\ = 0, & (u = 0 \wedge v \leq 0) \vee (u \geq 0 \wedge v = 0); \\ < 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Перефразуючи лему 1 п. 4.1.1, матимемо

**Лема 1.** Функція  $\omega_{\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}}(x, y)$  ідентифікації замикання різниці областей  $\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}$  може бути побудована за формулою

$$\omega_{\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}}(x, y) = dr(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \quad (3)$$

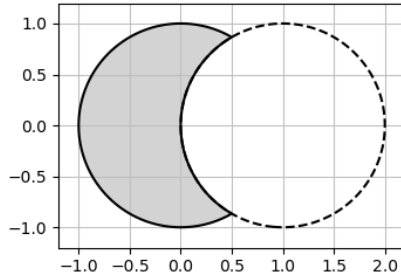
де  $\omega_1(x, y)$  і  $\omega_2(x, y)$  є функціями ідентифікації областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ .

**Наслідок.** Неявне рівняння межі області  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  має вигляд

$$dr(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = 0. \quad (4)$$

*Зауваження.* Різниця  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  двох замкнутих множин  $\Omega_1, \Omega_2$  не є замкнутою множиною. Тому в лемі використовується «замикання різниці областей», бо функції ідентифікації конструюються для замкнутих областей.

**Приклад 1.** Сконструювати неявне рівняння межі різниці двох одиничних кіл з центрами в точках  $(0,0)$  та  $(1,0)$ .

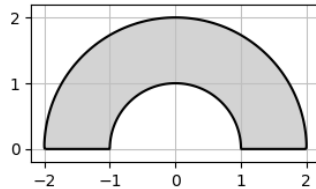


*Розв'язання.* Функціями ідентифікації кіл є  $\omega_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  та  $\omega_2(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . Тоді, відповідно до (3), матимемо  $\omega_{\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}}(x, y) = dr(1 - x^2 - y^2, 1 - (x - 1)^2 - y^2)$ . Обираючи (1b) в якості виконавчої функції різниці областей, після деяких спрощень (і домноження на 2) отримуємо

$$\omega_{\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}}(x, y) = 1 - 2x - |2x^2 + 2y^2 - 2x - 1|$$

Неявним рівнянням контура області буде  $\omega_{\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}}(x, y) = 0$ .

**Приклад 2.** Сконструювати неявне рівняння контура напівкільця.



*Розв'язання.* Функцією ідентифікації внутрішності більшого кола є  $\omega_1(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ , меншого –  $\omega_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ , а верхньої напівплощини  $\omega_3(x, y) = y$ . Тоді ідентифікатором зони напівкільця може бути

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= ir\left(dr(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \omega_3(x, y)\right) = \\ &= ir(dr(4 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2), y). \end{aligned}$$

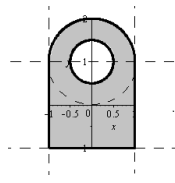
Після множення на 4 і спрощення, неявне рівняння контура матиме вигляд

$$3 + 2y - |2x^2 + 2y^2 - 5| - |2y - 3 + |2x^2 + 2y^2 - 5|| = 0.$$

#### 4.1.5. Приклади і допоміжні твердження.

При конструюванні областей зустрічаються різноманітні комбінації. Покажемо на прикладах, як запропонований метод працює у випадках складних геометричних фігур.

**Приклад 1.** Сконструюємо функцію ідентифікації фігури, яка наведена на початку п. 4.1.



Розв'язання. За допомогою логічної формули  $\Omega = ((\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup \Omega_3) \cap \overline{\Omega_4}$  бажану область точок площини можна подати у вигляді комбінації підобластей  $\Omega_i$  з наступними ідентифікаторами  $\omega_i(x, y)$ :

- |             |  |                                 |
|-------------|--|---------------------------------|
| $\Omega_1:$ | $\omega_1(x, y) = 1 - x^2 \geq 0;$               | вертикальна смуга;              |
| $\Omega_2:$ | $\omega_2(x, y) = 1 - y^2 \geq 0;$               | горизонтальна смуга;            |
| $\Omega_3:$ | $\omega_3(x, y) = 1 - x^2 - (y - 1)^2 \geq 0;$   | зсунуте вгору коло радіуса 1;   |
| $\Omega_4:$ | $\omega_4(x, y) = 1/4 - x^2 - (y - 1)^2 \geq 0.$ | зсунуте вгору коло радіуса 1/2. |

Заміняючи в логічній формулі операцію перетину  $\cap$  функцією  $ir(\dots, \dots)$  з аргументами ідентифікаторами відповідних підобластей, операцію об'єднання  $\cup$  – функцією  $ur(\dots, \dots)$ , а операцію доповнення – арифметичним запереченням (тобто замість  $\Omega_4^-$  в аналітичному виразі використаємо  $-\omega_4$ ), отримаємо наступну суперпозицію

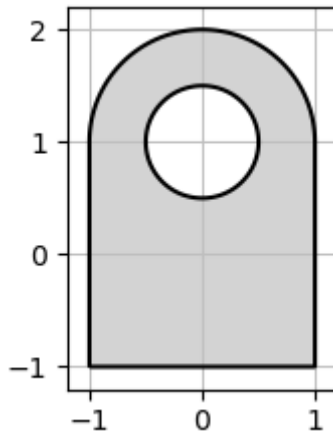
$$\omega(x, y) = ir\left(ur\left(ir(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \omega_3(x, y)\right), -\omega_4(x, y)\right),$$

яка являтиме функцію ідентифікації наведеної фігури.

```

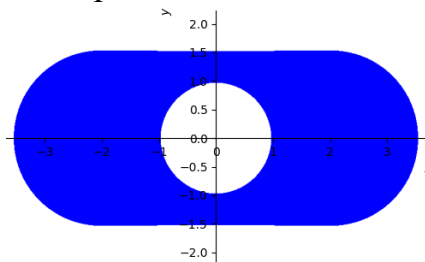
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify, S
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
x,y = symbols("x y")
w1=1-x**2
w2=1-y**2
w3=1-x**2-(y-1)**2
w4=S(1)/4-x**2-(y-1)**2
w=ir(ur(ir(w1,w2),w3),-w4)
display(simplify(8*w))      # для спрощення додано множник 8
5 - 4 y + x2 + y2 - |x2 - y2| + |2 - 4 y + x2 + y2 - |x2 - y2||
- |1 + 7x2 + 7y2 - 12y + |x2 - y2| - |2 + x2 + y2 - 4y - |x2 - y2|||
plot_implicit(w>0, (x, -1.2, 1.2), (y, -1.2, 2.2),
    aspect=(1,1), border_color="k", n=200, color='lightgray',
    grid=True, legend=False)
plt.show()

```



Звісно, що друкувати довгі формули немає сенсу - комп'ютер може їх обробити без нашої участі.

**Приклад 2.** Побудувати неявне рівняння зони «стадіону з круговим отвором».



**Розв'язання.** Нехай розміри фігури будуть таким, як на наведеному рисунку: висота 3, ширина 7, радіус внутрішнього кола  $r = 1$ , абсциси центрів півкіл, що утворюють ліву і праву межу, дорівнюють  $\pm 2$ . Ввівши параметри  $a = 2$  (абсциса центра правого півкола),  $b = 1.5$  (напіввисота), фігуру  $\Omega$  можна подати як послідовну комбінацію наступних областей:

$\Omega_1$ (смуга)	$-a \leq x \leq a$	$\omega_1(x, y) = a^2 - x^2$
$\Omega_2$ (смуга)	$-b \leq y \leq b$	$\omega_2(x, y) = b^2 - y^2$
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$	Прямокутник	$\omega_{12}(x, y) = ir(\omega_1, \omega_2)$
$\Omega_3$ (ліве коло)	$b^2 - (x + a)^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_3(x, y) = b^2 - (x + a)^2 - y^2$
$\Omega_4$ (праве коло)	$b^2 - (x - a)^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_4(x, y) = b^2 - (x - a)^2 - y^2$
$\Omega_{123} = \Omega_{12} \cup \Omega_3$	Прямокутник з лівим колом	$\omega_{123}(x, y) = ur(\omega_{12}, \omega_3)$
$\Omega_{1234} = \Omega_{123} \cup \Omega_4$	Стадіон без отвору	$\omega_{1234}(x, y) = ur(\omega_{123}, \omega_4)$
$\Omega_5$ (коло-отвір)	$r^2 - x^2 - y^2 \geq 0$	$\omega_5(x, y) = r^2 - x^2 - y^2$
$\Omega = \overline{\Omega_{1234}} \setminus \overline{\Omega_5}$	Результівна фігура	$\omega(x, y) = dr(\omega_{1234}, \omega_5)$

В попередніх прикладах ми використовували Python і його модуль символної математики SymPy. Покажемо, як описуваний підхід реалізувати за допомогою NumPy та Matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Створіть виконавчі функції булевих операцій.
def ir(u,v): return (u+v-np.abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+np.abs(u-v))/2
def dr(u,v): return (u-v-np.abs(u+v))/2
```

Створіть сітку точок, що гарантовано покриває досліджувану фігуру.

```
x_=np.linspace(-4,4,401)
y_=np.linspace(-2,2,201)
x,y=np.meshgrid(x_,y_)
```

Послідовно обчисліть вирази по формулам, наведеним в таблиці.

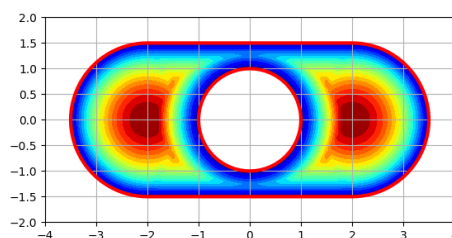
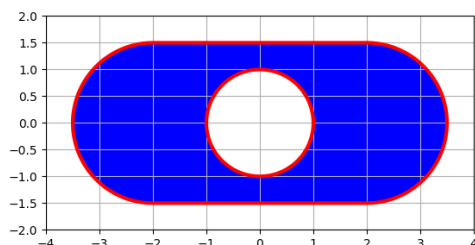
```
a,b,r=2,1.5,1
w1=a**2-x**2
w2=b**2-y**2
w12=ir(w1,w2)
w3=b**2-(x+a)**2-y**2
w4=b**2-(x-a)**2-y**2
w123=ur(w12,w3)
w1234=ur(w123,w4)
w5=r**2-x**2-y**2
w=dr(w1234,w5)
```

Тут масив  $w$  містить у вузлах сітки  $(x, y)$  значення функції ідентифікації області  $\Omega$ . Побудуємо графік її нульової лінії рівня, тобто контур межі області.

```
fig,ax = plt.subplots(1,1)
ax.contour(x,y, w, [0], linewidths=3,colors='r')
```

Щоб візуалізувати область, можна використати функцію `contourf()`. Але вона фарбує зони між лініями рівня, тому їй потрібно передати принаймні два значення, одне з яких буде нулем, а інше – максимумом  $w$ . Оскільки  $w$  негативне зовні, то можна просто обрати величину  $w.\max()$ .

```
ax.contourf(x,y,w,[0,w.max()],colors='b')
ax.grid(True)
ax.set_aspect(1) # наступний рисунок ліворуч
```



Діапазон  $[0, w.\max())$  можна розбити на кілька рівнів і побудувати зафарбований контурний графік функції ідентифікації. Для цього замініть інструкцію `ax.contourf(x,y,w,...)` на дві наступні

```
vals=np.linspace(0,w.max(),20)
ax.contourf(x,y,w,vals, cmap='jet') # попередній рисунок праворуч
```

Ви отримаєте зображення, яке показано на попередньому рисунку праворуч.

Функція ідентифікації, зазвичай, грає допоміжну роль, а в області потрібно візуалізувати якесь скалярне поле. Для цього можна використати масковані масиви. Наприклад, нехай скалярне поле має вигляд  $f(x,y) = x^2 + y^2$ . Розфарбуємо досліджувану область (стадіон з отвором) відповідно до значень  $f(x,y)$ .

В продовження попереднього сценарію введіть наступні інструкції.

```
f=lambda x,y: x**2+y**2
```



Створіть масковані масиви координат точок сітки і значень скалярного поля.

```
X=np.ma.masked_where(w<0,x)
```

```
Y=np.ma.masked_where(w<0,y)
```

```
F=f(X,Y) # маскований масив значень скалярного поля в області
```

Побудуйте залитий контурний графік поля в області.

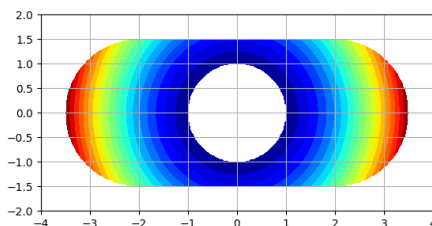
```
fig2,ax2 = plt.subplots(1,1)
```

```
vals=np.linspace(F.min(),F.max(),20)
```

```
ax2.contourf(X,Y,F, vals, cmap='jet')
```

```
ax2.grid(True)
```

```
ax2.set_aspect(1)
```



*Зауваження.* У вправі 22 в кінці поточної глави пропонується застосувати спосіб конструювання функції ідентифікації «стадіону без отвору», за яким результативний вираз буде простішим, ніж  $\omega_{1234}(x, y)$ .

*Зауваження.* Щоб надрукувати формулу функції ідентифікації  $w(x, y)$ , в попередньому коді можна було б замість масивів  $w$  працювати з функціями  $w(x, y)$ . Тоді, за допомогою інструкції  $W=\text{sympy.lambdify}((x, y), w(x, y), "sympy")$ , функцію  $w(x, y)$  можна було б конвертувати на символічну  $W$ , а потім опублікувати вираз  $W(x, y)$ .

■

В деяких задачах зручно застосовувати допоміжні твердження, які можуть спростити результативний вираз функції ідентифікації.

**Твердження 1.** Дано дві області: одна  $\Omega_1$  обмежена зверху кривою  $y = f_1(x)$ , а інша  $\Omega_2$  – знизу кривою  $y = f_2(x)$ . Функції ідентифікації цих областей мають вигляд  $\omega_1(x, y) = f_1(x) - y$  і  $\omega_2(x, y) = y - f_2(x)$ . Тоді функція ідентифікації зони перетину  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  може бути наступною

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x, y) &= ir_1(f_1(x) - y, y - f_2(x)) = \\ &= \frac{1}{2} (f_1(x) - f_2(x) - |f_1(x) + f_2(x) - 2y|). \end{aligned} \quad (1)$$

**Приклад 3.** Написати неявне рівняння правильного шестикутника з центром на початку координат і з одиничним радіусом описаного кола.

*Розв'язання.* Можна побудувати цю область як перетин шести напівплощин або трьох смуг. Однак ми вчинимо по-іншому. В попередніх главах наводилися формули побудови явного рівняння ламаної. Буде простіше, якщо ми сконструюємо шестикутник як перетин двох областей, показаних на наступному рисунку ліворуч і всередині.

Вузли верхньої ламаної (наступний рисунок ліворуч) мають координати  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  і  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , а тангенси кутів нахилу нескінченних променів дорівнюють

$\sqrt{3}$  і  $-\sqrt{3}$ . Рівняння ламаної, що зверху обмежує область, можна побудувати за формулою Бернштейна [5] (зробіть це самостійно)

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \left| x + \frac{1}{2} \right| - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)$$

Аналогічно рівняння ламаної, що знизу обмежує область, показано на наступному рисунку всередині, має вигляд

$$y_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -2 + \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)$$

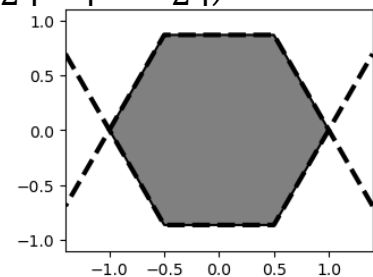
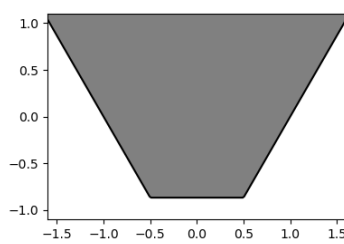
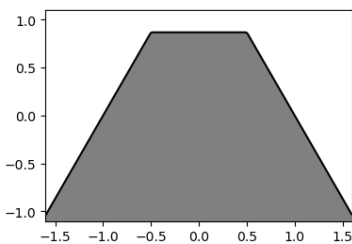
Тоді ідентифікаторами розглядуваних зон будуть функції

$$\omega_1(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \left| x + \frac{1}{2} \right| - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) - y,$$

$$\omega_2(x, y) = y + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \left| x + \frac{1}{2} \right| - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right).$$

І в результаті отримуємо

$$\omega_6(x, y) = ir_1(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 2 - \left| x + \frac{1}{2} \right| - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) - |y|$$

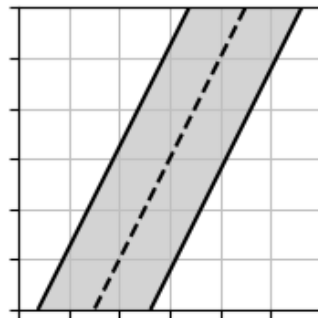


Неявним рівнянням контура шестикутника буде  $\omega_6(x, y) = 0$  (на попередньому рисунку праворуч пунктиром показані межі областей, що перетинаються; рівнянню  $\omega_6(x, y) = 0$  задовольнятимуть лише точки контура шестикутника). ■

Часто в логічних формулах побудови геометричних фігур зустрічаються похилі смуги. Тоді корисним буде наступне

**Твердження 2.** Функцією ідентифікації смуги напівширини  $h$  навколо прямої  $a x + b y + c = 0$  може бути




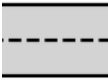

$$\omega(x, y) = h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - |a x + b y + c|. \quad (2)$$



**Доведення.** Дійсно, нехай осьова лінія  $L$  смуги має рівняння  $a x + b y + c = 0$ . Нормалізуємо його, записавши у вигляді  $a' x + b' y + c' = 0$ , де  $a' = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $b' = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $c' = c/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Тоді відстань будь-якої

точки  $(x_0, y_0)$  до прямої  $L$  обчислюватиметься за формулою  $\delta = |a'x_0 + b'y_0 + c'|$ . Множина всіх точок  $x, y$  площини  $XY$ , відстань яких до прямої  $L$  менша за  $h$  (очевидно, що це смуга), визначатиметься нерівністю  $\delta \leq h$ , тобто  $|a'x_0 + b'y_0 + c'| \leq h$  або  $|ax + by + c| \leq h\sqrt{a^2 + b^2}$ . Отже для точок смуги виконується нерівність  $\omega(x, y) = h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - |ax + by + c| \geq 0$ . При чому в точках межі смуги  $\omega(x, y) = 0$ , оскільки вони знаходяться на відстані  $h$  від осьової лінії, і для них виконується рівність  $a'x + b'y + c' = \pm h$ . Очевидно, що поза зоною смуги  $\omega(x, y) < 0$ . Таким чином функція (2) задовольняє всім вимогам, які накладаються на функції ідентифікації. ■

**Приклад 4.** Написати неявне рівняння контура літери X (першої в назві Харків). Розв'язання. Нехай напівтовщина літери  $h = 1$ , напіввисота  $H = 5$ , а її центр знаходиться на початку координат. На площині  $XY$  зону точок літери X представимо у вигляді перетину трьох смуг.

$\Omega_1$ (похила смуга 1)		$\omega_1(x, y) = \sqrt{5} -  2x - y $
$\Omega_2$ (похила смуга 2)		$\omega_2(x, y) = \sqrt{5} -  2x + y $
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (безмежний хрест)		$\omega_{12}(x, y) = ir(\omega_1, \omega_2)$
$\Omega_3$ (горизонтальна смуга)		$\omega_3(x, y) = H -  y $
$\Omega_X = \Omega_{12} \cap \Omega_3$ (літера X)		$\omega_X(x, y) = ir(\omega_{12}, \omega_3)$

Логічна формула побудови фігури у формі літери X має вигляд  $\Omega_X = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap \Omega_3$ . Заміняючи в ній операції об'єднання  $\cup$  та перетину  $\cap$  функціями  $ur()$  і  $ir()$ , отримаємо наступну функцію ідентифікації цієї області

$$\omega_X(x, y) = ir(ur(\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)), \omega_3(x, y)).$$

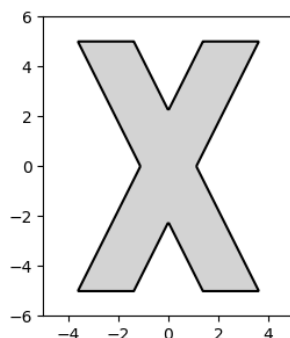
Для конструювання ідентифікаторів похилих смуг в наступному сценарії ми створимо окрему функцію `strip(a, b, c, h)`, яка прийматиме коефіцієнти  $a, b, c$  рівняння осьової лінії  $ax + by + c = 0$  і напівширину  $h$  смуги, а повертатиме вирази  $ax + by + c$  та  $\omega(x, y)$  – ідентифікатор смуги.

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify, sqrt
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
plt.close('all')
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
x,y = symbols("x y")
def strip(a,b,c,h):
```

```

lin=a*x+b*y+c
w=h*sqrt(a**2+b**2)-Abs(lin)
return lin,w
lin1,w1=strip(2,-1,0,1) # w1 – ідентифікатор першої смуги
lin2,w2=strip(-2,-1,0,1) # w2 – ідентифікатор другої смуги
w12=ur(w1,w2)
w3=5-Abs(y) # ідентифікатор горизонтальної смуги
wx=ir(w12,w3)
display(simplify(4*wx)) # множник 4 несуттєвий
10 + 2√5 - 2|y| - |2x - y| - |2x + y| + ||2x - y| - |2x + y|| -
|2|y| - |2x - y| - |2x + y| + ||2x - y| - |2x + y|| - 10 + 2√5 |
pd=plot_implicit(wx>0,(x,-5,5),(y,-6,6),aspect=(1,1),
border_color="k",n=200,color='lightgray',grid=False)

```



■

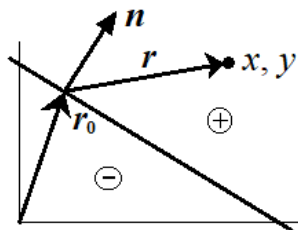
Коли ми будемо ідентифікатор півплощини, розташованої по один бік від прямої  $ax + by + c = 0$ , корисним є наступне

**Твердження 3.** Функція  $\omega(x, y) = ax + by + c$  є ідентифікатором тієї півплощини, в бік якої вказує вектор  $\mathbf{n} = (a, b)$ .

Доведення. Рівняння прямої можна уявити у вигляді

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

де  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$  деяка точка прямої. Якщо  $x, y$  координати точки поза прямою, то  $\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0)$  є вектором, що з'єднує точку  $(x_0, y_0)$  з точкою  $(x, y)$ . Відстань  $\delta$  від точки  $(x, y)$  до прямої з точністю до знака дорівнює скалярному добутку  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор нормалі прямої.



З рисунку видно, якщо вектор  $\mathbf{r}$  спрямований на ту ж півплощину, що і вектор  $\mathbf{n}$ , то скалярний добуток  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  буде позитивним (кут між векторами гострий). Таким чином, напрям вектора  $\mathbf{n}$  визначає «позитивну» півплощину  $\oplus$ .

## 4.2. Конструювання рівнянь поверхонь тривимірних тіл.

Методику конструювання рівнянь меж плоских областей можна розповсюдити для побудови неявних рівнянь меж (поверхень) просторових тіл. Тільки в цьому випадку слід використовувати функції ідентифікації тривимірних областей (функції трьох змінних).

Нехай у тривимірному просторі дано замкнені області (тіла)  $\Omega_i$ , для яких відомі функції  $\omega_i(x, y, z)$  позитивні всередині області, негативні - зовні, і рівні нулю на їх межах. Функції  $\omega_i$ , що мають вказані властивості, ми зватимемо функціями ідентифікації або просто ідентифікаторами тіл  $\Omega_i$ . Очевидно, що неявні рівняння поверхонь  $\Omega_i$  можна тоді записати у вигляді  $\omega_i(x, y, z) = 0$ . Крім того, побудуємо функції

$$\begin{aligned}ir(u, v) &= \frac{1}{2}(u + v - |u - v|) \\ur(u, v) &= \frac{1}{2}(u + v + |u - v|) \\dr(u, v) &= \frac{1}{2}(u - v - |u + v|)\end{aligned}\tag{1}$$

Їх ми зватимемо виконавчими функціями операцій перетину, об'єднання і різниці областей. Функція  $ir(u, v)$  позитивна в зоні першого квадранта  $u > 0, v > 0$ , дорівнює нулю на його граничних променях  $u = 0 \wedge v \geq 0$  та  $u \geq 0 \wedge v = 0$ , і негативна для інших значень  $u, v$ . Функція  $ur(u, v)$  негативна у внутрішніх точках третього квадранта  $u < 0 \wedge v < 0$ , дорівнює нулю на його граничних променях  $v = 0 \wedge u \leq 0, u = 0 \wedge v \leq 0$ , і позитивна для інших точок площини UV (вона негативна у квадранті, в якому обидва аргументи  $u, v$  від'ємні, і позитивна в інших квадрантах). Функція  $dr(u, v)$  позитивна в зоні 4-го квадранта  $u > 0 \wedge v < 0$ , дорівнює нулю лише на його граничних променях  $(u = 0 \wedge v \leq 0) \vee (u \geq 0 \wedge v = 0)$ , і від'ємна в інших точках площини UV.

Якщо  $\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)$  є ідентифікаторами замкнутих областей  $\Omega_1, \Omega_2$ , то справедливі наступні твердження:

1. Функція  $\omega_{\cap}(x, y, z) = ir(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z))$  є ідентифікатором області  $\Omega_{\cap} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ;
2. Функція  $\omega_{\cup}(x, y, z) = ur(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z))$  є ідентифікатором області  $\Omega_{\cup} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ;
3. Функція  $\omega_{dr}(x, y, z) = dr(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z))$  є ідентифікатором області  $\Omega_{dr} = \overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2}$ .

Доведення цих тверджень виконується обчисленням знака/значення відповідної функції  $\omega_{\cdot}(x, y, z)$  в усіх можливих місцях розташування точки  $(x, y, z)$ : одночасно всередині  $\Omega_1, \Omega_2$ ; зовні  $\Omega_1$ , але всередині  $\Omega_2$ ; на межі  $\Omega_1$  і всередині  $\Omega_2$ , і так далі (слід відтворити доведення лем 1 пунктів 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4).

*Зауваження.* Для виконавчих функцій операцій перетину, об'єднання і різниці суттєвим є лише відповідний розподіл знаків, і замість виразів (1) для  $ir(u, v)$ ,

$ur(u, v)$ ,  $dr(u, v)$  можна обирати будь-які, визначені в формулах (1) пунктів 4.1.1, 4.1.3, 4.1.4. Наприклад,

$$\begin{aligned} ir_{\alpha}(u, v, \alpha) &= \frac{1}{1 + \alpha} \left( x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \alpha x y} \right), \quad -1 < \alpha \leq 1, \\ ur_{\alpha}(u, v, \alpha) &= \frac{1}{1 + \alpha} \left( x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \alpha x y} \right), \quad -1 < \alpha \leq 1, \quad (2) \\ dr_{\alpha}(u, v, \alpha) &= \frac{1}{1 + \alpha} \left( x - y - \sqrt{x^2 + y^2 + 2 \alpha x y} \right), \quad -1 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Застосовуючи твердження 1 – 3, можна конструювати неявні рівняння поверхонь будь-яких тіл. Нехай тіло  $\Omega$ , як множина точок у просторі, утворюється за допомогою деяких булевих операцій (перетин, об'єднання, доповнення і т.д.) над підобластями  $\Omega_i$ , що мають простішу ніж  $\Omega$  форму. Припустимо що для кожної з підобластей  $\Omega_i$  відома функція ідентифікації  $\omega_i(x, y, z)$ . Тоді суперпозиція функцій (1) і ідентифікаторів  $\omega_i$  областей  $\Omega_i$  дозволяє побудувати функцію ідентифікації результативної області  $\Omega$ . Наприклад, якщо  $\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2 \cup \Omega_3) \cap \overline{\Omega_4}$ , то  $\omega_{\Omega} = ir(ur(ir(\omega_1, \omega_2), \omega_3), -\omega_4)$ , де для стислості ми опустили аргументи  $x, y, z$  всіх функцій  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Як наслідок, неявне рівняння поверхні тіла  $\Omega$  матиме вигляд  $\omega_{\Omega}(x, y, z) = 0$ . Цей підхід працює так само як для плоских фігур, функції ідентифікації яких залежать лише від двох змінних  $x, y$ .

**Приклад 1.** Сконструювати неявне рівняння поверхні тривимірного тіла, яке задано нерівностями  $x^2 + y^2 \leq 1$  та  $y^2 + z^2 \leq 1$  (перетин кругових циліндрів одиничного радіуса, осі яких співпадають з осями координат Z та X), і візуалізувати фігуру.

**Розв'язання.** Нерівності виділяють зони тривимірного простору. Для кожної з них створимо функцію ідентифікації (додатну всередині, нуль – на межі, від'ємну зовні).

Область	Функція ідентифікації ( $\omega \geq 0$ )
$x^2 + y^2 \leq 1$	$\omega_1(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$
$y^2 + z^2 \leq 1$	$\omega_2(x, y, z) = 1 - y^2 - z^2$

Перетин цих областей утворюватиме тіло з функцією ідентифікації

$$\omega(x, y, z) = ir(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)).$$

Отже неявним рівнянням поверхні тіла буде  $\omega(x, y, z) = 0$ . Реалізуємо ці побудови в Python, застосовуючи символвні обчислення. Оскільки модуль Matplotlib не містить процедур побудови тривимірних контурних графіків (і поверхонь по їх неявним рівнянням), то для візуалізації використовуватимемо пакет Mayavi, який рекомендуємо встановити у ваше Python середовище.

```
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify, lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
```

```
x,y,z= symbols('x y z')
```

Створіть виконавчу функцію  $ir(x,y)$  операції перетину.

```
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
```

Створіть функції ідентифікації областей  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y^2 + z^2 \leq 1$  та області їх перетину.

```
w1=1-x**2-y**2
```

```
w2=1-y**2-z**2
```

```
w=simplify(ir(w1,w2))
```

```
display(simplify(w))
```

```
 $1 - x^2/2 - y^2 - z^2/2 - |x^2 - z^2|/2$ 
```

Тобто неявним рівнянням поверхні результтивного тіла є

$$1 - \frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}|x^2 - z^2| = 0.$$

Для візуалізації поверхні по неявному рівнянню застосуємо функцію `mayavi.mlab.contour3d()`. Але спочатку символний вираз  $w$  перетворимо на числову функцію, щоб її можна було застосовувати до масивів координат точок тривимірної сітки.

```
F=lambdify((x,y,z), w, 'numpy')
```

Створіть просторову сітку точок з координатами  $(X, Y, Z)$ , яка покриває досліджувану область, і масив значень виразу  $\omega(x, y, z)$  в цих точках.

```
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j, -1.1:1.1:100j, -1.1:1.1:100j]
```

```
W=F(X,Y,Z)
```

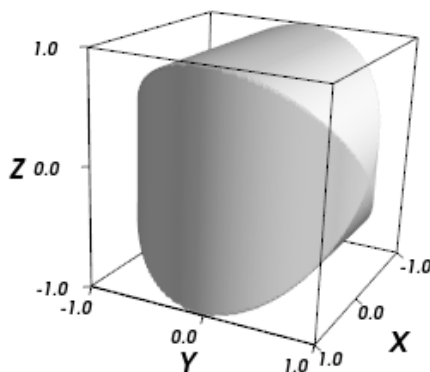
Тепер побудуйте поверхню нульового рівня виразу  $\omega(x, y, z)$ .

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
```

```
mlab.contour3d(X,Y,Z,W, contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
```

```
mlab.outline()
```

```
mlab.axes()
```



**Приклад 2.** Побудувати зображення поверхні кругового циліндра одиничного радіуса, вісь якого співпадає з координатною віссю  $Z$ , і який обмежений знизу площиною  $z = 0$ , а зверху – площиною  $y + z - 2 = 0$ .

Розв'язання. Конструйоване тіло можна подати як послідовну комбінацію наступних областей:

Область	Пояснення	Функція ідентифікації ( $\omega \geq 0$ )
$\Omega_1$	$x^2 + y^2 \leq 1$ ; нескінченний циліндр	$\omega_1(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$

$\Omega_2$	$z \geq 0$ ; півпростір	$\omega_2(x, y, z) = z$
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$	напівнескінченний циліндр	$\omega_{12}(x, y, z) = ir(\omega_1, \omega_2)$
$\Omega_3$	$z \leq 2 - y$ ; півпростір	$\omega_3(x, y) = 2 - y - z$
$\Omega_{123} = \Omega_{12} \cap \Omega_3$	результівне тіло	$\omega_{123}(x, y) = ir(\omega_{12}, \omega_3)$

Програмна реалізація цього прикладу частково повторює попередній код.

```
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify, lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
x, y, z = symbols('x y z')
def ir(u, v): return (u+v-Abs(u-v))/2
```

Створюємо функції ідентифікації основних областей та зон їх перетину.

```
w1=1-x**2-y**2
w2=z
w12=simplify(ir(w1,w2))
w3=2-y-z
w123=simplify(ir(w12,w3))
```

Надрукуємо функцію ідентифікації результатівного тіла (додавши несуттєвий множник 4)

```
display(simplify(4*w123))
5 - 2 y - z - x2 - y2 - | x2 + y2 + z - 1 | -
| 3 - 2 y - 3 z + x2 + y2 + | x2 + y2 + z - 1 ||
```

Символьний вираз w123 перетворимо на числову функцію.

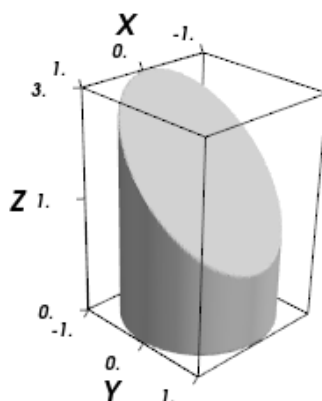
```
F=lambdify((x,y,z), w123, 'numpy')
```

Створюємо просторову сітку точок і масив значень виразу  $\omega_{123}(x, y, z)$  в цих точках.

```
X, Y, Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j, -1.1:1.1:100j, -0.1:3.1:100j]
W=F(X, Y, Z)
```

Тепер побудуйте поверхню нульового рівня функції ідентифікації.

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X, Y, Z, W, contours=[0], color=(0.7, 0.7, 0.7))
mlab.outline()
mlab.axes()
```





**Приклад 3.** По неявному рівнянню побудувати зображення поверхні куба  $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$  з циліндричним отвором  $x^2 + y^2 \leq 0.7^2$ .

Розв'язання. Для зон простору, які відповідають нерівностям, створимо функції ідентифікації.

Область	Функція ідентифікації ( $\omega \geq 0$ )
$ x  \leq 1$	$\omega_1(x, y, z) = 1 -  x $
$ y  \leq 1$	$\omega_2(x, y, z) = 1 -  y $
$ z  \leq 1$	$\omega_3(x, y, z) = 1 -  z $
$x^2 + y^2 \leq 0.7^2$	$\omega_4(x, y, z) = 0.49 - x^2 - y^2$

Перетин перших трьох зон/шарів утворює область у формі куба з функцією ідентифікації

$$\omega_{cube}(x, y, z) = ir(ir(\omega_1, \omega_2), \omega_3).$$

Тоді область куба з циліндричним отвором матиме наступний ідентифікатор

$$\omega(x, y, z) = dr(\omega_{cube}, \omega_4).$$

Реалізуємо ці побудови в Python, застосовуючи символні обчислення і бібліотеку наукової графіки mayavi.

```
from sympy import symbols, Abs, init_printing, simplify, lambdify
from IPython.display import display
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
init_printing(use_latex=True)
x, y, z = symbols('x y z')
def ir(u, v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def dr(u, v): return (u-v-Abs(u+v))/2
```

Створіть вирази для функцій ідентифікації шарів  $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$  і циліндра  $x^2 + y^2 \leq 0.7^2$

```
w1=1-Abs(x)
w2=1-Abs(y)
w3=1-Abs(z)
w4=0.49-x**2-y**2
```

Згенеруйте вираз функцій ідентифікації куба  $w_{cube}$  і надрукуйте його (додавши неprinциповий множник 4)

```
w12=simplify(ir(w1,w2))
wcube=simplify(ir(w12,w3))
display(4*wcube)
```

$$4 - |x| - |y| - 2|z| - ||x| - |y|| - ||x| + |y| - 2|z| + ||x| - |y||$$

Прирівнявши останній вираз нулю, ви отримаєте неявне рівняння поверхні куба.

Далі створіть ідентифікатор куба з отвором.

```
w=dr(wcube, w4)
```

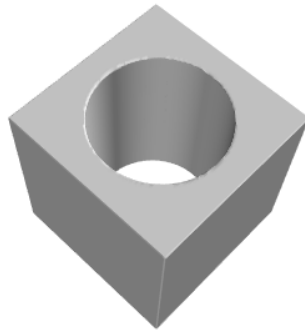
З символного виразу  $w$  створіть числову функцію, щоб її можна було застосовувати до масивів координат точок тривимірної сітки.

```
F=lambdify((x, y, z), w, 'numpy')
```

Створіть просторову сітку точок і масив значень виразу  $\omega(x, y, z)$  в цих точках.

```
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j, -1.1:1.1:100j, -1.1:1.1:100j]
W=F(X,Y,Z)
```

```
Тепер побудуйте поверхню нульового рівня виразу/масиву  $\omega(x, y, z)$ .
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
```



**Приклад 4.** По неявному рівнянню побудувати зображення області, заданої нерівностями  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $|z| \leq 2$  та  $x^2 + z^2 \leq 1$ ,  $|y| \leq 2$  (об'єднання двох ортогональних циліндрів).

Розв'язання. Нерівності виділяють зони тривимірного простору. Для кожної з них створіть функцію ідентифікації.

Область	Функція ідентифікації ( $\omega \geq 0$ )
$x^2 + y^2 \leq 1$	$\omega_1(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$
$ z  \leq 2$	$\omega_2(x, y, z) = 2 -  z $
$x^2 + z^2 \leq 1$	$\omega_3(x, y, z) = 1 - x^2 - z^2$
$ y  \leq 2$	$\omega_4(x, y, z) = 2 -  y $

Перші дві нерівності  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $|z| \leq 2$  виділяють зону циліндра довжини 4. Його функція ідентифікації буде

$$\omega_{12}(x, y, z) = ir(\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)).$$

Аналогічно нерівності  $x^2 + z^2 \leq 1$ ,  $|y| \leq 2$  задають зону іншого циліндра, функцією ідентифікації якого є

$$\omega_{34}(x, y, z) = ir(\omega_3(x, y, z), \omega_4(x, y, z)).$$

Поєднання обох циліндрів утворює тіло з функцією ідентифікації

$$\omega(x, y, z) = ur(\omega_{12}(x, y, z), \omega_{34}(x, y, z)).$$

Реалізуємо ці побудови в Python, при чому обійдемося без символічних розрахунків, і відразу будуватимемо числові масиви.

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
```

Створіть виконавчі функції операцій перетину та об'єднання

```
def ir(u,v): return (u+v-np.abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+np.abs(u-v))/2
```

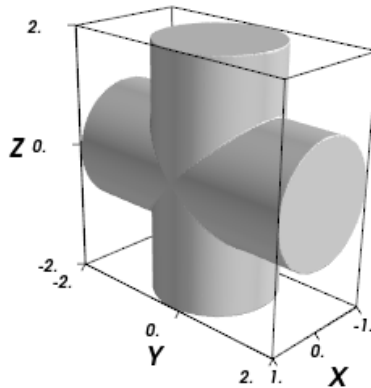
Побудуйте масиви значень функцій ідентифікації на обраній сітці точок

```
x, y, z = np.mgrid[-1.1:1.1:100j, -2.1:2.1:200j, -2.1:2.1:200j]
w1=1-x**2-y**2
w2=2-np.abs(z)
```

```
w12=ir(w1,w2)
w3=1-x**2-z**2
w4=2-np.abs(y)
w34=ir(w3,w4)
w=ur(w12,w34)
```

Побудуйте поверхню  $\omega(x, y, z) = 0$

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(x, y, z, w, contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



**Приклад 5.** Сконструювати неявне рівняння поверхні тривимірних літер слова **ХНУ** (аббревіатура від Харківський національний університет) і побудувати його графік.

**ХНУ**








Розв'язання. Спочатку сконструюємо функцію ідентифікації  $\omega_{XNY2D}(x, y)$  слова **ХНУ** як області на площині. Потім, розглядаючи її як ідентифікатор  $\omega_{XNY3D}(x, y, z) = \omega_{XNY2D}(x, y)$  просторової області нескінченно протяжної вздовж осі  $Z$  (нескінченного циліндра з перерізом у формі області слова **ХНУ**), перетнемо її шаром  $|z| \leq w$  ( $w$  – напівтовщина літер слова). В результаті отримаємо тривимірний ідентифікатор  $\omega_{XNY3D}(x, y, z)$  просторової області у формі заданого слова.

Перед конструюванням ідентифікатора  $\omega_{XNY2D}(x, y)$  сконструюємо функції ідентифікації областей окремих літер  $\omega_X(x, y)$ ,  $\omega_H(x, y)$ ,  $\omega_Y(x, y)$ . Їх ми будуватимемо так, щоб відповідні області були розташовані в околі початку координат, і мали однакову висоту літер та «ширину ліній». Ідентифікатори областей зсунутих літер **Н** і **У** матимуть вигляд  $\omega_H(x - x_H, y)$  і  $\omega_Y(x - x_Y, y)$ , де  $x_H, x_Y$  величини зсувів вздовж осі  $X$ . Тому функцію ідентифікації двовимірної фігури у формі слова **ХНУ** можна побудувати за формулою

$$\omega_{XNY2D}(x, y) = ur(ur(\omega_X(x, y), \omega_H(x - x_H, y)), \omega_Y(x - x_Y, y)).$$

Для області в формі літери **Х** функція ідентифікації  $\omega_X(x, y)$  була сконструйована в прикладі 4 попереднього пункту.

Фігуру в формі літери **Н** побудуємо, використовуючи комбінації між наступними областями.

	$\Omega_{H1}$ - широка вертикальна смуга	$\omega_{H1}(x, y) = 4 -  x $
	$\Omega_{H2}$ - вузька вертикальна смуга	$\omega_{H2}(x, y) = 2 -  x $
	$\Omega_{H3}$ - вузька горизонтальна смуга	$\omega_{H3}(x, y) = 1 -  y $
	$\Omega_{H23} = \overline{\Omega_{H2}} \setminus \overline{\Omega_{H3}}$ - вузька вертикальна смуга з горизонтальним вирізом	$\omega_{H23}(x, y) = dr(\omega_{H2}, \omega_{H3})$
	$\Omega_{H123} = \overline{\Omega_{H1}} \setminus \overline{\Omega_{H23}}$ - необмежена по висоті зона в формі літери Н	$\omega_{H123}(x, y) = dr(\omega_{H1}, \omega_{H23})$
	$\Omega_h$ - широка горизонтальна смуга	$\omega_h(x, y) = 5 -  y $
	$\Omega_H = \Omega_{H123} \cap \Omega_h$ - область у формі літери Н	$\omega_H(x, y) = ir(\omega_{H123}, \omega_h)$

Область в формі літери **У** створимо з області літери **Х**, як перетин з напівплощиною  $y \geq 2x - \sqrt{5}$  (межа півплощини співпадатиме з правою частиною контура «ніжки» літери **У**). Тоді для ідентифікатора **У** можна буде покласти  $\omega_Y(x, y) = ir(\omega_X(x, y), y - 2x + \sqrt{5})$ .

Описану послідовність дій реалізовано в наступному сценарії.

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, simplify, sqrt, lambdify
mlab.close(all=True)
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
def ur(u,v): return (u+v+Abs(u-v))/2
def dr(u,v): return (u-v-Abs(u+v))/2
x,y,z = symbols("x y z")
def strip(a,b,c,h): # генерування ідентифікатора w похилої смуги
    lin=a*x+b*y+c
    w=h*sqrt(a**2+b**2)-Abs(lin)
    return lin,w
# Літера Х
linX1,wX1=strip(2,-1,0,1)
linX2,wX2=strip(-2,-1,0,1)
wX12=ur(wX1,wX2)
wh=5-Abs(y)
wX=ir(wX12,wh)
# Літера Н
wH1=4-Abs(x)
wH2=2-Abs(x)
wH3=1-Abs(y)
wH23=dr(wH2,wH3)
```

```

wH123=dr(wH1,wH23)
wH=ir(wH123,wh)
# Літера У
wY=ir(wX,y-2*x+sqrt(5))
# Двовимірне слово ХНУ
wH=wH.subs(x,x-8)           # ідентифікатор зсунутої Н
wXH=ur(wX,wH)               # ідентифікатор пари літер ХН
wY=wY.subs(x,x-16)          # ідентифікатор зсунутої У
wXHY2D=ur(wXH,wY)           # ідентифікатор двовимірного слова ХНУ
# ідентифікатор тривимірного слова ХНУ
wXHY3D=ir(wXHY2D,1-Abs(z))
# числова функція і 3D масиви
F=lambdify((x,y,z),wXHY3D,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-5:21:261j,-6:6:61j,-1.1:1.1:67j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.view(azimuth=55,elevation=27,distance=40)# положення камери
r=mlab.roll(roll=-6.5)       # кут повороту камери

```



*Зауваження.* Ідентифікатор плоского слова **ХНУ** можна створити з нескінченних по висоті літер, а потім однією операцією перетнути з горизонтальною смугою  $|y| \leq 5$ . Результівна функція ідентифікації слова **ХНУ** вийде трохи простішою.

#### 4.3. Перетворення функцій ідентифікації.

Дано ідентифікатор  $\omega(x, y)$  області  $\Omega$ . Якщо в площині  $XY$  виконати взаємно однозначне і неперервне відображення  $R: x' = X(x, y), y' = Y(x, y)$ , для якого існує зворотне  $R^{-1}: x = X'(x', y'), y = Y'(x', y')$ , то функція ідентифікації  $w(x, y) = \omega(X'(x, y), Y'(x, y))$  визначає в площині  $XY$  фігуру  $\Omega' = R[\Omega]$ , в яку конвертується  $\Omega$  при прямому відображенні  $R$ . В цьому параграфі ми розглянемо питання побудови функцій ідентифікації фігур, отримуваних при деяких, найбільш типових перетвореннях.

**Зсуб.** Нехай в площині  $XY$  дано фігуру  $\Omega$  з функцією ідентифікації  $\omega(x, y)$ . Має місце наступне

**Твердження 1.** Функція  $\omega(x - \Delta_x, y - \Delta_y)$  визначає фігуру  $\Omega_\Delta$  (є ідентифікатором  $\Omega_\Delta$ ), що отримана зсувом  $\Omega$  в площині  $XU$  на вектор  $(\Delta_x, \Delta_y)$ . Аналогічно,  $\omega(x - \Delta_x, y - \Delta_y, z - \Delta_z)$  визначає тіло в просторі, зсунуте на вектор  $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ .

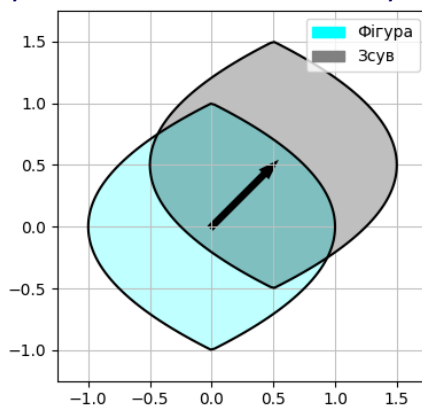
Цю властивість ми використовували, коли в прикладі 5 п. 4.2.1 при побудові області в формі слова **ХНУ**, конструювали ідентифікатори зсунутих літер **Н** та **У**. В наступному прикладі «параболічна» луночка з неявним рівнянням  $|x| = 1 - y^2$  зміщується на вектор  $(1/2, 1/2)$ . Зсунута фігура має функцію ідентифікації

$$\omega_2(x, y) = 1 - \left| x - \frac{1}{2} \right| - \left( y - \frac{1}{2} \right)^2.$$

```

from sympy import symbols, Abs, S
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x, y = symbols("x y")
w1=1-Abs(x)-y**2 # ідентифікатор незсунутої фігури
w2=w1.subs((x,x-S(1)/2),(y,y-S(1)/2)) # ідентифікатор після зсуву
p1=plot_implicit(w1>0,"Фігура", (x, -1.25, 1.75), (y, -1.25, 1.75),
{"linewidths":3,"alpha":0.5}, aspect=(1,1),
color='cyan', border_color="k", show=False)
p2=plot_implicit(w2>0,"Зсув", (x, -1.25, 1.75), (y, -1.25, 1.75),
{"linewidths":3,"alpha":0.5}, aspect=(1,1),
color='gray', border_color="k", show=False)
p=p1+p2
p.show()
p.ax.arrow(0,0,1/2,1/2,length_includes_head=True,
width=0.02, facecolor='black', linewidth=3)

```



**Масштабування фігур.** Під масштабуванням відносно точки  $O(0,0)$  розуміється таке перетворення площини, при якому кожній точці  $(x, y)$  відповідає точка  $(k_x \cdot x, k_y \cdot y)$ , де  $k_x, k_y$  - дійсні числа, кожне з яких не дорівнює нулю. Для масштабування у випадку  $k_x = k_y = k > 0$  є окрема назва. Гомотетією відносно точки  $O$  називається таке перетворення фігури  $\Omega$  у фігуру  $\Omega'$ , при якому кожна точка  $P \in \Omega$  переходить у точку  $P' \in \Omega'$  так, що  $|OP'| = k \cdot |OP|$ . Додатне число  $k$  зветься коефіцієнтом гомотетії або факторним множником, а фігуру  $\Omega'$  називають гомотетичною до  $\Omega$ . При гомотетії фігур  $\Omega \rightarrow \Omega'$  з коефіцієнтом  $k > 0$  усі відстані між точками  $\Omega$  змінюються в  $k$  разів,

тобто якщо  $A \in \Omega$  і  $B \in \Omega$  – дві довільні точки  $\Omega$ , а  $A' \in \Omega'$  і  $B' \in \Omega'$  – їх образи, то  $|A'B'| = k \cdot |AB|$ . Гомотетія змінює розміри фігур, але не їх форму. Фігури  $\Omega$  і  $\Omega'$  називають подібними, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції перетворень гомотетії та руху.

Нехай в площині  $XY$  дано фігуру  $\Omega$  з функцією ідентифікації  $\omega(x, y)$  і точка  $O(0,0)$  є центром масштабування. Тоді справджується наступне

**Твердження 2.** Фігура  $\Omega^{(k_x, k_y)}$  з ідентифікатором  $\omega(x/k_x, y/k_y)$  є розтягнутою вздовж осі  $X$  в  $k_x$  і вздовж осі  $Y$  в  $k_y$  разів фігурою  $\Omega$ .

Доведення. Нехай точка  $(x_0, y_0)$  належить фігурі  $\Omega$ , тобто  $\omega(x_0, y_0) \geq 0$ . Тоді точка  $(x'_0, y'_0) = (k_x x_0, k_y y_0) \in \Omega^{(k_x, k_y)}$  оскільки  $\omega\left(\frac{k_x x_0}{k_x}, \frac{k_y y_0}{k_y}\right) = \omega(x_0, y_0) \geq 0$ .

А це і означає, що для масштабованої множини точок  $(x', y') = (k_x x, k_y y)$ , коли  $(x, y) \in \Omega$  функція  $\omega(x/k_x, y/k_y)$  є ідентифікатором.

**Наслідок.** Якщо  $k_x = k_y = k$ , то фігура  $\Omega^{(k)}$  з ідентифікатором  $w(x, y) = \omega(x/k, y/k)$  є масштабованою (збільшеною в  $k$  разів) фігурою  $\Omega$ . Останнє означає, що  $\Omega^{(k)}$  гомотетична до  $\Omega$  (з центром гомотетії в точці  $O(0,0)$ ).

Нижче буде наведено кілька прикладів масштабування, але більша частина коду залишатиметься незмінною – потрібно буде міняти лише ті інструкції, які обведені рамкою. Команди, які слід розмістити в рамці, будуть наводитися зверху відповідного графіка.

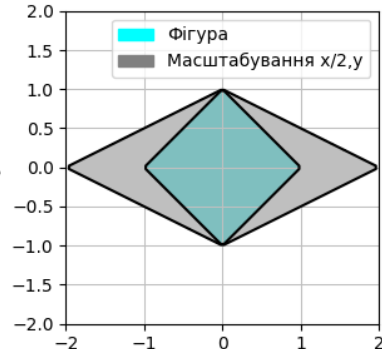
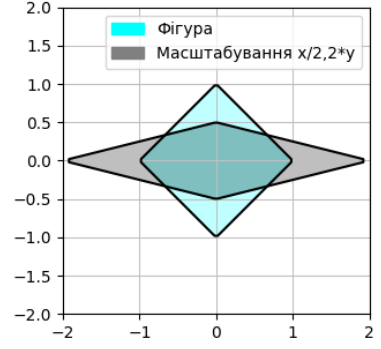
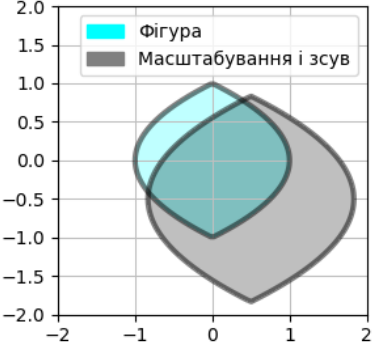

```
from sympy import symbols, Abs, S
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x, y = symbols("x y")
```

```
w=1-Abs(x)-Abs(y)
W=w.subs(x, x/2)
txt="Масштабування x/2, y"
```

```
p1=plot_implicit(w>0, "Фігура", (x, -2, 2), (y, -2, 2),
                {"linewidths":3, "alpha":0.5}, aspect=(1,1),
                color='cyan', border_color="k", show=False)
p2=plot_implicit(W>0, txt, (x, -2, 2), (y, -2, 2),
                {"linewidths":3, "alpha":0.5}, aspect=(1,1),
                color='gray', border_color="k", show=False)
```

```
p=p1+p2
p.show() # наступна таблиця, перший рисунок ліворуч
```



$w=1-\text{Abs}(x)-\text{Abs}(y)$ $W=w.\text{subs}(x,x/2)$ $\text{txt}=\text{"Масштабування } x/2,y\text{"}$	$w=1-\text{Abs}(x)-\text{Abs}(y)$ $w=w.\text{subs}((x,x/2),(y,2*y))$ $\text{txt}=\text{"Масштабування } x/2,2*y\text{"}$
	
$w=1-\text{Abs}(x)-y**2$ $w2=w.\text{subs}((x,x/(4/3)),(y,y/(4/3)))$ $W=w2.\text{subs}((x,x-1/2),(y,y+1/2))$ $\text{txt}=\text{"Масштабування і зсув"}$	$w=1-\text{Abs}(x)-y**2$ $w2=w.\text{subs}((x,x-1/2),(y,y+1/2))$ $W=w2.\text{subs}((x,x/(4/3)),(y,y/(4/3)))$ $\text{txt}=\text{"Зсув і масштабування"}$
	

**Лема 1.** Нехай є неперервна функції  $f(x, y)$  і її лінія рівня  $L: f(x, y) = c$ . Тоді лінія  $L^{(k)}: f(x/k, y/k) = c$  є масштабованою (збільшеною в  $k$  разів) кривою  $L$ .

Доведення. Нехай точка  $(x_0, y_0)$  належить  $L$ , тобто  $f(x_0, y_0) = c$ . Тоді точка  $(k x_0, k y_0)$  належить  $L^{(k)}$ , оскільки  $f(k x_0/k, k y_0/k) = f(x_0, y_0) = c$ . Навпаки, для будь-якої точки  $(x_1, y_1) \in L^{(k)}$  існує відповідна їй точка  $(x_1/k, y_1/k) \in L$ .

**Поворот фігур.** Розглянемо питання побудови функції ідентифікації фігури, повернутої навколо початку координат на кут  $\alpha$ , якщо до повороту її ідентифікатором була функція  $\omega(x, y)$ .

Відомо, що точка  $P(x, y)$  після повороту на кут  $\alpha$  переходить в точку  $P'(x', y')$  з координатами

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, \quad y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

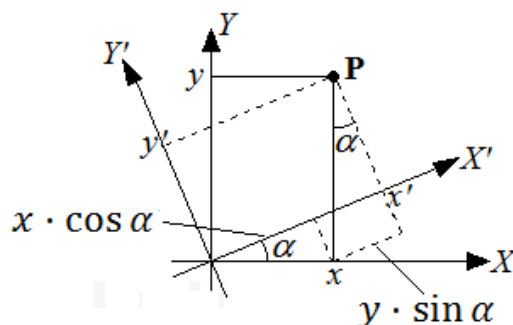
Якщо є крива  $x(t), y(t)$ , то її образом після повороту буде крива

$$x'(t) = x(t) \cdot \cos \alpha - y(t) \cdot \sin \alpha, \quad y'(t) = x(t) \cdot \sin \alpha + y(t) \cdot \cos \alpha$$

Розглянемо фігуру з ідентифікатором  $\omega = F(x, y)$ . Для повернутої фігури в повернутій системі координат  $x', y'$  ідентифікатор матиме первісний вигляд  $\omega' = F(x', y')$ . Але в повернутій системі координати  $x', y'$  обчислюються через координати  $x, y$  за формулами (див. наступний рисунок)



$$x' = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, y' = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \quad (2)$$



Вони, фактично, відповідають формулам (1) повороту на кут  $-\alpha$ , тобто в протилежному напрямку. Описану особливість пояснимо на прикладі повороту канонічного еліпса з напівосями 2 і 1. Застосуємо в його параметричних і неявному рівняннях заміну (1), обравши в ній  $\alpha = \pi/4$ .

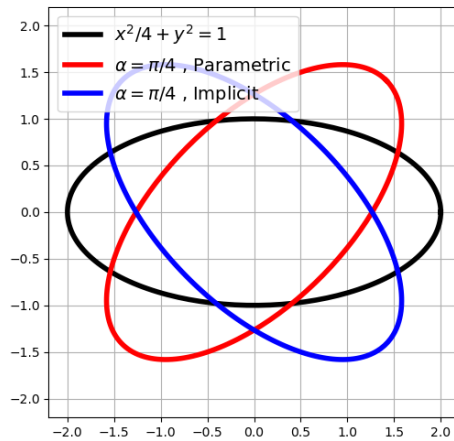
```
import numpy as np
from numpy import pi, sin, cos
from matplotlib import pyplot as plt
plt.close('all')
t=np.linspace(0,2*np.pi,200)
# параметричні рівняння канонічного еліпса
xt=2*cos(t)
yt=sin(t)
# параметричні рівняння повернутого еліпса
Xt=xt*cos(pi/4)-yt*sin(pi/4)
Yt=xt*sin(pi/4)+yt*cos(pi/4)
```

В ідентифікаторі  $w$  «неявного» еліпса замінимо координати  $x, y$  відповідно до формул (1).

```
x_ = np.linspace(-2.2, 2.2, 121)
y_ = np.linspace(-2.2, 2.2, 121)
x, y = np.meshgrid(x_, y_)
w=1-(x*cos(pi/4)-y*sin(pi/4))**2/4-
    (x*sin(pi/4)+y*cos(pi/4))**2
```

Візуалізуємо всі 3 еліпса, додавши на графік легенду.

```
p1=plt.plot(xt,yt, lw=3,color='k',label=r'$ x^2/4+y^2=1$')
p2=plt.plot(Xt,Yt, lw=3,color='r',
            label=r'$ \alpha=\pi/4$ , Parametric')
p3=plt.contour(x, y, w, [0], linewidths=3, colors='b')
impl, = plt.plot([], [], color="blue",lw=3,
                label=r'$ \alpha=\pi/4$ , Implicit')
plt.legend(handles=[p1,p2,impl],loc='upper left',fontsize=14)
plt.axis('image');
plt.grid(True)
plt.show()
```



В результаті «параметричний» еліпс було повернуто проти годинникової стрілки на кут  $\alpha = \pi/4$  (червона крива), а «неявний» – на кут  $\alpha = -\pi/4$  (синя крива).

Узагальнюючи наведені міркування, приходимо до наступного

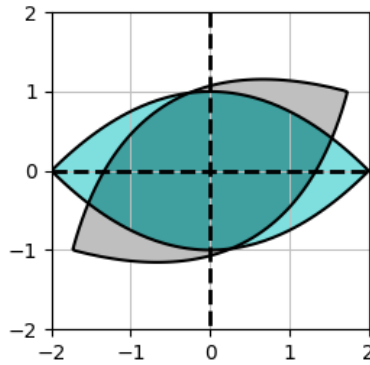
**Твердження 3.** При повороті фігури з ідентифікатором  $\omega(x, y)$  навколо початку координат на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки аргументи  $x, y$  слід змінити відповідно до формул (2) (а не (1)). Тобто функцією ідентифікації  $\omega_{rot}(x, y)$  повернутої фігури буде

$$\omega_{rot}(x, y) = \omega(x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha). \quad (3)$$

**Приклад 1.** Візуалізувати повернуту на кут  $\alpha = \pi/6$  параболічну луночку, яка має ідентифікатор  $\omega(x, y) = 1 - x^2/4 - |y|$ .

Розв'язання.

```
from sympy import symbols, Abs, simplify, S, pi, sin, cos
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit, plot_parametric
plt.close('all')
x, y = symbols("x y")
w=1-x**2/4-Abs(y) # ідентифікатор «канонічної» луночки
p1=plot_implicit(w>0, (x, -2, 2), (y, -2, 2), aspect=(1, 1), n=200,
    color='c', border_color="k", legend=False,
    grid=True, show=False)
a=pi/6 # кут повороту
X=x*cos(a)+y*sin(a)
Y=-x*sin(a)+y*cos(a)
# ідентифікатор повернутої луночки
wrot=w.subs([(x,X), (y,Y)], simultaneous=True)
p2=plot_implicit(wrot>0, (x, -2, 2), (y, -2, 2), {"alpha":0.5},
    aspect=(1, 1), color='gray', border_color="k", show=False)
p3=plot_implicit(
    (x, (x, -2, 2), (y, -2, 2), {"linewidths":2, "linestyles":'- -'}),
    (y, (x, -2, 2), (y, -2, 2), {"linewidths":2, "linestyles":'- -'}),
    aspect=(1, 1), color='k', show=False)
(p1+p2+p3).show()
```

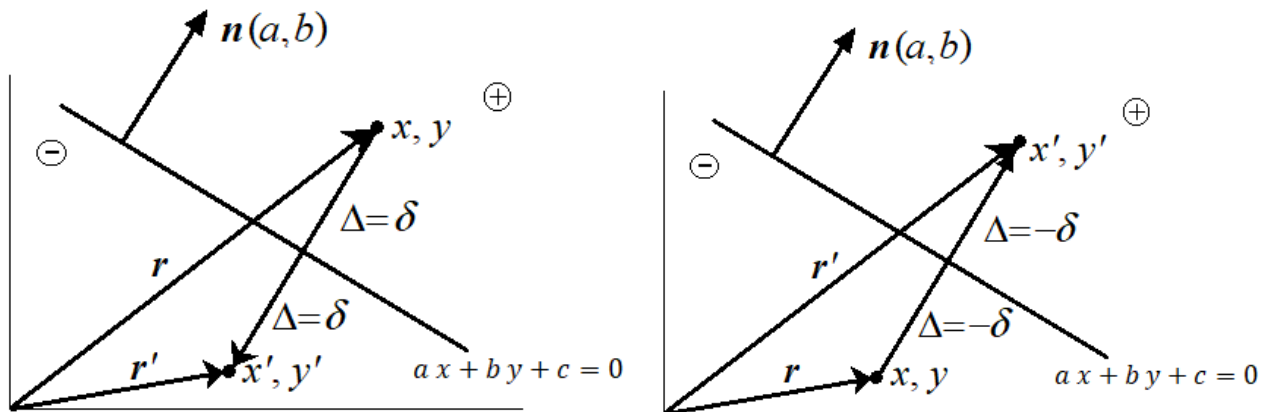


**Дзеркальне відображення.** Нехай ідентифікатором області  $\Omega$  є функція  $\omega(x, y)$ , а  $\Omega_{mir}$  утворена з  $\Omega$  дзеркальним відображенням відносно прямої  $ax + by + c = 0$ . Тоді має місце наступне

**Твердження 4.** Функцією ідентифікації  $\omega_{mir}(x, y)$  області  $\Omega_{mir}$  буде

$$\omega_{mir}(x, y) = \omega\left(x - 2 \frac{a}{a^2 + b^2} (ax + by + c), y - 2 \frac{b}{a^2 + b^2} (ax + by + c)\right) \quad (4)$$

**Доведення.** Нехай пряма, відносно якої буде виконуватись відображення, задана нормованим рівнянням  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 = 1$ ), і  $\mathbf{n} = (a, b)$  – її одиничний вектор нормалі.



Відстань  $\Delta$  точки  $\mathbf{r} = (x, y)$  до прямої  $ax + by + c = 0$  з точністю до знака ( $\Delta = |\delta|$ ) дорівнює  $\delta = ax + by + c$ . При чому  $\delta > 0$  в півплощині, на яку вказує вектор  $\mathbf{n}$  (твердження 3 п. 4.1.5). Через  $\mathbf{r}' = (x', y')$ , позначимо точку, яка є дзеркальним відбиттям точки  $\mathbf{r} = (x, y)$  відносно прямої. Якщо  $\mathbf{r} = (x, y)$  розташована у «позитивній» півплощині (тобто  $\delta > 0$ ), то  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2 \mathbf{n} \Delta = \mathbf{r} - 2 \mathbf{n} \delta$  (див. попередній рисунок ліворуч). Якщо точка  $\mathbf{r}(x, y)$  розташована у «негативній» півплощині (тобто  $\delta < 0$ ), то  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2 \mathbf{n} \Delta = \mathbf{r} - 2 \mathbf{n} \delta$  (попередній рисунок праворуч). В обох випадках застосовується одна формула. Таким чином

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \mathbf{n} \delta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (ax + by + c).$$

Якщо рівняння прямої  $ax + by + c = 0$  не нормовано, то одиничним вектором нормалі буде  $\mathbf{n} = (a, b) / \sqrt{a^2 + b^2}$ , а нормованим рівнянням

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Заміняючи в попередньому співвідношенні величини  $a, b, c$  на  $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , отримуємо

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (a x + b y + c).$$

Для віддзеркаленої фігури у віддзеркаленій системі координат  $x', y'$  ідентифікатор матиме первісний вигляд  $\omega(x', y')$ . Тому для конструювання функції ідентифікації  $\omega_{mir}(x, y)$  дзеркально відображеної області  $\Omega_{mir}$  останню заміну слід застосувати в аргументах  $\omega(x', y')$ . ■

Наприклад, якщо віддзеркалення відбувається відносно координатної осі  $Y$  (рівняння  $x = 0$ ), то  $a = 1, b = 0, c = 0$  і (4) набуває вигляду  $\omega_{mir}(x, y) = \omega(-x, y)$ .

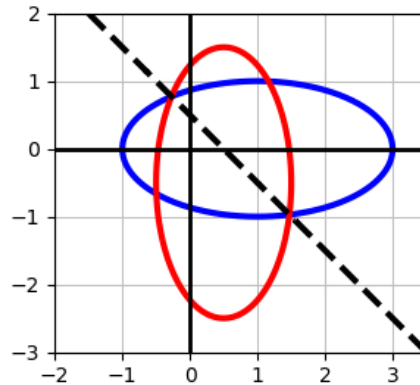
**Приклад 2.** Сконструювати неявне рівняння кривої, отриманої дзеркальним відображенням еліпса  $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$  від прямої  $x + y - 1/2 = 0$ , та візуалізувати її (звісно, що це також буде еліпс).

Розв'язання.

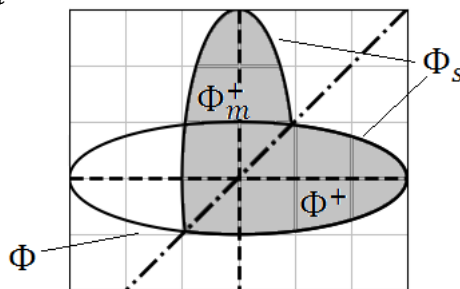
```
from sympy import symbols, Abs, simplify, sqrt, S,
                                                    init_printing, Wild

from matplotlib import pyplot as plt
from IPython.display import display
from spb import plot_implicit, plot_parametric
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y = symbols("x y")
w = 1 - (x - 1)**2/4 - y**2
p1 = plot_implicit(w, (x, -2, 3.5), (y, -3, 2), {"linewidths": 3},
                 aspect=(1, 1), n=200, color='b',
                 legend=False, grid=True, show=False)
lin = x + y - S(1)/2          # a=1, b=1, c=-1/2
X = x - lin
Y = y - lin
# ідентифікатор віддзеркаленого еліпса
wmir = w.subs([(x, X), (y, Y)], simultaneous=True)
# іневелике спрощення (вилучення мінусів)
p = Wild('p', properties=[lambda x: x.is_Symbol])
q = Wild('q', properties=[lambda k: k.is_Number])
wmir = wmir.replace((-p - q)**2, (p + q)**2)
display(wmir)
-(x - 1/2)**2 - (y + 1/2)**2/4 + 1
p2 = plot_implicit(wmir, (x, -2, 3.5), (y, -3, 2), {"linewidths": 3},
                 aspect=(1, 1), n=200, color='r',
                 legend=False, grid=True, show=False)
p3 = plot_implicit((lin, (x, -2, 3.5), (y, -4, 2),
                  {"linewidths": 3, "linestyle": '--'}),
                  (x, (x, -2, 3.5), (y, -3, 2), {"linewidths": 2})),
```

```
(y, (x, -2, 3.5), (y, -3, 2), {"linewidths": 2}),
aspect=(1, 1), n=200, color='k',
legend=False, grid=True, show=False)
(p1+p2+p3).show()
```

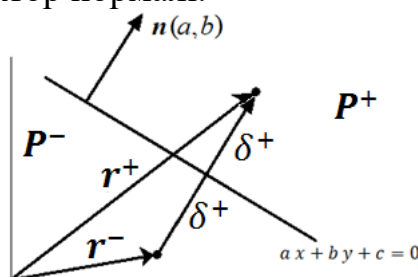


**Симетризація відносно прямої.** Нехай є фігура  $\Phi$  з ідентифікатором  $\omega(x, y)$  і в площині  $XY$  задана пряма  $L: ax + by + c = 0$ . Позначимо частину  $\Phi$ , яка розташована з «позитивного» боку від  $L$  (в півплощині  $P^+$ , куди вказує вектор  $\mathbf{n} = (a, b)$ ) через  $\Phi^+$  (це може бути  $\Phi$  цілком). Потрібно сконструювати фігуру  $\Phi_s$ , яка розміщується по обидві боки від  $L$ , при чому в «позитивній» відносно  $L$  півплощині  $P^+$  вона співпадає з  $\Phi^+$ , а в негативній  $P^-$  – з її дзеркальною копією  $\Phi_m^+$ , тобто  $\Phi_s = \Phi^+ \cup \Phi_m^+$ .



Цю побудову ми зватимемо «симетризацією» позитивної частини  $\Phi^+$  фігури  $\Phi$ . Відповідно до мети нашого підручника ми будуватимемо функцію ідентифікації  $\omega_s(x, y)$  фігури  $\Phi_s$ . При чому для точок, розташованих в частині  $\Phi^+$ , функцію  $\omega_s(x, y)$  будемо обчислювати за значенням  $\omega(x, y)$ , а для віддзеркалених точок – за такими ж значеннями.

Позначатимемо точки, які розташовані в «негативній» відносно  $L$  півплощині  $P^-$ , через  $\mathbf{r}^- = (x^-, y^-)$ , а симетричні до них (розташовані в позитивній півплощині  $P^+$ ) – через  $\mathbf{r}^+ = (x^+, y^+)$ . Розглянемо спочатку випадок, коли пряма  $L$  задана нормованим рівнянням  $ax + by + c = 0$  ( $a^2 + b^2 = 1$ ), і  $\mathbf{n} = (a, b)$  – одиничний вектор нормалі.



З аналітичної геометрії відомо, що у випадку нормованого рівняння  $L$ , величина  $\delta = a x + b y + c$  з точністю до знака є відстанню точки  $\mathbf{r} = (x, y)$  до прямої  $L$ . При чому для точок з «позитивного» боку від  $L$  число  $\delta$  додатне (в півплощині  $P^+$ , на яку вказує вектор  $\mathbf{n}$ ; див. твердження 3 п. 4.1.5), а для точок, розташованих в «негативній» півплощині  $P^-$ :  $\delta < 0$ . Для симетричних точок  $\mathbf{r}^- \in P^-$  і  $\mathbf{r}^+ \in P^+$  маємо  $\delta^- = a x^- + b y^- + c < 0$ ,  $\delta^+ = a x^+ + b y^+ + c > 0$  і  $\delta^- = -\delta^+$ . Віддзеркалена до  $\mathbf{r}^-$  точка  $\mathbf{r}^+$  обчислюється за формулою  $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^- + 2 \mathbf{n} \delta^+$  (див. попередній рисунок), або  $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^- - 2 \mathbf{n} \delta^-$ .

Для точок  $\mathbf{r}^+ \in P^+$  функція  $\omega_s(\mathbf{r})$  обчислюється за значенням  $\omega(\mathbf{r}^+)$ , а для симетричних точок  $\mathbf{r}^- \in P^-$  – за значенням  $\omega(\mathbf{r}^-) = \omega(\mathbf{r}^+)$ . Таким чином, функцію  $\omega_s(\mathbf{r})$  слід обчислювати за формулою

$$\omega_s(\mathbf{r}) = \begin{cases} \omega(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in P^+ \\ \omega(\mathbf{r} - 2 \mathbf{n} \delta), & \mathbf{r} \in P^- \end{cases} \quad (5)$$

Застосовуючи функцію

$$Q_l(x, a) = \begin{cases} 0, & x \geq a \\ x - a, & x < a \end{cases} = \frac{1}{2}(x - a - |x - a|),$$

(5) можна записати єдиною формулою

$$\omega_s(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r} - 2 \mathbf{n} Q_l(\delta, 0)) = \omega\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} Q_l(a x + b y + c, 0)\right)$$

Якщо рівняння прямої  $L: a x + b y + c = 0$  не нормовано, то одиничним вектором нормалі буде  $\mathbf{n} = (a, b)/\sqrt{a^2 + b^2}$ , а нормованим рівнянням:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ . Тоді у від'ємнику  $2 \mathbf{n} Q_l(\delta, 0)$  величини  $a, b, c$  слід замінити на  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , і вектор  $\mathbf{r} - 2 \mathbf{n} Q_l(\delta, 0)$  набуде вигляду

$$\mathbf{r} - 2 \mathbf{n} Q_l(\delta, 0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} Q_l(a x + b y + c, 0)$$

В результаті функція ідентифікації  $\omega_s(x, y)$  «симетризованої» фігури  $\Phi_s$  матиме наступний вигляд

$$\omega_s(x, y) = \omega\left(x - \frac{2 a}{a^2 + b^2} Q_l(a x + b y + c, 0), \right. \\ \left. y - \frac{2 b}{a^2 + b^2} Q_l(a x + b y + c, 0)\right) \quad (6)$$

Те, що функція  $\omega_s(x, y)$  є ідентифікатором  $\Phi_s$ , прямує зі способу її побудови. Для точок з  $\Phi^+$  і  $\Phi_m^+$  (окрім їх межі)  $\omega_s(x, y) > 0$ , на межі  $\Phi^+ \cup \Phi_m^+$  матимемо  $\omega_s(x, y) = 0$ , а зовні  $\Phi_s$  буде  $\omega_s(x, y) < 0$ . Таким чином справджується наступне

**Твердження 5.** Функція  $\omega_s(x, y)$ , побудована за формулою (6), де  $\omega(x, y)$  є ідентифікатором  $\Phi$ , буде ідентифікатором фігури  $\Phi_s = \Phi^+ \cup \Phi_m^+$ , утвореної об'єднанням  $\Phi^+$  (частини  $\Phi$ , яка розташована в півплощині  $P^+$ ) і її «дзеркального» відображення  $\Phi_m^+$  відносно прямої  $L$ .

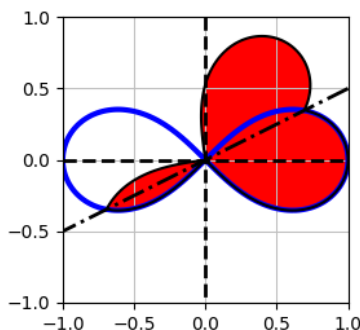
**Приклад 3.** Для прикладу візьмемо лемніскату Бернуллі з ідентифікатором  $\omega(x, y) = x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2$  її внутрішньої області  $\Phi$  і пряму  $L: x - 2 y = 0$ . Побудуємо фігуру, яка складається з частини  $\Phi$ , що розташована нижче  $L$  (в позитивній відносно  $L$  півплощині), і її дзеркальної відносно  $L$  копії.

Розв'язання.

```

from sympy import symbols,Abs
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x,y = symbols("x y")
def Ql(x,a): return (x-a-Abs(x-a))/2
w=(x**2-y**2)-(x**2+y**2)**2
a,b=1,-2 # коефіцієнти прямої
nx=a/(a**2+b**2)
ny=b/(a**2+b**2)
X=x-2*nx*Ql(a*x+b*y,0)
Y=y-2*ny*Ql(a*x+b*y,0)
W=w.subs([(x,X),(y,Y)],simultaneous=True)
xyrange=(x,-1,1),(y,-1,1)
p1=plot_implicit(w,*xyrange, {"linewidths":3},legend=False,
                 aspect="equal",color='b',show=False)
p2=plot_implicit(W>0,*xyrange,
                 color='red',border_color="k",show=False)
p3=plot_implicit(
    (x,*xyrange,{"linewidths":2,"linestyles":'--'}),
    (y,*xyrange,{"linewidths":2,"linestyles":'--'}),
    (a*x+b*y,*xyrange,{"linewidths":2,"linestyles":'-.'})),
    aspect=(1,1),color='k',show=False)
(p1+p2+p3).show()

```



Тут синя лінія позначає лемніскату Бернуллі, а червона зона – результівну фігуру. ■

В якості прямої  $L$  можна взяти вісь  $Y$ , рівняння якої є  $x = 0$ . Тоді, як наслідок, справджується наступне

**Твердження 6.** Функція  $\omega_s(x, y) = \omega(|x|, y)$  є ідентифікатором фігури  $\Phi_s = \Phi^+ \cup \Phi_m^+$ , утвореної об'єднанням  $\Phi^+$  – частини  $\Phi$ , що розташована в півплощині  $x \geq 0$ , і  $\Phi_m^+$  – її «дзеркального» відображення в півплощину  $x \leq 0$ .

Доведення. При  $a = 1, b = 0, c = 0$  формула (6) набуває вигляду

$$\omega_s(x, y) = \omega(x - 2Q_l(x, 0), y) = \omega\left(x - 2 \cdot \frac{1}{2}(x - |x|), y\right) = \omega(|x|, y).$$

*Зауваження.* Якщо фігура  $\Phi$  не перетинає вісь  $Y$  і цілком розташована в півплощині  $x > 0$ , тобто  $\Phi^+ = \Phi$ , то функція  $\omega_s(x, y) = \omega(|x|, y)$  буде



ідентифікатором фігури  $\Phi_s = \Phi^+ \cup \Phi_m^+$ , яка складається з  $\Phi$  і непов'язаною з нею симетричною відносно осі  $Y$  копією  $\Phi_m^+$ .

Аналогічно, нехай  $\omega(x, y)$  є ідентифікатором деякої фігури  $\Omega$ . Позначимо частину  $\Omega$ , що розташована у верхній півплощині  $y \geq 0$  через  $\Omega^+$ , а частину (якщо вона є), розташовану в півплощині  $y \leq 0$  – через  $\Omega^-$  (тобто  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ ). Тоді має місце наступне

**Твердження 7.** Функція  $\omega_s(x, y) = \omega(x, |y|)$  буде ідентифікатором фігури, утвореної об'єднанням  $\Omega^+$  і її «дзеркального» образу  $\Omega_m^+$  в нижню півплощину.

**Приклад 4.** Продемонструємо застосування твердження 6 на прикладі «симетризації» частини повернутого еліпса, що розташована в півплощині  $x \geq 0$ .

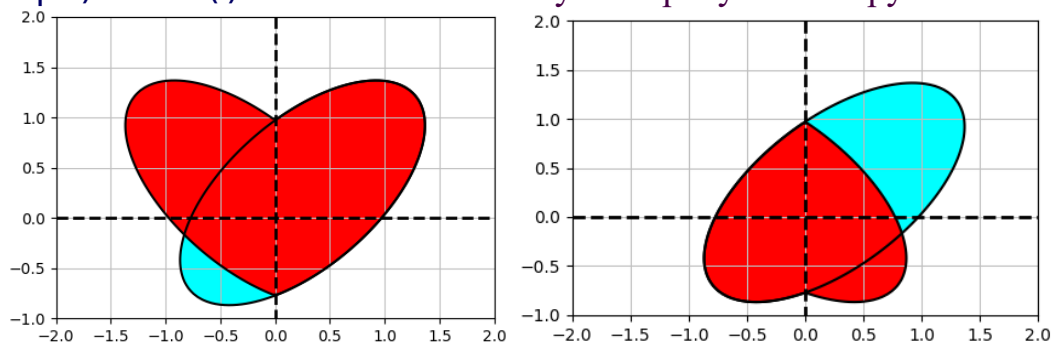
```
from sympy import symbols, Abs, S, init_printing, expand
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y, = symbols("x y", real=True)
w=1-(x+y-S(1)/2)**2/4-(x-y)**2 # ідентифікатор еліпса
W=w.subs(x, Abs(x))
```

Надрукуємо функцію ідентифікації  $W$  результативної фігури. Позитивний числовий множник є несуттєвим і обирається для спрощення формули.

```
display(expand(16*W))
-20 x2 - 20 y2 + 24 y |x| + 4 y + 4 |x| + 15
```

Тепер виконаємо візуалізацію.

```
p1=plot_implicit(w>0, (x, -2, 2), (y, -1, 2), legend=False,
                color='cyan', border_color="k", show=False)
p2=plot_implicit(W>0, (x, -2, 2), (y, -1, 2),
                color='red', border_color="k", show=False)
p3=plot_implicit(
    (x, (x, -2, 2), (y, -1, 2), {"linewidths":2, "linestyles":'--'}),
    (y, (x, -2, 2), (y, -1, 2), {"linewidths":2, "linestyles":'--'}),
    aspect=(1, 1), color='k', show=False)
(p1+p2+p3).show() # наступний рисунок ліворуч
```



Очевидно, що контур червоної фігури ліворуч матиме рівняння

$$-20x^2 - 20y^2 + 24y|x| + 4y + 4|x| + 15 = 0$$

Зауважимо, що функція  $\omega(-|x|, y)$  буде ідентифікатором фігури  $\Phi^- \cup \Phi_m^-$ , яка утворена об'єднанням  $\Phi^-$  - частини входової фігури  $\Phi$ , яка розташована в



півплощині  $x \leq 0$ , і її дзеркальної відносно осі  $Y$  копії  $\Phi_m^-$ . Наприклад, якщо в розглядуваному прикладі зробити заміну  $W=w.subs(x,-Abs(x))$ , то ми отримаємо зображення, наведене на попередньому рисунку праворуч. ■

Нехай  $\omega(x,y)$  є ідентифікатором фігури  $\Omega$ . Позначимо частину  $\Omega$ , що розташована у першому квадранті  $x \geq 0, y \geq 0$  через  $\Omega_{q1}$ . Через  $\Omega_{q2}, \Omega_{q3}, \Omega_{q4}$  позначимо фігури, утворені дзеркальним відображенням  $\Omega_{q1}$  відносно осей на другий, третій і четвертий квадранти. Тоді має місце наступне

**Твердження 8.** Функція  $W(x,y) = \omega(|x|, |y|)$  є ідентифікатором фігури  $\Omega_{mm} = \Omega_{q1} \cup \Omega_{q2} \cup \Omega_{q3} \cup \Omega_{q4}$  утвореної об'єднанням  $\Omega_{q1}$  і її дзеркальних відносно осей  $X$  і  $Y$  відображень в інші квадранти.

Доведення. Для доведення слід проаналізувати функцію  $W(x,y)$  в точках  $(x,y)$  усіх квадрантів. Наприклад, розглянемо точку  $P_{--}(x_-, y_-)$  розташовану в третьому квадранті ( $x_- < 0, y_- < 0$ ). Дзеркальна до неї точка  $P_{++}(x_+, y_+)$ , де  $x_+ = -x_-, y_+ = -y_-$ , буде розташована в першому квадранті. При чому, якщо  $P_{++} \in \Omega_{q1} \setminus \partial\Omega$ , то  $W(x_-, y_-) = \omega(x_+, y_+) > 0$ . Якщо  $P_{++} \in \Omega_{q1} \cap \partial\Omega$ , то  $W(x_-, y_-) = \omega(x_+, y_+) = 0$ . Коли  $P_{++} \notin \Omega_{q1}$ , то  $W(x_-, y_-) = \omega(x_+, y_+) < 0$ . Отже в точках  $P_{--}$  відповідних точкам  $P_{++} \in \Omega_{q1}$  буде  $W(x_-, y_-) \geq 0$ , а в інших точках третього квадранта  $W(x_-, y_-) < 0$ . Аналогічно слід розглянути точки  $P_{-+}(x_-, y_+)$  і  $P_{+-}(x_+, y_-)$  в другому і четвертому квадрантах. Як наслідок, приходимо до висновку, що коли точка  $P(x,y) \in \Omega_{mm} = \Omega_{q1} \cup \Omega_{q2} \cup \Omega_{q3} \cup \Omega_{q4}$ , то  $W(x,y) \geq 0$ , при чому  $W(x,y) = 0$  лише на межі  $\Omega_{mm}$ , а зовні  $\Omega_{mm}$  буде  $W(x,y) < 0$ . ■

Зауважимо, що послідовне застосування тверджень 6 і 7 приводитиме то того ж результату.

**Приклад 5.** З ідентифікатора кута  $\omega_\angle(x,y)$  створити функцію ідентифікації  $\omega_\angle(|x|, |y|)$  «чотирикутної зірки» і візуалізувати її.

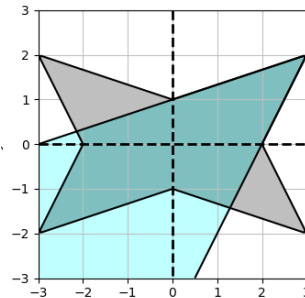
Розв'язання.

```
from sympy import symbols, Abs, S
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x,y = symbols("x y")
def ir(x,y):
    return (x+y-Abs(x-y))/2
w1=2-x+y/2
w2=1+x/3-y
w12=ir(w1,w2)
p1=plot_implicit(w12>0, (x, -3, 3), (y, -3, 3),
    {"linewidths":3, "alpha":0.5}, aspect=(1,1),
    color='cyan', border_color="k", show=False,
    legend=False)
W=w12.subs((x, Abs(x)), (y, Abs(y)))
```

```

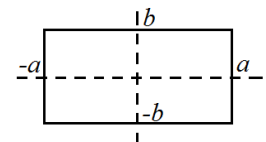
p2=plot_implicit(W>0,(x,-3,3),(y,-3,3),
{"linewidths":3,"alpha":0.5},aspect=(1,1),
color='gray',border_color="k",show=False)
p3=plot_implicit(
(x,(x,-3,3),(y,-3,3),{"linewidths":2,"linestyles":'- -'}),
(y,(x,-3,3),(y,-3,3),{"linewidths":2,"linestyles":'- -'}),
aspect=(1,1),color='k',show=False)
p=p1+p2+p3
p.show()

```

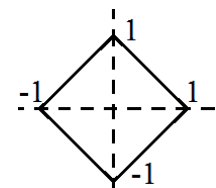


На побудованому рисунку «твірний» кут показано напівпрозорим кольором «cyan», а результівна фігура – сірим кольором.

Зауважимо, що коли в цьому прикладі обрати ідентифікатори півплощин  $w_1 = a - x$ ,  $w_2 = b - y$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), межі яких утворюють прямий кут, то вираз  $W$  являтиме ідентифікатор прямокутника  $[-a, a] \times [-b, b]$ , який вже було отримано в прикладі 1 п. 4.1.1 іншим способом.

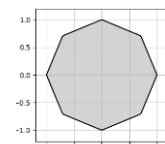


Якщо  $\Omega_{q1}$  є частиною півплощини  $1 - x - y \geq 0$  з першого квадранту то, відповідно до твердження 8, фігура з ідентифікатором  $W = 1 - |x| - |y|$  буде повернутим квадратом.

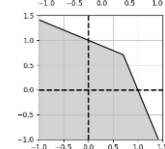


**Вправа.** Сконструювати ідентифікатор правильного восьмикутника, вписаного в одиничне коло. Відповідь:

$$W(x, y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}|x| - \frac{\sqrt{2}}{2}|y| - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\||x| - |y|\|.$$



*Вказівка.* Побудуйте ідентифікатор  $w(x, y)$  зони кута, який зображено праворуч. Потім до  $w(x, y)$  застосуйте твердження 8.



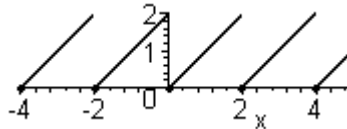
*Зауваження.* Нехай задано прями  $L_{x_0}: x - x_0 = 0$  та  $L_{y_0}: y - y_0 = 0$ . Частина фігури  $\Phi$ , яка розташована праворуч від  $L_{x_0}$ , позначатимемо через  $\Phi_r$ , а ліворуч – через  $\Phi_l$ . Аналогічно, частину  $\Phi$ , що розташована вище  $L_{y_0}$  позначимо  $\Phi_u$ , а нижче – через  $\Phi_d$ . Тобто  $\Phi = \Phi_l \cup \Phi_r$ ,  $\Phi = \Phi_d \cup \Phi_u$ , при чому будь-яка з  $\Phi_l, \Phi_r, \Phi_d, \Phi_u$  може бути порожньою множиною. Симетризовані фігури, утворювані з  $\Phi_l, \Phi_r, \Phi_d, \Phi_u$  і їх дзеркальних копій, позначимо через  $\Phi_{ls}, \Phi_{rs}, \Phi_{ds}, \Phi_{us}$ , а відповідні їм ідентифікатори -  $\omega_{ls}, \omega_{rs}, \omega_{ds}, \omega_{us}$ . Тоді з (6) випливає

$$\begin{aligned} \omega_{rs}(x, y) &= \omega(x - 2Q_l(x - x_0, 0), y) = \omega(x_0 + |x - x_0|, y) \\ \omega_{us}(x, y) &= \omega(x, y_0 + |y - y_0|) \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}\omega_{ls}(x, y) &= \omega(x_0 - |x - x_0|, y) \\ \omega_{ds}(x, y) &= \omega(x, y_0 - |y - y_0|)\end{aligned}\quad (8)$$

**Періодичне продовження функцій ідентифікації.** Іноколи виникає потреба в побудові функції ідентифікації фігури, яка отримана періодичним розмноженням вздовж координатних осей простішої (обмеженої) фігури, для якої функція ідентифікації відома. Для цього нам знадобиться функція  $Mod(x, T)$ , яка повертає залишок від ділення першого аргументу на другий. В Python можна скористатися її символічною реалізацією `sympy.Mod(x, T)`, або числовою – `numpy.mod(x, T)`. Ось приклад графіка  $Mod(x, 2)$



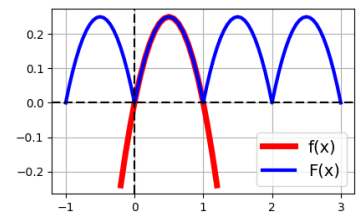
Функція  $Mod(x, T)$  є періодичною з періодом  $T > 0$ , на відрізку  $0 \leq x < T$  вона співпадає з лінійною функцією  $y = x$ , і в точках  $x = k \cdot T$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) потерпає розриви.

Якщо потрібно періодично повторити функцію однієї змінної  $f(x)$  з напівінтервалу  $[a, b)$  на всю дійсну вісь, то можна застосувати формулу.

$$F(x) = f(a + Mod(x - a, b - a)). \quad (9)$$

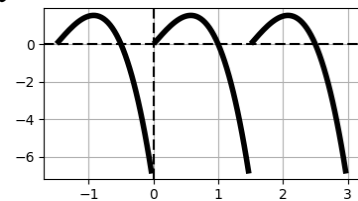
Якщо функція  $f(x)$  на кінцях відрізка  $[a, b]$  набуває однакових значень  $f(a) = f(b)$ , то результатівне періодичне продовження  $F(x)$  буде неперервною функцією, наприклад, такою, як показано нижче.

Періодичне продовження  $F(x) = f(Mod(x, 1))$  (синя крива) функції  $f(x) = x \cdot (1 - x)$  (червона крива) з відрізка  $0 \leq x \leq 1$  (період  $T=1$ ).



Якщо  $f(a) \neq f(b)$ , то отримувана періодична функція буде розривною, наприклад, такою, як зображено на наступному рисунку.

Періодичне продовження  $F(x) = f(Mod(x, 3/2))$  функції  $f(x) = 4x(1 - x^2)$  з відрізка  $[0, 1.5]$  (період  $T=1.5$ ).



Для функцій кількох змінних також можна запропонувати спосіб їх періодичного продовження з прямокутної області на весь простір. Розглянемо лише двовимірний випадок. Має місце наступне

**Твердження 9.** Періодичне продовження функції двох змінних  $\omega(x, y)$  з прямокутника  $[a, b) \times [c, d)$  на всю площину може бути отримано за формулою

$$W(x, y) = \omega(a + Mod(x - a, b - a), c + Mod(y - c, d - c)) \quad (10)$$

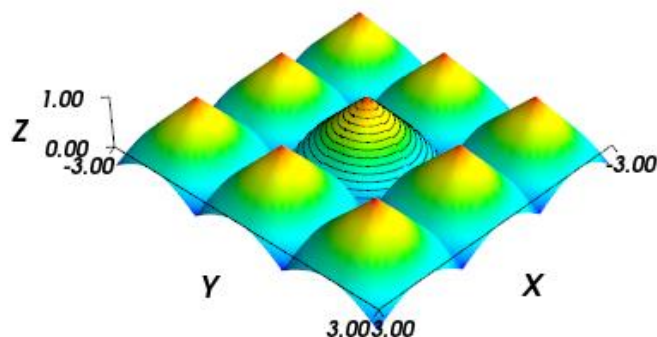
**Приклад 6.** Виконати періодичне продовження функції  $\omega(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  з прямокутника  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  на всю площину XY і побудувати графік.

`import numpy as np`

```

from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
def f(x,y):          # вхідна функція
    return 1-np.sqrt(x**2+y**2)
def F(x,y):         # формула періодичного продовження
    return f(-1+np.mod(x+1,2), -1+np.mod(y+1,2))
x1,y1 = np.mgrid[-3:3:61j, -3:3:61j]
z1=F(x1,y1)
mlab.figure(fgcolor=(0,0,0), bgcolor=(1,1,1))
sf=mlab.mesh(x1,y1,z1)
x,y = np.mgrid[-1:1:21j, -1:1:21j]
z=f(x,y)
vals=np.linspace(z.min(),z.max(),16)
mlab.contour_surf(x,y,z, contours=list(vals), color=(0,0,0))
mlab.axes(sf, extent=[-3,3, -3,3, 0,1])

```



На наведеному рисунку розмножувана ділянка функції  $\omega(x,y)$  додатково показана чорним каркасом.

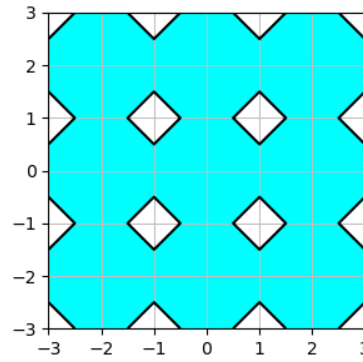
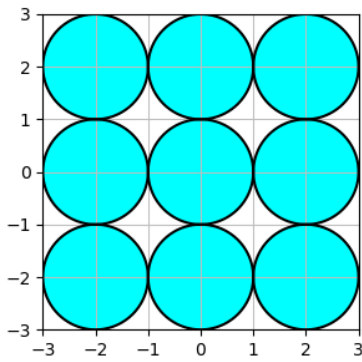
**Наслідок.** Якщо  $\omega(x,y)$  є функцією ідентифікації фігури  $\Omega$ , що цілком розташована в прямокутнику  $[a,b] \times [c,d]$ , то функція  $W(x,y)$ , побудована за формулою (10), буде ідентифікатором фігури, отриманої періодичним повторенням  $\Omega$  вздовж осей  $X$  та  $Y$ .

Якщо в попередньому прикладі розглядати функцію  $\omega(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  як ідентифікатор одиничного кола, то  $W(x,y)$  буде ідентифікатором фігури, утвореної періодичним повторенням одиничного кола.

```

from sympy import symbols, sqrt, Mod, S, Abs
from spb import plot_implicit
x,y = symbols("x y")
f=1-sqrt(x**2+y**2)
F=f.subs((x, -1+Mod(x+1,2)), (y, -1+Mod(y+1,2)))
p=plot_implicit(F>0, (x, -3,3), (y, -3,3),
    aspect=(1,1), force_real_eval=True,
    color='cyan', border_color="k", show=False)
p.show()          # наступний рисунок ліворуч

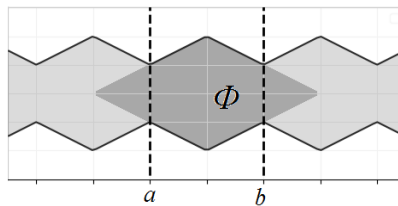
```



Зауважимо, що коли фігура  $\Omega$  виходить за межі прямокутника  $[a, b) \times [c, d)$ , то періодично «розмножуватися» буде та частина  $\Omega$ , що потрапляє в зону  $[a, b) \times [c, d)$ . Наприклад, замініть в останньому сценарії вираз  $f$  на  $f = 3/2 - \text{Abs}(x) - \text{Abs}(y)$ . Він являє ідентифікатор повернутого квадрата  $\Omega_\phi$ , що частково виходить за межі породжуючого періодичне продовження прямокутника  $[-1, 1) \times [-1, 1)$ . Фігура, утворювана періодичним продовженням  $\Omega_\phi$ , показана на попередньому рисунку праворуч.

*Зауваження.* Ідентифікатор фігури, отриманої періодичним продовженням ділянки  $\Phi$ , що розташована в смугі  $a \leq x \leq b$  (тобто повторення фігури  $\Phi \cap ([a, b) \times Y)$ ) вздовж осі X, будується за формулою

$$W(x, y) = \omega(a + \text{Mod}(x - a, b - a), y) . \quad (11)$$



Ідентифікатор фігури, отриманої періодичним продовженням  $\Phi \cap (X \times [c, d])$  вздовж осі Y, будується за формулою

$$W(x, y) = \omega(x, c + \text{Mod}(y - c, d - c)) \quad (12)$$

Іноколи потрібно виконати парне періодичне продовження функцій ідентифікації. Для функції  $f(x)$  однієї змінної парне періодичне продовження полягає в продовженні  $f(x)$  з відрізка  $[0, L]$  на відрізок  $[-L, 0]$  парно, а потім з відрізка  $[-L, L]$  періодично на всю дійсну вісь. З будь-якої функції  $f(x)$  заданої для  $x \geq 0$  можна отримати парну функцію  $\tilde{f}(x)$  за формулою  $\tilde{f}(x) = f(|x|)$ . Для її періодичного продовження з відрізка  $[-L, L]$  аргумент  $x$  слід замінити на  $-L + \text{mod}(x + L, 2L)$ .

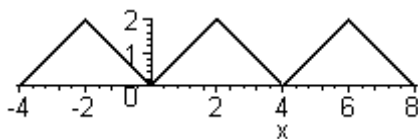
Для функції  $f(x, y)$  двох змінних парне періодичне продовження вздовж осі X полягає у виконанні тих самих замінь, застосовуваних до аргумента  $x$ . Отже парне періодичне продовження  $F(x, y)$  функції  $f(x, y)$  зі смуги  $0 \leq x \leq L$  на всю площину XY виконується за формулою

$$F(x, y) = f(|-L + \text{mod}(x - L, 2L)|, y) \quad (13)$$

Для подальшого спрощення визначимо функцію  $\text{stc}(x, w)$

$$\text{stc}(x, w) = \left| \text{mod}\left(x - \frac{w}{2}, w\right) - \frac{w}{2} \right| \quad (14)$$

Вона є неперервною парною періодичною функцією з періодом  $w$ , яка на відрізку  $-\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}$  співпадає з функцією  $y = |x|$ . Приклад графіка функції  $\text{stc}(x, 4)$  наведено на наступному рисунку.



Враховуючи (14), де покладемо  $w = 2L$ , формулу (13) можна записати у вигляді

$$F(x, y) = f(\text{stc}(x, 2L), y)$$

Звідси випливає наступне

**Твердження 10.** Нехай  $\epsilon$  фігура  $\Phi$  з ідентифікатором  $\omega(x, y)$ . Частину  $\Phi$ , розташовану в смузі  $0 \leq x \leq L$  позначимо через  $\Phi^+ = \Phi \cap ([0, L] \times Y)$ , а фігуру, симетричну до неї, розташовану в смузі  $-L \leq x \leq 0$ , – через  $\Phi_s^+$ . Область, отримана з  $\Phi^+$  парним періодичним продовженням вздовж  $X$ , матиме функцію ідентифікації

$$W(x, y) = \omega(\text{stc}(x, 2L), y). \quad (15)$$

Доведення. Якщо  $0 \leq x \leq L$ , то  $\text{stc}(x, 2L) = x$ . Тоді для точок  $(x, y) \in [0, L] \times Y$  маємо  $W(x, y) = \omega(x, y)$ . Якщо  $-L \leq x \leq 0$ , то  $\text{stc}(x, 2L) = |x|$  і для точок  $(x, y) \in [-L, 0] \times Y$  маємо  $W(x, y) = \omega(|x|, y)$ . Оскільки функція  $W(x, y)$  періодична, то поза відрізком  $-L \leq x \leq L$  вона повторюватиме свої значення. Позначимо  $\tilde{x} = -L + \text{mod}(x - L, 2L)$  і  $\Phi_{\text{sym}} = \Phi^+ \cup \Phi_s^+$ . Фактично, формула (15) стверджує, що  $W(x, y) = W(|\tilde{x}|, y)$ . Коли  $(\tilde{x}, y) \in \Phi_{\text{sym}}$ , то  $W(x, y) \geq 0$ . Навпаки, якщо  $(\tilde{x}, y) \notin \Phi_{\text{sym}}$ , то  $W(x, y) < 0$ . Також зрозуміло, що для точок  $(\tilde{x}, y)$  на межі  $\Phi_{\text{sym}}$  відповідні точки  $(x, y)$  належатимуть межі області, утвореної періодичним продовженням  $\Phi_{\text{sym}}$ , і для них  $W(x, y) = 0$ . Отже  $W(x, y)$  є ідентифікатором створюваної фігури. ■

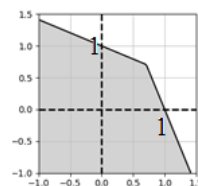
Аналогічно фігура, отримана парним періодичним продовженням  $\Phi \cap (X \times [0, L])$  вздовж  $Y$ , матиме функцію ідентифікації

$$W(x, y) = \omega(x, \text{stc}(y, 2L)). \quad (16)$$

Якщо частину  $\Phi$  з першого квадранта (тобто  $\Phi \cap [0, L_x] \times [0, L_y]$ ) парно і періодично продовжити в напрямку обох осей, то результувна множина точок матиме ідентифікатор

$$W(x, y) = \omega(\text{stc}(x, 2L), \text{stc}(y, 2L)). \quad (17)$$

**Приклад 7.** Сконструювати функцію ідентифікації парного періодичного продовження на всю площину  $XY$  з періодом 2 зони кута, зображеного праворуч (його вершина в точці  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ).



Розв'язання. Сконструювавши ідентифікатор  $w_{12}(x, y)$  входного кута, його аргументи слід замінити на  $\text{stc}(x, 2)$  і  $\text{stc}(y, 2)$ .

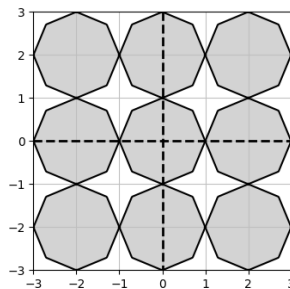
```
from matplotlib import pyplot as plt
```



```

from sympy import symbols, sqrt, S, Abs, Mod
from spb import plot_implicit
x, y = symbols("x y")
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/S(2)
def stc(x,w): return Abs(Mod(x-w/S(2),w)-w/S(2))
w1=1-x+(1-sqrt(2))*y # ідентифікатор півплощини  $1 - x + (1 - \sqrt{2})y \geq 0$ 
w2=1+(1-sqrt(2))*x-y # ідентифікатор півплощини  $1 + (1 - \sqrt{2})x - y \geq 0$ 
w12=ir(w1,w2) # ідентифікатор зони кута
W=w12.subs(((x,stc(x,2)),(y,stc(y,2))))
xyrange=(x,-3,3),(y,-3,3)
p1=plot_implicit(W>0,*xyrange,aspect=(1,1),legend=False,
force_real_eval=True,color='lightgray',
border_color="k",show=False)
p2=plot_implicit((x,*xyrange,
{"linewidths":2,"linestyles":'---',"zorder":20}),
(y,*xyrange,
{"linewidths":2,"linestyles":'---',"zorder":20}),
aspect=(1,1),color='k',show=False)
(p1+p2).show()

```



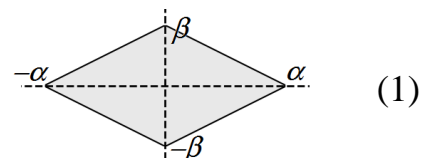
*Зауваження.* Перетворення функцій ідентифікації, які в цьому параграфі розглянуто для плоских фігур, можуть бути поширені на ідентифікатори тривимірних тіл. Але це питання ми тут не розглядаємо.

#### 4.4. Ідентифікатори окремих фігур.

##### 4.4.1. Ідентифікатори чотирикутників.

**Твердження 1.** Функцією ідентифікації ромба, діагоналі якого співпадають з осями координат, а напівдіагоналі (півосі) мають довжини  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ), може бути

$$\omega(x, y) = 1 - \frac{|x|}{\alpha} - \frac{|y|}{\beta}.$$

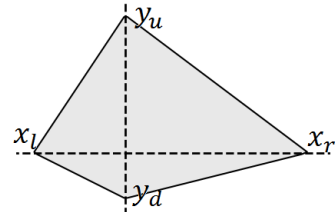


**Доведення.** Рівняння прямої, яка перетинає перший квадрант і накладається на відповідну сторону чотирикутника, має вигляд  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ . А ідентифікатором нижньої до неї півплощини є функція  $\omega(x, y) = 1 - \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ . Відповідно до твердження 8 п. 4.3 про дзеркальне відносно осей X і Y відображення частини

фігури з першого квадранта в інші, функцією ідентифікації результтивного ромба буде  $W(x, y) = \omega(|x|, |y|) = 1 - \frac{|x|}{\alpha} - \frac{|y|}{\beta}$ . ■

**Твердження 2.** Нехай діагоналі чотирикутника розташовані на осях координат, точка їх перетину  $(0,0)$ , а вершини мають координати  $(x_r, 0)$ ,  $(0, y_u)$ ,  $(x_l, 0)$ ,  $(0, y_d)$ , де  $x_r > 0, x_l < 0, y_u > 0, y_d < 0$ . Тоді його функцією ідентифікації може бути

$$\omega(x, y) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_r} + \frac{1}{x_l} \right) x - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} + \frac{1}{y_d} \right) y - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_l} \right) |x| - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} - \frac{1}{y_d} \right) |y| \quad (2)$$



Доведення. Покладемо

$$\omega(x, y) = 1 - \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1} - \frac{|x|}{a_2} - \frac{|y|}{b_2}$$

і підберемо параметри  $a_1, a_2, b_1, b_2$  так, щоб рівняння  $\omega(x, y) = 0$  визначало контур бажаного чотирикутника.

В кожному з чотирьох квадрантів функція  $\omega(x, y)$  задаватиметься різними виразами які, очевидно, являтимуть прямі лінії, точніше відрізки прямої, розташовані у відповідних квадрантах. Підберемо параметри  $a_1, a_2, b_1, b_2$  так, щоб фігура, утворювана рівнянням  $\omega(x, y) = 0$ , мала задані координати вершин.

При  $x = x_r, y = 0$  маємо  $1 - x_r \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = 0$ . При  $x = x_l, y = 0$  маємо  $1 - x_l \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) = 0$ . Ці рівняння утворюють лінійну систему відносно  $a_1, a_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} &= \frac{1}{x_r} \\ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} &= \frac{1}{x_l} \end{aligned}$$

Звідки  $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_r} + \frac{1}{x_l} \right)$ ,  $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_r} - \frac{1}{x_l} \right)$ . Аналогічно  $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} + \frac{1}{y_d} \right)$ ,  $\frac{1}{b_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} - \frac{1}{y_d} \right)$ . Підставляючи  $\frac{1}{a_i}, \frac{1}{b_i}$  ( $i = 1, 2$ ) в запропоновану формулу, приходимо до (2).

Перевіримо, що для внутрішніх точок чотирикутника  $\omega(x, y) > 0$ , а для зовнішніх  $\omega(x, y) < 0$ . Для цього достатньо в кожному квадранті до граничних відрізків узяти вектори нормалей. Так при  $x > 0, y > 0$  маємо  $\omega(x, y) = 1 - \frac{x}{x_r} - \frac{y}{y_u}$ . і, отже,  $\mathbf{n}_{++} = \left( -\frac{1}{x_r}, -\frac{1}{y_u} \right)$ . При  $x < 0, y > 0$  маємо  $\omega(x, y) = 1 - \frac{x}{x_l} - \frac{y}{y_u}$  і  $\mathbf{n}_{-+} = \left( -\frac{1}{x_l}, -\frac{1}{y_u} \right)$ . Аналогічно,  $\mathbf{n}_{--} = \left( -\frac{1}{x_l}, -\frac{1}{y_d} \right)$ ,  $\mathbf{n}_{+-} = \left( -\frac{1}{x_r}, -\frac{1}{y_d} \right)$ . Враховуючи, що  $x_r > 0, x_l < 0, y_u > 0, y_d < 0$ , всі вектори  $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$  в своєму квадранті вказують в напрямку початку координат. Але ці вектори також вказують в сторони «позитивних» півплощин (твердження 3 п. 4.1.5), перетин яких утворює чотирикутник. Тому всередині нього  $\omega(x, y) > 0$ , зовні  $\omega(x, y) < 0$ ,



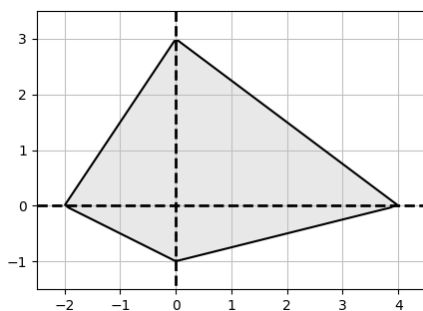
і  $\omega(x, y) = 0$  лише на його межі. Отже  $\omega(x, y)$  може розглядатися як функція ідентифікації розглядуваного чотирикутника. ■

**Приклад 1.** Візуалізувати чотирикутник з вершинами в точках  $(4,0), (0,3), (-2,0), (0,-1)$  по його функції ідентифікації.

```

from sympy import symbols, Abs, S
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x, y, = symbols("x y")
xr, xl, yu, yd = map(S, [4, -2, 3, -1]) # символні координати вершин
W=1-(1/xr+1/xl)/2*x-(1/yl+1/yd)/2*y-\
    (1/xr-1/xl)/2*Abs(x)-(1/yl-1/yd)/2*Abs(y)
p1=plot_implicit(W>0, (x, -2.5, 4.5), (y, -1.5, 3.5),
    {"alpha":0.5}, aspect=(1,1),
    color='lightgray', border_color="k", show=False,
    legend=False, grid=True)
p2=plot_implicit((x, (x, -2.5, 4.5), (y, -1.5, 3.5),
    {"linewidths":2, "linestyles":'--'}),
    (y, (x, -2.5, 4.5), (y, -1.5, 3.5),
    {"linewidths":2, "linestyles":'--'}),
    color='k', show=False)
(p1+p2).show()

```

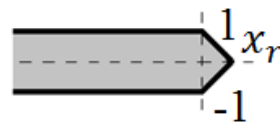


**Наслідок (з твердження 2).** Якщо в формулі (2) перейти до границі  $x_l \rightarrow -\infty$ , то отримаємо ідентифікатор горизонтальної смуги з правою межею у формі кута.

$$\omega(x, y) = 1 - \frac{1}{2 x_r} (x + |x|) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} + \frac{1}{y_d} \right) y - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y_u} - \frac{1}{y_d} \right) |y|.$$

Наприклад, при  $y_u = 1, y_d = -1$  матимемо

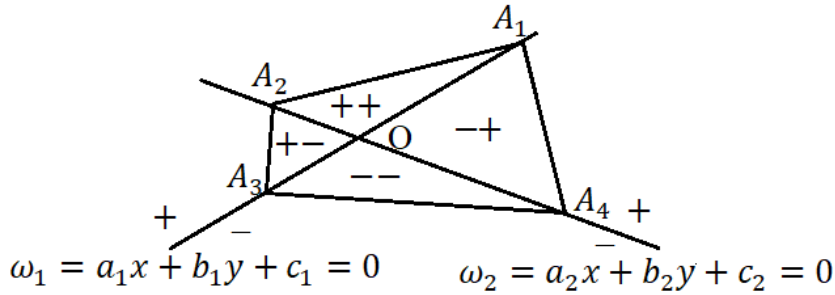
$$\omega(x, y) = 1 - \frac{1}{2 x_r} (x + |x|) - |y|$$



Спробуємо вивести неявне рівняння чотирикутника, діагоналі якого мають рівняння  $\omega_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \omega_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ , у вигляді

$$W(x, y) = 1 - \alpha_1 \omega_1(x, y) - \beta_1 \omega_2(x, y) - \alpha_2 |\omega_1(x, y)| - \beta_2 |\omega_2(x, y)| = 0 \quad (3)$$

Позначимо вершини чотирикутника  $A_1, A_2, A_3, A_4$  в порядку обходу контура проти годинникової стрілки.



Відомо, що значення виразів  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$  пропорційні відстаням від точки  $(x, y)$  до відповідної прямої (з точністю до знака). При чому  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$  є позитивними для точок, розташованих з однієї сторони прямої, і негативними – з іншої. Припустимо, що розподіл знаків  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$  по півплощинам такий, як зображено на малюнку.

Обчислимо  $W(x, y)$  в вершинах  $A_1$  і  $A_3$ . Оскільки вони розташовані на першій діагоналі, то  $\omega_1(A_1) = 0$ ,  $\omega_1(A_3) = 0$ . Тому

$$W(A_1) = 1 - \beta_1 \omega_2(A_1) - \beta_2 |\omega_2(A_1)|$$

$$W(A_3) = 1 - \beta_1 \omega_2(A_3) - \beta_2 |\omega_2(A_3)|$$

Але  $\omega_2(A_1) > 0$  і  $\omega_2(A_3) < 0$ . Враховуючи це і те, що  $W(P) = 0$  в точках контура, отримуємо

$$\begin{aligned} 1 - (\beta_1 + \beta_2) \omega_2(A_1) &= 0 \\ 1 - (\beta_1 - \beta_2) \omega_2(A_3) &= 0 \end{aligned} \quad \text{або} \quad \begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 1/\omega_2(A_1) \\ \beta_1 - \beta_2 &= 1/\omega_2(A_3) \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_2(A_1)} + \frac{1}{\omega_2(A_3)} \right) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_2(A_1)} - \frac{1}{\omega_2(A_3)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_1(A_2)} + \frac{1}{\omega_1(A_4)} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_1(A_2)} - \frac{1}{\omega_1(A_4)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Тепер покажемо, що функція  $W(x, y)$ , визначена в формулі (3), є функцією ідентифікації чотирикутника.

В кожному куті  $\angle A_1OA_2$ ,  $\angle A_2OA_3$ ,  $\angle A_3OA_4$ ,  $\angle A_4OA_1$  функція  $W(x, y)$  лінійна. Наприклад, в  $\angle A_1OA_2$   $W(x, y) = W_{A_1A_2}(x, y)$  є деякою лінійною функцією, яка в точках відрізка  $A_1A_2$  обертається на нуль, а отже  $W_{A_1A_2}(x, y)$  обертається на нуль у всіх точках прямої  $A_1A_2$ . Тому лінійна функція  $W_{A_1A_2}(x, y)$  по один бік  $A_1A_2$  буде позитивною, а по інший – негативною. Достатньо дізнатися знак в одній точці, щоб знати по який бік вона позитивна. Оскільки точка  $O(x_0, y_0)$  перетину діагоналей розташована на обох діагоналях, то  $\omega_1(x_0, y_0) = 0$ ,  $\omega_2(x_0, y_0) = 0$ . З формули (3) випливає  $W_{A_1A_2}(x_0, y_0) = 1$ , тобто  $W_{A_1A_2}(x, y)$  позитивна зі сторони чотирикутника і негативна зовні. Але  $W(x, y) = W_{A_1A_2}(x, y)$  лише в куті  $\angle A_1OA_2$ . Це означає, що  $W(x, y)$  позитивна в трикутнику  $A_1OA_2$  і негативна в зоні кута  $\angle A_1OA_2$ , розташованій зовні цього

трикутника. Таким же чином, в кути  $\angle A_2OA_3$  лінійна функція  $W(x, y) = W_{A_2A_3}(x, y)$  обертається в нуль на прямій  $A_2A_3$  і  $W_{A_2A_3}(x_0, y_0) = 1$ . Отже в трикутнику  $A_2OA_3$  функція  $W(x, y)$  є позитивною, а зовні нього в кути  $\angle A_2OA_3$  – негативною. Аналогічно показується, що в інших трикутниках  $A_3OA_4$  і  $A_4OA_1$  функція  $W(x, y)$  позитивна, а зовні них – негативна. Таким чином функція  $W(x, y)$  позитивна всередині чотирикутника, негативна – зовні, і дорівнює нулю лише на його контурі. А це означає, що  $W(x, y)$  є функцією ідентифікації розглядуваного чотирикутника. Таким чином, має місце наступне

**Твердження 3.** Ідентифікатором чотирикутника, діагоналі якого мають рівняння  $\omega_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $\omega_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , може бути функція  $W(x, y) = 1 - \alpha_1\omega_1(x, y) - \beta_1|\omega_2(x, y)| - \alpha_2|\omega_1(x, y)| - \beta_2|\omega_2(x, y)|$ , в якій коефіцієнти  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  обчислюються за формулами (4), (5).

**Приклад 2.** Дано квадрат з вершинами в точках  $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ . Побудувати його неявне рівняння.

Розв'язання. Рівняннями діагоналей є

$$\omega_1(x, y) = -x + y = 0 \quad \text{і} \quad \omega_2(x, y) = x + y = 0.$$

Тоді  $\omega_1(A_2) = 2, \omega_1(A_4) = -2, \omega_2(A_1) = 2, \omega_2(A_3) = -2$ .

Звідки  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1/2, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1/2$ . Відповідно до твердження 3, функцією ідентифікації може бути

$$W = 1 - \frac{1}{2}|\omega_1(x, y)| - \frac{1}{2}|\omega_2(x, y)| = 1 - \frac{1}{2}|x - y| - \frac{1}{2}|x + y|.$$

Неявним рівнянням квадрата буде  $W(x, y) = 0$ . ■

Тепер побудуємо функцію ідентифікації довільного чотирикутника по координатам його вершин. Для цього слід записати рівняння діагоналей через координати вершин і виразити коефіцієнти в формулі (3) також через ці координати.

Нехай вершинами чотирикутника будуть точки  $A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$ . Рівнянням прямої (діагоналі)  $A_1A_3$  є  $\frac{y-y_1}{y_3-y_1} = \frac{x-x_1}{x_3-x_1}$ , яке можна записати у вигляді

$$\omega_1(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Аналогічно, рівняння діагоналі  $A_2A_4$  можна записати у вигляді

$$\omega_2(x, y) = - \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Мінус в формулі (7) поставлено для того, щоб розподіл знаків функцій  $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)$  по півплощинам і нумерація точок  $A_i$  були узгоджені (так, як на пояснювальному рисунку вище).

З (6) і (7) випливає

$$\begin{aligned} \omega_1(A_2) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \quad \omega_1(A_4) = \begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \\ \omega_2(A_1) &= - \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}, \quad \omega_2(A_3) = - \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

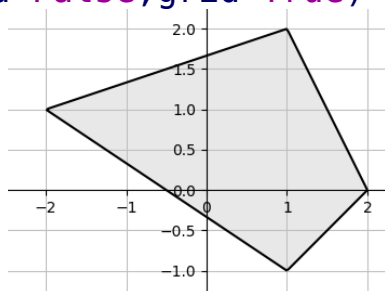
Підстановка формул (4)–(8) в (3) даватиме функцію ідентифікації чотирикутника з вершинами в точках  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , які занумеровані в напрямку обходу контура проти годинникової стрілки. При виведенні формул (4)–(8) використовувалися знаки функцій  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$ , такі як показано вище на пояснювальному рисунку. Однак це несуттєво. Важливо лише, щоб вершини нумерувалися в послідовності обходу контуру проти годинникової стрілки. Якщо вершини  $A_i$  прямують за годинниковою стрілкою, то в формулах (6)–(8) слід поміняти знаки всіх визначників  $\omega_1, \omega_2$ .

Відмінність способу, що реалізується твердженням 3 і формулами (3)–(8), від викладеного в п. 4.1, полягає в тому, що результативний ідентифікатор  $W(x, y)$  не містить вкладених модулів.

**Приклад 3.** Побудувати функцію ідентифікації чотирикутника з вершинами в точках  $A_1(1, 2)$ ,  $A_2(-2, 1)$ ,  $A_3(1, -1)$ ,  $A_4(2, 0)$  і візуалізувати фігуру.

Розв'язання.

```
from sympy import symbols, Abs, S, simplify, init_printing
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
from IPython.display import display
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y, = symbols("x y")
x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4 = map(S, [1, 2, -2, 1, 1, -1, 2, 0])
w1 = (x - x1) * (y3 - y1) - (y - y1) * (x3 - x1)
w2 = -(x - x2) * (y4 - y2) + (y - y2) * (x4 - x2)
w1A2 = w1.subs((x, x2), (y, y2))
w1A4 = w1.subs((x, x4), (y, y4))
w2A1 = w2.subs((x, x1), (y, y1))
w2A3 = w2.subs((x, x3), (y, y3))
a1 = (1/w1A2 + 1/w1A4) / 2
a2 = (1/w1A2 - 1/w1A4) / 2
b1 = (1/w2A1 + 1/w2A3) / 2
b2 = (1/w2A1 - 1/w2A3) / 2
W = simplify(1 - a1*w1 - b1*w2 - a2*Abs(w1) - b2*Abs(w2))
display(W)
-32x/105 + 4y/35 - 2|x - 1|/3 - 6|x + 4y - 2|/35 + 134/105
plot_implicit(W > 0, (x, -2.5, 2.5), (y, -1.5, 2.5),
              {"alpha": 0.5}, aspect=(1, 1), axis_center=(0, 0),
              color='lightgray', border_color="k",
              n=200, legend=False, grid=True)
```

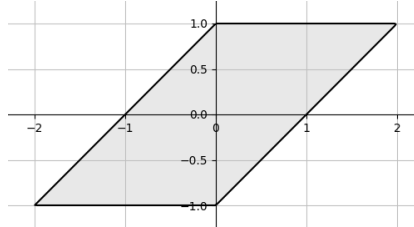


Щоб побудувати функцію ідентифікації (або неявне рівняння) іншого чотирикутника, вам достатньо скоригувати в попередньому кодї лише рядок з координатами вершин. Наприклад, замініть його на наступний

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 = \text{map}(S, [0, 1, -2, -1, 0, -1, 2, 1])$

І ви отримаєте ідентифікатор паралелограма

$-|x|/2 - |x - 2y|/2 + 1$



Розглянемо окремий випадок, коли чотирикутник є паралелограмом.

**Твердження 4.** Функція ідентифікації паралелограма, координати вершин якого  $A_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) прямують в порядку обходу контура проти годинникової стрілки, має вигляд

$$W = 1 - \frac{1}{\omega_1(A_2)} |\omega_1(x, y)| - \frac{1}{\omega_2(A_1)} |\omega_2(x, y)|, \text{ де} \quad (9)$$

$$\omega_1(x, y) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \quad \omega_2(x, y) = - \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Доведення. Формули (10) є визначенням функцій  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$ , взятим з формул (6), (7). Оскільки у паралелограма протилежні вершини розташовані на однаковій відстані від діагоналей, то величини  $\omega_2(A_1)$  і  $\omega_2(A_3)$ , які використано в (3), співпадатимуть за модулем, але матимуть протилежні знаки. Тому з (4) випливатиме, що  $\beta_1 = 0$ . Аналогічно,  $\omega_1(A_2) = -\omega_1(A_4)$  і з (5) випливає  $\alpha_1 = 0$ . В результаті (3) набуває вигляду (9). ■

*Зауваження.* Формула (1) є наслідками формули (9), (10), в яких слід покласти  $A_1(\alpha, 0)$ ,  $A_2(0, \beta)$ ,  $A_3(-\alpha, 0)$ ,  $A_4(0, -\beta)$ . Тоді  $\omega_1(x, y) = 2\alpha y$ ,  $\omega_2(x, y) = 2\beta x$ ,  $\omega_1(A_2) = \omega_2(A_1) = 2\alpha\beta$ .

Результат прикладу 2 теж можна отримати з формул (9), (10), якщо покласти  $A_1(1, 1)$ ,  $A_2(-1, 1)$ ,  $A_3(-1, -1)$ ,  $A_4(1, -1)$ . Тоді  $\omega_1(x, y) = -2x + 2y$ ,  $\omega_2(x, y) = 2x + 2y$ ,  $\omega_1(A_2) = 4$ ,  $\omega_2(A_1) = 4$ .

Оскільки паралелограм однозначно визначається координатами трьох вершин  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то в формулах (10) величини  $x_4$ ,  $y_4$  є зайвими і їх бажано виключити. Дійсно,  $x_4 - x_1 = x_3 - x_2$ ,  $y_4 - y_1 = y_3 - y_2$ . Тоді

$$\omega_2(x, y) = - \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 + x_3 - 2x_2 & y_1 + y_3 - 2y_2 \end{vmatrix} \text{ і}$$

$$\omega_2(A_1) = - \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 + x_3 - 2x_2 & y_1 + y_3 - 2y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$

(визначник не змінюється, якщо від другого рядка відняти перший). Таким чином,  $\omega_1(A_2) = \omega_2(A_1)$  (це площа  $S$  паралелограма з точністю до знака). Але, якщо точки  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  прямують при обході паралелограма проти годинникової стрілки, то вектори  $\mathbf{a} = (x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad 0)$ ,

$\mathbf{b} = (x_3 - x_2 \quad y_3 - y_2 \quad 0)$ ,  $\mathbf{c} = (0 \quad 0 \quad 1)$  утворюватимуть праву трійку. А для правих трійок  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  відомо, що їх мішаний добуток  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  позитивний. Тому

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \omega_1(A_2) > 0 \end{aligned}$$

Таким чином,  $\omega_1(A_2) = S > 0$  і, домноживши (9) на позитивний множник  $S$ , для  $W(x, y)$  можна написати

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} - \left| \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| - \\ &- \left| \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 + x_3 - 2x_2 & y_1 + y_3 - 2y_2 \end{vmatrix} \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

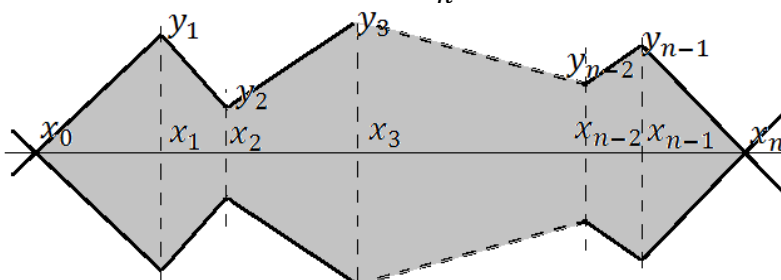
Якщо вершини  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) обходять паралелограм за годинниковою стрілкою, то в (11) визначник  $\omega_1(A_2)$  слід оточити модулем. В такому запису

$$W = S - \left| \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| - \left| \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 + x_3 - 2x_2 & y_1 + y_3 - 2y_2 \end{vmatrix} \right|$$

$W(x, y)$  буде функцією ідентифікації паралелограма для обох випадків.

#### 4.4.2. ○ Інші способи конструювання функцій ідентифікації.

**Неявне рівняння багатокутника з віссю симетрії.** Розглянемо багатокутник без самоперетинів та з віссю симетрії, яку приймемо в якості осі  $x$ . Нехай його вершини, що розташовані у верхній півплощині, мають зростаюче значення цієї координати. Позначимо координати цих вершин через  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , де  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Можна вважати, що пара вузлів  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  визначає при  $x < x_1$  промінь верхньої ламаної, який перетинає вісь  $x$  в точці з абсцисою  $x_0$ , а пара точок  $(x_{n-1}, y_{n-1})$ ,  $(x_n, y_n)$  для  $x > x_{n-1}$  визначає інший промінь ламаної, що перетинає цю вісь в точці з абсцисою  $x_n$ .



Згідно до формули Бернштейна [5] для верхньої ламаної з вершинами  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  (точки  $(x_0, y_0)$  та  $(x_n, y_n)$  не є її вершинами, хоча є вершинами багатокутника) матимемо,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left( y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_n + \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} (x - x_n) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) |x - x_k| \end{aligned} \quad (1)$$

Враховуючи, що крайні точки розташовані на осі  $x$ , тобто  $y_0 = 0, y_n = 0$ , отримуємо

$$Y(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{y_1}{x_1 - x_0} (x - x_0) + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} (x - x_n) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) |x - x_k|$$

Тоді функція ідентифікації зони  $\Omega$  площини  $XY$ , яка розташована нижче ламаної  $y = Y(x)$ , матиме вигляд

$$\omega(x, y) = Y(x) - y$$

Відповідно до твердження 7 п. 4.3, функція ідентифікації зони, отриманої об'єднанням  $\Omega^+ = \Omega \cap (X \times (y \geq 0))$  і її «дзеркального» образу  $\Omega_m^+$  в нижній півплощині, буде мати вигляд  $W(x, y) = \omega(x, |y|)$ , тобто  $W(x, y) = Y(x) - |y|$ . Таким чином, виконується наступне

**Твердження 1.** Для багатокутника з віссю симетрії  $OX$ , вершини якого в верхній півплощині мають координати  $(x_k, y_k), k = 0, 1, \dots, n$ , функція

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{y_1}{x_1 - x_0} (x - x_0) + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} (x - x_n) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) |x - x_k| - |y|. \quad (2)$$

є функцією ідентифікації.

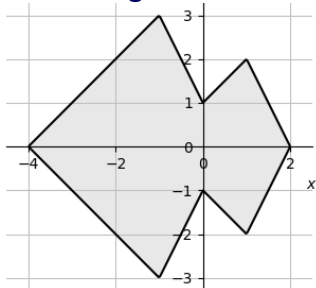
**Приклад 1.** Сконструювати функцію ідентифікації багатокутника з віссю симетрії  $OX$ , і вершинами у верхній півплощині  $(-4, 0), (-1, 3), (0, 1), (1, 2), (2, 0)$ , та візуалізувати фігуру.

Розв'язання.

```
from sympy import symbols, Abs, S, simplify, Tuple, \
    init_printing, Wild, Eq
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y, = symbols("x y", real=True)
X=Tuple(*map(S, [-4, -1, 0, 1, 2]))
Y=Tuple(*map(S, [ 0, 3, 1, 2, 0]))
n=len(X)-1
z1=(Y[1]/(X[1]-X[0])*(x-X[0])+Y[n-1]/(X[n-1]-X[n])*(x-X[n]))
z0=0
for k in range(1,n):
    z0+=((Y[k+1]-Y[k])/(X[k+1]-X[k])-
        (Y[k]-Y[k-1])/(X[k]-X[k-1]))*Abs(x-X[k])
W=z1/2+z0/2-Abs(y)
plot_implicit(W>0, (x, -2.5, 2.5), (y, -3.5, 3.5),
    {"alpha":0.5}, aspect=(1,1), axis_center=(0,0),
    color='lightgray', border_color="k",
```



```
n=200, legend=False, grid=True)
```



```
# друкування ідентифікатора фігури
k = Wild('q', properties=[lambda k: k.is_Number])
W=W.expand()
W=simplify(2*W).collect(Abs(x-k))
W_=symbols('W')
display(Eq(W_,W))

$$W = -x + 3|x| - 2|y| - 3|x - 1| - 3|x + 1| + 8$$

```

*Зауваження 1.* Функція  $\omega(x, y) = f(x) - |y|$  буде ідентифікатором фігури, у якої прямою симетрії є вісь X, а межа у верхній півплощині задана явним рівнянням  $y = f(x)$  (див. твердження 7 п. 4 3).

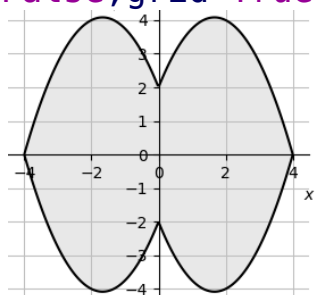
*Зауваження 2.* Функція  $\omega(x, y) = f(|x|) - |y|$  буде ідентифікатором фігури, яка в першому квадранті обмежена зверху кривою  $y = f(x), x \geq 0$ , і є симетричною відносно обох координатних осей (див. твердження 8 п. 4 3).

**Приклад 2.** Побудувати ідентифікатор фігури, яка в першому квадранті обмежена лінією  $y = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 2$ , і є симетричною відносно обох координатних осей.

```
from sympy import symbols, Abs, S, init_printing
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y, = symbols("x y", real=True)
f = -S(3)/4*x**2 + S(5)/2*x + 2      #  $f = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + 2$ .
W = f.subs(x, Abs(x)) - Abs(y)
display(W)

$$-3x^2/4 + 5|x|/2 - |y| + 2$$

plot_implicit(W>0, (x, -4.5, 4.5), (y, -4.5, 4.5),
              {"alpha":0.5}, aspect=(1,1), axis_center=(0,0),
              color='lightgray', border_color="k",
              n=200, legend=False, grid=True)
```





**Неявне рівняння послідовності кривих.** В роботі [6] та в першій главі нашого підручника для обчислення неперервної складеної функції однієї змінної

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \leq x_1 \\ f_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ f_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ f_n(x), & x \geq x_n \end{cases}, \text{ де } f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n-1$$

запропоновано наступний спосіб обчислення

$$f(x) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1)) + \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(x_i + \Pi(x, x_i, x_{i+1} - x_i)) - f_i(x_i)] + [f_n(x_n + Q(x, x_n)) - f_n(x_n)], \quad (3)$$

$$\text{де } Q(x, a) = \frac{1}{2}(x - a + |x - a|), Q_l(x, a) = \frac{1}{2}(x - a - |x - a|) \text{ і} \quad (4)$$

$$\Pi(x, a, w) = \frac{1}{2}(w + |x - a| - |x - a - w|), w > 0.$$

Формулу (3) можна поширити на неперервні функції двох змінних  $f(x, y)$ , які визначені різними аналітичними виразами  $f_i(x, y)$  на різних ділянках  $x \leq x_1, x_i \leq x \leq x_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $x \geq x_n$  зміни першого аргументу

$$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y), & x \leq x_1 \\ f_1(x, y), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ f_{n-1}(x, y), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ f_n(x, y), & x \geq x_n \end{cases} \quad (5)$$

Функція  $f(x, y)$  буде неперервною, коли  $f_i(x_{i+1}, y) = f_{i+1}(x_{i+1}, y)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  при всіх можливих  $y$ . Тоді справедливе наступне

**Твердження 2.** Шматкову функцію  $f(x, y)$  двох змінних, задану виразом (5), можна обчислювати наступним чином

$$f(x, y) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1), y) + \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(x_i + \Pi(x, x_i, x_{i+1} - x_i), y) - f_i(x_i, y)] + [f_n(x_n + Q(x, x_n), y) - f_n(x_n, y)] \quad (6)$$

Її обґрунтування повторює доведення формули (3), яка перевіряється на кожній окремій ділянці зміни аргумента  $x$ . Лише слід пам'ятати, що умови неперервності  $f_i(x_{i+1}, y) = f_{i+1}(x_{i+1}, y)$  тепер повинні виконуватися між функціями.

До того ж, якщо всі  $f_i(x, y)$  є ідентифікаторами деяких фігур  $\Phi_i$  на площині  $XU$ , які неперервно стикаються на вертикальних відрізках  $x = x_i$ , то функція  $f(x, y)$ , побудована за формулою (6), буде ідентифікатором об'єднаної фігури, складеної з ділянок  $\Phi_i$ , що потрапляють у відповідні смуги  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ . Дійсно, прямими  $x = x_i$  вся площина  $XU$  розбиватиметься на дві півплощини

$\Omega_0: x \leq x_1$ ,  $\Omega_n: x \geq x_n$ , і  $n - 1$  смуг  $\Omega_i: x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . В кожній з  $\Omega_i$  функція  $f(x, y)$  співпадатиме з відповідною  $f_i(x, y)$ , яка буде додатною в  $\Phi_i \cap \Omega_i$  (частині  $\Phi_i$ , що потрапляє в  $\Omega_i$ ), негативною зовні неї (в смузі  $\Omega_i$ , але зовні  $\Phi_i$ ), і дорівнюватиме нулю на ділянці межі фігури  $\Phi_i$ , що потрапляє в смугу  $\Omega_i$ . Тому  $f(x, y)$  буде ідентифікатором фігури  $\Phi = \bigcup_{i=0}^n (\Phi_i \cap \Omega_i)$ , складеної з частин  $\Phi_i$ . При чому межі фігур  $\Phi_i$  не повинні потрапляти на ділянки прямих  $x = x_i$  (дозволяється перетинання цих прямих лініями контурів, або торкання до них). Це потрібно для того, щоб  $f(x, y)$  не оберталася на нуль всередині складеної фігури  $\Phi$ . Таким чином, виконується наступне

**Твердження 3.** Якщо функції  $f_i(x, y)$  є ідентифікаторами деяких фігур  $\Phi_i$  на площині  $XY$  і  $f_i(x_{i+1}, y) = f_{i+1}(x_{i+1}, y)$ , то функція, утворена за формулою (6), буде ідентифікатором області  $\Phi = \bigcup_{i=0}^n (\Phi_i \cap \Omega_i)$ , складеної з частин  $\Phi_i$ , які потрапляють в «смуги»  $\Omega_i$ .

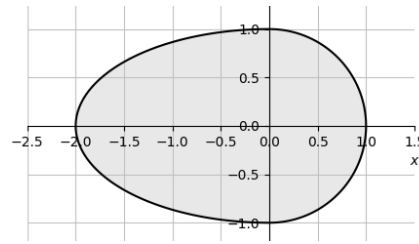
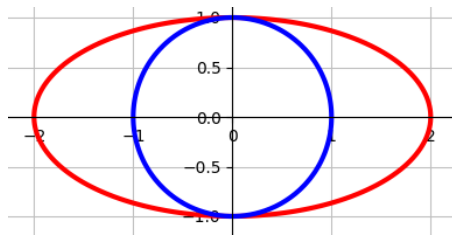
*Зауваження.* Зазвичай в твердженні 3 вважається, що фігури  $\Omega_i$  з ідентифікаторами  $f_i(x, y)$  ширщі за смуги  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ . Якщо ж  $\Omega_i$  цілком потрапляють в смуги  $x_i < x < x_{i+1}$ , то формула (6) конструюватиме ідентифікатор єдиної фігури, складеної з нез'єднаних фігур  $\Omega_i$  (також лише при виконанні умов  $f_i(x_{i+1}, y) = f_{i+1}(x_{i+1}, y)$ ).

**Окремі випадки формули (6).**

$n = 1$	$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y), & x \leq x_1 \\ f_1(x, y), & x \geq x_1 \end{cases}, \quad f_0(x_1, y) = f_1(x_1, y).$ $f(x, y) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1), y) + f_1(x_1 + Q(x, x_1), y) - f_1(x_1, y)$	(7)
$n = 2$	$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y), & x \leq x_1 \\ f_1(x, y), & x_1 \leq x \leq x_2, \quad f_0(x_1, y) = f_1(x_1, y) \\ f_2(x, y), & x \geq x_2, \quad f_1(x_2, y) = f_2(x_2, y). \end{cases}$ $f(x, y) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1), y) +$ $+ f_1(x_1 + \Pi(x, x_1, x_2 - x_1), y) - f_1(x_1, y) +$ $+ f_2(x_2 + Q(x, x_2), y) - f_2(x_2, y).$	(8)
$n = 2$	$f(x, y) = \begin{cases} f_0(x, y), & x \leq x_1 \\ f_1(y), & x_1 \leq x \leq x_2, \text{ де } f_1(y) = f_0(x_1, y) = f_2(x_2, y), \\ f_2(x, y), & x \geq x_2 \end{cases}$ $f(x, y) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1), y) + f_2(x_2 + Q(x, x_2), y) - f_2(x_2, y)$	(9)

Остання формула (9) прямує з (8) (середній доданок в (8) обертається на нуль) і конструє ідентифікатор фігури, яка при умові  $f_0(x_1, y) = f_2(x_2, y)$  на ділянці  $x_1 \leq x \leq x_2$  є горизонтальною смугою, що з'єднує частини фігур  $\Phi_0: f_0(x, y) \geq 0 \wedge x \leq x_1$  та  $\Phi_2: f_2(x, y) \geq 0 \wedge x \geq x_2$ .

**Приклад 3.** На наступному рисунку ліворуч зображено дві початкові криві – еліпс та коло, а праворуч показана складена фігура – ліва частина межі якої є еліпсом, а права – колом.



Ідентифікаторами еліпса і кола є  $f_0(x, y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$  і  $f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ , при чому  $x_1 = 0$ . Оскільки  $f_0(0, y) = 1 - y^2 = f_1(0, y)$ , то формула (7) працює.


$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \left(1 - \frac{Q_l^2(x, 0)}{4} - y^2\right) + \left((1 - Q^2(x, 0) - y^2) - (1 - y^2)\right) = \\
 &= 1 - \frac{Q_l^2(x, 0)}{4} - y^2 - Q^2(x, 0) = \left| Q_l^2(x, 0) = \frac{x^2 - x|x|}{2}, Q^2(x, 0) = \frac{x^2 + x|x|}{2} \right| = \\
 &= 1 - \frac{x^2 - x|x|}{8} - \frac{x^2 + x|x|}{2} - y^2 = 1 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{8}x|x| - y^2.
 \end{aligned}$$

Код побудови попередніх графіків може бути наступним.

```

from sympy import symbols, Abs, S, simplify, Tuple
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
plt.close('all')
x, y, = symbols("x y")
W=1-5*x**2/8-3*x*Abs(x)/8-y**2 # ідентифікатор складеної фігури
we=1-x**2/4-y**2 # ідентифікатор еліпса
wc=1-x**2-y**2 # ідентифікатор кола
plot_implicit((we, (x, -2.5, 2.5), (y, -1.5, 1.5)),
              {"linewidths":3, "colors":'red', "cmap":None,}),
              (wc, (x, -2.5, 2.5), (y, -1.5, 1.5)),
              {"linewidths":3, "colors":'blue', "cmap":None,}),
              aspect=(1,1), axis_center=(0,0),
              legend=False, grid=True)
plot_implicit(W>0, (x, -2.5, 1.5), (y, -1.5, 1.5),
              {"alpha":0.5}, aspect=(1,1), axis_center=(0,0),
              color='lightgray', border_color="k",
              legend=False, grid=True)

```

**Приклад 4.** Розглянемо випадок застосування формули (9), коли праве коло зсунуто відносно еліпса, наприклад, на  $\Delta x = 1$ , і потрібно побудувати ідентифікатор фігури . Функціями ідентифікації еліпса і кола є  $f_0(x, y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$  та  $f_2(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - y^2$ . При чому  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  і  $f_0(0, y) = 1 - y^2 = f_2(1, y)$ , тобто  $f_1(y) = 1 - y^2$ . Отже формула (9) працює.

```

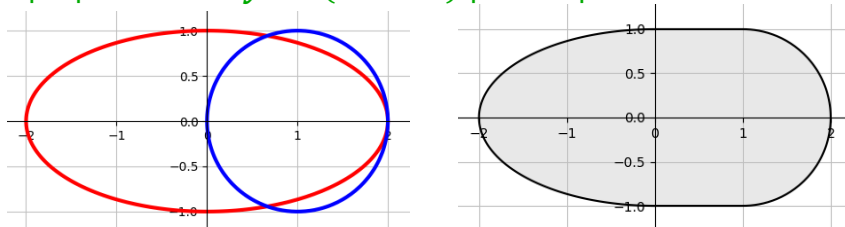
from sympy import symbols, Abs, S, simplify, \
init_printing, Wild, Eq
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit

```

```

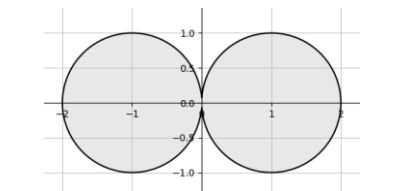
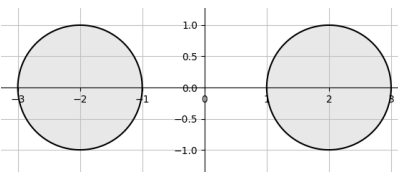
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x,y,= symbols("x y")
def Ql(x,a): return ((x-a)-Abs(x-a))/2
def Qr(x,a): return ((x-a)+Abs(x-a))/2
we=1-x**2/4-y**2 # ідентифікатор еліпса
wc=1-(x-1)**2-y**2 # ідентифікатор кола
W=we.subs(x,Ql(x,0))+wc.subs(x,1+Qr(x,1))-wc.subs(x,1)
plot_implicit((we,(x,-2.5,2.5),(y,-1.5,1.5)),
              {"linewidths":3,"colors":'red',"cmap":None,}),
              (wc,(x,-2.5,2.5),(y,-1.5,1.5)),
              {"linewidths":3,"colors":'blue',"cmap":None,}),
              aspect=(1,1),axis_center=(0,0),
              legend=False,grid=True)
plot_implicit(W>0,(x,-2.5,2.5),(y,-1.5,1.5),
              {"alpha":0.5},aspect=(1,1),axis_center=(0,0),
              color='lightgray',border_color="k",
              legend=False,grid=True)
# друкування ідентифікатора складеної фігури
k = Wild('q', properties=[lambda k: k.is_Number])
W=W.expand().replace(Abs(x-k)**2,(x-k)**2)
W=simplify(8*W).collect(Abs(x-k))
W_=symbols('W')
display(Eq(W_,W))
 $W = -5x^2 + x|x| + 8x - 8y^2 + (4 - 4x)|x - 1| + 4$ 

```



Нижче наведено ще кілька прикладів застосування формул (7) – (9). В таблиці надруковано ідентифікатори лівої і правої фігури, результівна функція ідентифікації, та побудовано відповідні фігури.

<pre> we=-x**2-y wc=-x-y W=we.subs(x,Ql(x,0))+   wc.subs(x,Qr(x,0))-wc.subs(x,0) <b><math>2 \cdot W = -x^2 - x - 2y + (x - 1) x </math></b> </pre>	
<pre> we=1-(x+2)**2-y**2 wc=1-(x-2)**2-y**2 x1,x2=-S(5)/4,S(5)/4 W=we.subs(x,x1+Ql(x,x1))+ \   wc.subs(x,x2+Qr(x,x2))-wc.subs(x,x2) <b><math>32 \cdot W = -32x^2 - 32y^2 + (11 - 4x) 4x - 5  +</math></b> <b><math>+ (4x + 11) 4x + 5  - 96</math></b> </pre>	

<p>Два кола торкаються в точці (0,0)</p> <pre>we=1-(x+1)**2-y**2 wc=1-(x-1)**2-y**2 W=we.subs(x,Ql(x,0))+   wc.subs(x,Qr(x,0))-wc.subs(x,0) W=-x<sup>2</sup>-y<sup>2</sup>+2 x </pre>	
<p>Два кола не торкаються.</p> <pre>we=1-(x+2)**2-y**2 # це f<sub>0</sub>(x,y) wc=1-(x-2)**2-y**2 # це f<sub>2</sub>(x,y) W=we.subs(x,Ql(x,0))+   wc.subs(x,Qr(x,0))-wc.subs(x,0) W=-x<sup>2</sup>-y<sup>2</sup>+4 x -3</pre>	

Щоб отримати ідентифікатор  $W$  фігури з двох нез'єднаних кіл, вертикальні прямі  $x = x_1, x = x_2$  (див. формулу (9)), не повинні пересікати або торкатися кіл (ми обрали  $x_1 = x_2 = 0$ ) і, крім того, абсциси  $x_1, x_2$  ( $x_1 \leq x_2$ ) повинні задовольняти умові  $f_0(x_1, y) = f_2(x_2, y)$ . Зауважимо, що торкання теж не повинно бути. Якщо, наприклад, при побудові  $W$  використати  $x_1 = -1, x_2 = 1$  ( $f_0(-1, y) = f_2(1, y) = -y^2$ ), і застосувати підстановки

$$W = we.subs(x, -1 + Ql(x, -1)) + wc.subs(x, 1 + Qr(x, 1)) - wc.subs(x, 1)$$

то інструкція

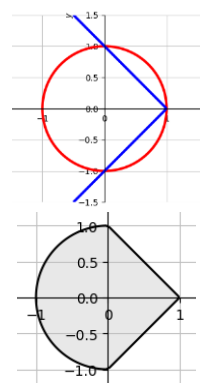
```
plot_implicit(W>0, (x, -3.5, 3.5), (y, -1.5, 1.5), ...)
```

побудує той же (останній) графік, але це буде неправильно. При візуалізації функція `plot_implicit()` «загубить» відрізок  $y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1$ , що з'єднує два кола (на ньому  $W(x, y) = 0$ , а вище і нижче  $W(x, y) < 0$ ). У випадку підстановки, яка застосована в таблиці, цього відрізка в множині  $W(x, y) \geq 0$  немає.

Зауважимо також, що коли умови неперервності шматкової функції (6) не виконуються, то результувна фігура буде складнішою ніж каже твердження 3. Ось один такий приклад.

Фігуру, яка в лівій півплощині співпадає з колом, а в правій – з кутом, при ідентифікаторах  $f_0(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ ,  $f_1(x, y) = 1 - x - |y|$  за формулою (7) створити неможливо, бо умова неперервності не справджується  $f_0(0, y) \neq f_1(0, y)$ .

Але, якщо покласти  $f_0(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , то умова  $f_0(0, y) = f_1(0, y)$  виконуватиметься, і формулу (7) можна застосувати.



Аналоги формул (6) - (9) можна записати для функцій ідентифікації  $\phi(x, y)$ , які задано різними виразами  $\phi_i(x, y)$  в горизонтальних смугах  $\Theta_i : y_i \leq y \leq y_{i+1}$ . Наприклад, для неперервної функції

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_0(x, y), & y \leq y_1 \\ \phi_1(x, y), & y \geq y_1 \end{cases}, \quad \phi_0(x, y_1) = \phi_1(x, y_1),$$

що задана різними виразами в півплощинах  $y \leq y_1$  та  $y \geq y_1$ , матимемо

$$\phi(x, y) = \phi_0(x, y_1 + Q_l(y, y_1)) + \phi_1(x, y_1 + Q(y, y_1)) - \phi_1(x, y_1) \quad (10)$$

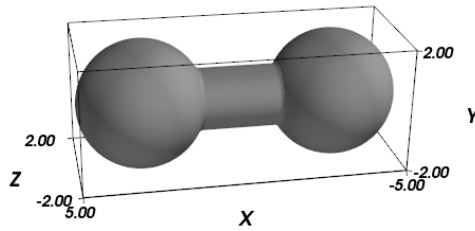
Аналоги формул (6) - (9) можна записати для тривимірного випадку. Для прикладу розглянемо еквівалент формули (9). Якщо є два тіла з ідентифікаторами  $f_0(x, y, z)$  і  $f_2(x, y, z)$ , при чому  $f_0(x_1, y, z) = f_2(x_2, y, z)$  ( $x_1 < x_2$ ), то ідентифікатор «труби», яка ліворуч обмежена частиною тіла  $\Phi_0: f_0(x, y, z) \geq 0 \wedge x \leq x_1$ , а праворуч –  $\Phi_2: f_2(x, y, z) \geq 0 \wedge x \geq x_2$ , може мати вигляд

$$f(x, y, z) = f_0(x_1 + Q_l(x, x_1), y, z) + f_2(x_2 + Q(x, x_2), y, z) - f_2(x_2, y, z) \quad (11)$$

**Приклад 5.** Побудувати ідентифікатор тіла у формі гантелі та візуалізувати його. Для цього можна використати ідентифікатори двох розсунутих куль, до яких застосувати формулу (11).

```
from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, simplify, S, lambdify, \
    init_printing, Wild, Eq

from spb import plot_implicit
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
plt.close('all')
init_printing(use_latex=True)
x, y, z = symbols('x y z', real=True)
def Ql(x, a): return ((x-a)-Abs(x-a))/2
def Qr(x, a): return ((x-a)+Abs(x-a))/2
# ідентифікатори куль
wl=4-(x+3)**2-y**2-z**2
wr=4-(x-3)**2-y**2-z**2
# перевірка умови  $f_0(x_1, y, z) = f_2(x_2, y, z)$ 
x1, x2 = -S(5)/4, S(5)/4
print(wl.subs(x, x1) == wr.subs(x, x2))
True
# конструювання ідентифікатора тіла
W = wl.subs(x, x1 + Ql(x, x1)) + wr.subs(x, x2 + Qr(x, x2)) - wr.subs(x, x2)
W = W.expand().simplify()
# візуалізація поверхні тіла
F = lambdify((x, y, z), W, 'numpy')
X, Y, Z = np.mgrid[-8:8:201j, -3:3:201j, -3:3:201j]
W3d = F(X, Y, Z)
fig = mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
c3d = mlab.contour3d(X, Y, Z, W3d,
    contours=[0], color=(0.5, 0.5, 0.5))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



```
# друкування функції ідентифікації
k = Wild('k',properties=[lambda k: k.is_Number])
a = Wild('a',properties=[lambda a: a.is_Number])
W=simplify(32*W).collect(Abs(a*x-k))      # множник 32 несуттєвий
W_=symbols('W')
display(Eq(W_,W))
 $W = -32x^2 - 32y^2 - 32z^2 + (19 - 4x)|4x - 5| + (4x + 19)|4x + 5| - 160$ 
```

*Зауваження 1.* Застосовуючи функції  $Q(x, a)$  та  $Q_l(x, a)$  можна конструювати вирази, які будуть обертатися на нуль не на межі, а в області «солідної» фігури. Дійсно, якщо фігура має ідентифікатор  $\omega(x, y)$ , то вираз  $Q_l(\omega(x, y), 0)$  обертатиметься на нуль в її середині, а  $Q(\omega(x, y), 0)$  – зовні.

*Зауваження 2.* Можна сконструювати функцію «ідентифікації»  $\omega_C(x, y)$  кривої  $C: y = f(x)$ . Нею буде  $\omega_C(x, y) = -|y - f(x)|$ . Вона дорівнюватиме нулю в точках лінії і буде негативної в інших точках площини. Але крива не є «солідним» об'єктом (у неї нульова площа). Тому функцію  $\omega_C(x, y)$  не можна застосовувати як ідентифікатор фігур. До того ж, «пітонівські» процедури, такі як `plot_implicit(Wc, ...)`, не вміють подібні функції візуалізувати (спробуйте).

#### 4.5. Додаткові способи формоутворення просторових тіл.

**Тіла обертання.** Якщо розташована в позитивній півплощині  $XZ$  ( $x \geq 0$ ) крива  $F(x, z) = 0$ ,  $y = 0$  обертається навколо осі  $Z$ , то рівняння утвореної нею поверхні має вигляд

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (1)$$

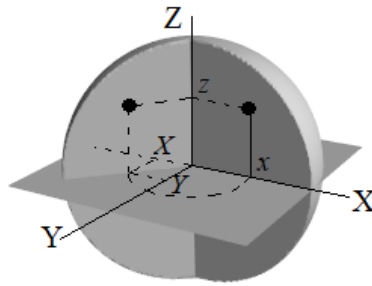
Аналогічно, рівняння  $F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$  визначає поверхню, утворену обертанням навколо осі  $X$  кривої  $F(x, y) = 0, z = 0$ ; рівняння  $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$  – поверхню обертання тієї ж кривої навколо осі  $Y$ . Виходячи з (1), має місце наступна

**Лема 1.** Нехай в площині  $XZ$  функція  $\omega(x, z)$  є ідентифікатором фігури  $\Phi$ . Якщо обрати її частину, що розташована в зоні  $x \geq 0$  і обернути навколо осі  $Z$ , то вийде тіло обертання. Його функцією ідентифікації буде

$$W(x, y, z) = \omega(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \quad (2)$$

*Доведення.* Позначимо координати точок в площині  $XZ$  через  $(x, z)$ , а координати довільної точки в просторі через  $X, Y, Z$ . Нехай ідентифікатором твірної фігури  $\Phi$  є  $\omega(x, z)$ , а частину  $\Phi$ , розташовану в «позитивній» півплощині  $XZ$  ( $x \geq 0$ ), позначимо через  $\Phi_+$  (це може бути  $\Phi$  цілком).





Всередині тривимірного тіла  $\Sigma$ , утвореного обертанням фігури  $\Phi_+$ , візьмемо довільну точку. Її відстань до осі  $Z$  з одного боку буде  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ , а з іншого –  $x$  ( $x, z \in$  координатами відповідної точки на фігурі  $\Phi_+$ ). Тоді з (2) випливає, що  $W(X, Y, Z) = \omega(x, z) > 0$ . Очевидно, що для точок поверхні тіла  $W(X, Y, Z) = \omega(x, z) = 0$ , а для зовнішніх точок  $W(X, Y, Z) < 0$ . Тобто  $W(X, Y, Z)$  є функцією ідентифікації. Оскільки  $\sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0$ , то  $\omega(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)$  набуватиме значень  $\omega(x, z)$ , які відповідають лише точкам «позитивної» частини  $\Phi_+$  фігури  $\Phi$ . ■

Аналогічно для фігури, розташованій в півплощині  $y \geq 0$  площини  $XY$ , яка має функцію ідентифікації  $\omega(x, y)$ , ідентифікатор тіла її обертання навколо осі  $X$  матиме вигляд  $\omega(x, \sqrt{y^2 + z^2})$ , а ідентифікатором тіла обертання частини тієї ж фігури з півплощини  $x \geq 0$  навколо осі  $Y$  буде  $\omega(\sqrt{x^2 + z^2}, y)$ .

**Приклад 1.** Використовуючи формулу (2), побудувати неявне рівняння поверхні обертання квадрата  $2 - |x - 1| - |z| = 0, y = 0$  навколо осі  $Z$  і візуалізувати отримане тіло.

Розв'язання.

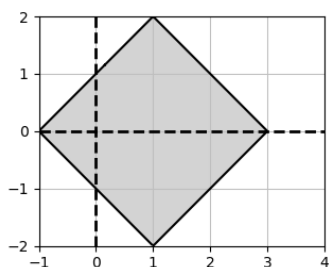
```

from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import symbols, Abs, simplify, sqrt, lambdify
from spb import plot_implicit
import numpy as np
from mayavi import mlab
mlab.close(all=True)
plt.close('all')
x, y, z = symbols('x y z')
w1=2-Abs(x-1)-Abs(z) # функція ідентифікації зсунутого квадрата
p1=plot_implicit(w1>0, (x, -1, 4), (z, -2, 2), aspect=(1, 1),
    border_color='k', n=200, color='lightgray',
    show=False, grid=True, legend=False)
p2=plot_implicit(
    (x, (x, -1, 4), (z, -2, 2)), {«linewidths»:2, «linestyles»: '-'},
    (z, (x, -1, 4), (z, -2, 2)), {«linewidths»:2, «linestyles»: '-'},
    aspect=(1, 1), color='k', show=False)
(p1+p2).show()
w3d=w1.subs(x, sqrt(x**2+y**2))
F=lambdify((x, y, z), w3d, 'numpy')
X, Y, Z = np.mgrid[-4:4:201j, -4:4:201j, -2:2:201j]
W=F(X, Y, Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))

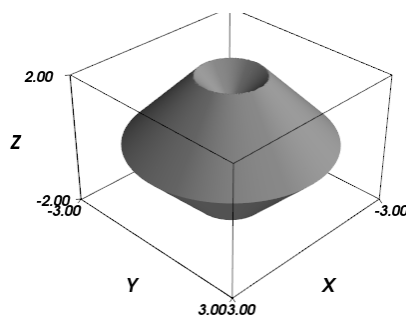
```



```
c3d=mlab.contour3d(X,Y,Z,W, contours=[0],color=(0.5,0.5,0.5))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



Твірна фігура



Тіло обертання

Якщо двовимірна фігура  $\Phi$  не перетинає вісь  $Z$ , то створюватиметься тороподібне тіло.

**Приклад 2.** Використовуючи формулу (2), побудувати функцію ідентифікації тіла обертання квадрата  $[2,4] \times [-1,1]$  з площини  $YZ$  навколо осі  $Z$ , і візуалізувати отримане тіло.

Розв'язання.

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols,Abs,simplify,sqrt,lambdify
mlab.close(all=True)
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
x,y,z = symbols(«x y z»)
```

Для конструювання ідентифікатора твірного квадрата застосуємо лему 1 п. 4.1.1.

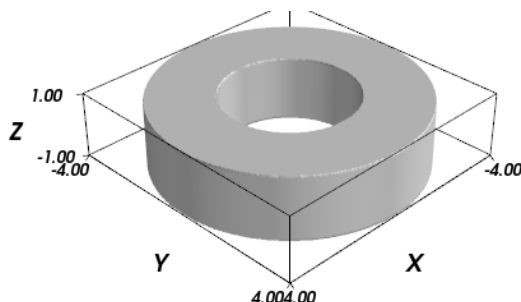
```
w1=1-Abs(y-3)
w2=1-Abs(z)
w12=ir(w1,w2) # ідентифікатор квадрата в площині YZ
```

Ідентифікатор тіла обертання будемо за формулою (2).

```
w3d=w12.subs(y,sqrt(x**2+y**2))
```

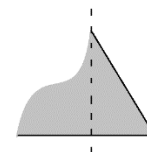
Виконуємо візуалізацію.

```
F=lambdify((x,y,z),w3d,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-5:5:251j,-5:5:251j,-2:2:81j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



**Приклад 3.** Сконструювати неявне рівняння поверхні кругового конуса з віссю вздовж осі Z і основою в площині XY, та виконати візуалізацію.

Розв'язання. Конус можна побудувати як тіло обертання навколо осі Z частини кута, що розташована в півплощині  $x \geq 0$  площини XZ.



```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, simplify, sqrt,
                                lambdify, S, init_printing
from IPython.display import display
init_printing(use_latex=True)
mlab.close(all=True)
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/2
x,y,z = symbols(«x y z»)
```

Для конструювання ідентифікатора твірного кута застосуємо формулу (3) п. 4.1.1.

```
w1=3-3*x-z
```

```
w2=z
```

```
w12=ir(w1,w2)
```

# ідентифікатор кута

Ідентифікатор тіла обертання будемо за формулою (2).

```
w3d=w12.subs(x,sqrt(x**2+y**2))
```

Надрукуємо отриманий вираз (множник 2 несуттєвий).

```
display(2*w3d)
```

$$3 - 3\sqrt{x^2 + y^2} - |2z + 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3|$$

Виконуємо візуалізацію.

```
F=lambdify((x,y,z),w3d,'numpy')
```

```
X,Y,Z = np.mgrid[-2:0.5:201j,-2:2:201j,-1:4:101j]
```

```
W=F(X,Y,Z)
```

```
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
```

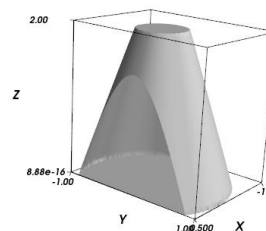
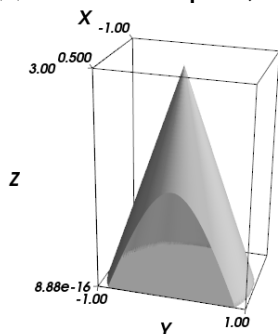
```
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.7,0.7,0.7))
```

```
mlab.outline()
```

# наступний рисунок ліворуч

```
mlab.axes()
```

При побудові графіка, щоб зазирнути всередину конуса, ми звузили інтервал зміни координати  $x \in [-2, 0.5]$ .



Оскільки за формулою (2) будуються функції ідентифікації, то їх можна використовувати так само, як і будь-які ідентифікатори. Наприклад, для

побудови неявного рівняння зрізаного конуса в продовження попереднього сценарію введіть наступні інструкції

```
w4=2-z # ідентифікатор півпростору z ≤ 2
w14d=ir(w3d,w4) # ідентифікатор зрізаного конуса
F=lambdify((x,y,z),w14d,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-2:0.5:201j,-2:2:201j,-1:4:101j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.7,0.7,0.7))
mlab.outline() # попередній рисунок праворуч
mlab.axes()
```

**Тіла переносу.** Поверхню, отримувану паралельним перенесенням кривої  $\Gamma_1$ , фіксована точка  $M_0$  якої ковзять по кривій  $\Gamma_2$ , називають поверхнею переносу. Зазвичай працюють з параметричними рівняннями таких поверхонь. Якщо рівнянням кривої  $\Gamma_1 \in \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}(u)$ , а рівнянням  $\Gamma_2 \in \mathbf{r}_2 = \mathbf{b}(v)$ , то рівнянням поверхні переносу буде  $\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(v) - \mathbf{a}(u_0)$ , де  $\mathbf{a}(u_0) = \mathbf{b}(v_0)$  – радіус-вектор точки  $M_0$ .

Вздовж кривої  $\Gamma_2$  можна паралельно переносити плоску фігуру. Тоді ми отримаємо тіло переносу, для якого виконуватиметься

**Твердження 1.** Нехай фігура  $\Omega$ , що переноситиметься, розташована в площині XY і має ідентифікатор  $\omega_\Omega(x, y)$ , а рівняння кривої перенесення  $\Gamma_2$  віднесено до координати  $z$ , тобто  $\mathbf{b}(z) = (b_x(z), b_y(z), z)$  при чому  $b_x(0) = 0, b_y(0) = 0$ . Тоді функція

$$W(x, y, z) = \omega_\Omega(x - b_x(z), y - b_y(z)) \quad (3)$$

буде ідентифікатором нескінченного вздовж Z тіла переносу (циліндра або «труби» з перерізами площинами паралельними XY у формі  $\Omega$ ).

**Доведення.** На висоті  $z$  в площині, паралельній XY, переріз тіла є зсунутою на вектор  $(b_x(z), b_y(z))$  фігурою  $\Omega_z$ . Для неї, відповідно до твердження 1 п. 4.3, ідентифікатором є функція  $\omega_\Omega(x - b_x(z), y - b_y(z))$ , яка позитивна в розглядуваному перерізі  $\Omega_z$  і негативна зовні нього. Для будь-якої точки  $(x, y, z_0)$  простору  $W(x, y, z_0)$  співпадатиме з відповідною функція  $\omega_\Omega(x - b_x(z_0), y - b_y(z_0))$ , а отже, задовольнятиме всім вимогам, що висуваються до функцій ідентифікації (позитивність всередині тіла, нуль – на межі, негативність зовні). ■

Для побудови функції ідентифікації тіла переносу скінченної довжини, до циліндра можна застосувати операцію перетину з просторовим шаром  $z_1 \leq z \leq z_2$ , ідентифікатором якого є  $\omega_Z(z) = \frac{z_2 - z_1}{2} - \left| z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|$ .

**Наслідок 1.** Нехай фігура  $\Omega$ , що переноситься, розташована в площині XY і має ідентифікатор  $\omega_\Omega(x, y)$ . Функція ідентифікації тіла переносу  $\Omega$  вздовж кривої

$\mathbf{b}(z) = (b_x(z), b_y(z), z)$  (де  $b_x(0) = 0, b_y(0) = 0$ ), яке вирізається шаром  $z_1 \leq z \leq z_2$ , може мати вигляд

$$W(x, y, z) = ir \left( \omega_\Omega \left( x - b_x(z), y - b_y(z) \right), \omega_z(z) \right), \quad (4)$$

де  $\omega_z(z) = \frac{z_2 - z_1}{2} - \left| z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|$ .

**Наслідок 2.** Якщо перенесення виконується вздовж вектора  $a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j} + c \cdot \mathbf{k}$ , то рівняння кривої переносу  $\Gamma_2$  можна записати у вигляді  $\frac{a}{c}z \cdot \mathbf{i} + \frac{b}{c}z \cdot \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , і ідентифікатором нескінченного циліндра буде  $\omega_c(x, y, z) = \omega_\Omega \left( x - z \frac{a}{c}, y - z \frac{b}{c} \right)$ , а для скінченного тіла, утворюваного перетином циліндра і шару  $z_1 \leq z \leq z_2$ , ідентифікатором буде

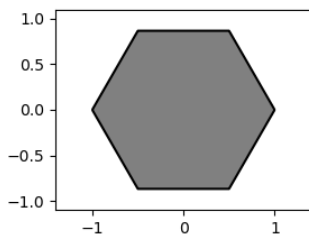
$$W(x, y, z) = ir \left( \omega_\Omega \left( x - z \frac{a}{c}, y - z \frac{b}{c} \right), \omega_z(z) \right). \quad (5)$$

**Приклад 4.** Генерувати функцію ідентифікації правильної шестикутної призми, яка розташована в шарі  $0 \leq z \leq 2$ , та візуалізувати її.

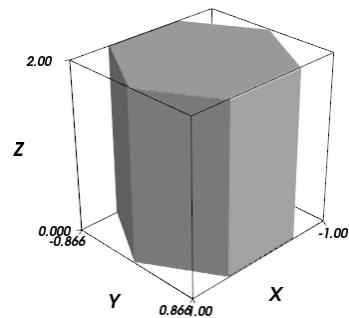
Розв'язання. Ідентифікатор  $\omega_6(x, y)$  правильного шестикутника конструювався в прикладі 3 п. 4.1.5. В наступному коді ми повторимо ці операції і використаємо формулу (5) при  $a = 0, b = 0$  (перенесення вертикально вгору). Тому  $W(x, y, z) = ir(\omega_6(x, y), \omega_z(z))$ .

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, lambdify, sqrt, S
from matplotlib import pyplot as plt
from spb import plot_implicit
def ir(u,v):
    # виконавча функція операції перетину
    return (u+v-Abs(u-v))/S(2)
def layer(z,z1,z2):
    # функція ідентифікації шару z1<=z<=z2
    return (z2-z1)/2-Abs(z-(z1+z2)/2)
x,y,z = symbols("x y z")
w1=sqrt(3)/2*(2-Abs(x+S(1)/2)-Abs(x-S(1)/2))-y
w2=y+sqrt(3)/2*(2-Abs(x+S(1)/2)-Abs(x-S(1)/2))
w6=ir(w1,w2)
# ідентифікатор шестикутника
wz=layer(z,S(0),S(2))
w3d=ir(w6,wz)
# ідентифікатор прямої призми
plot_implicit(w6>0, (x, -1.4, 1.4), (y, -1.1, 1.1),
    aspect=(1,1), border_color="k", n=200, color='gray',
    legend=False, grid=False)
F=lambdify((x,y,z), w3d, 'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-1:1:101j, -1:1:101j, -0.1:2.1:101j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W, contours=[0], color=(0.7,0.7,0.7))
mlab.outline()
```

`m\lab.axes()`



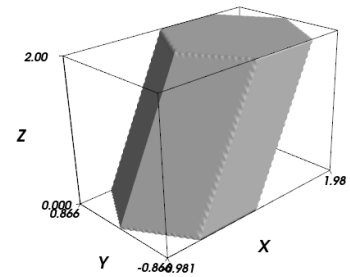
Твірна фігура



Тіло перенесення (призма)

Виконаємо перенесення того ж шестикутника вздовж вектора  $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{k}$  від площини  $z = 0$  до площини  $z = 2$ . Відповідно до (5), його ідентифікатором буде  $ir(\omega_6(x - z/2, y), \omega_z(z))$ . Щоб не повторювати більшу частину попереднього коду, нижче наведено лише зображення результтивного тіла і виразів, використаних для побудови проміжних і завершального ідентифікаторів.

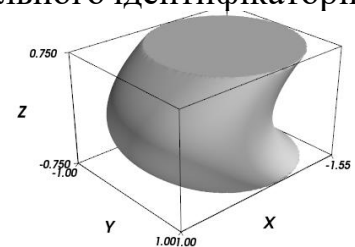
```
w1=sqrt(3)/2*  
    (2-Abs(x+S(1)/2)-Abs(x-S(1)/2))-y  
w2=y+sqrt(3)/2*  
    (2-Abs(x+S(1)/2)-Abs(x-S(1)/2))  
w6=ir(w1,w2) # ідентифікатор шестикутника  
w6z=w6.subs(x,x-z/2) # ідентифікатор  
# нескінченної призми  
wz=layer(z,S(0),S(2))
```



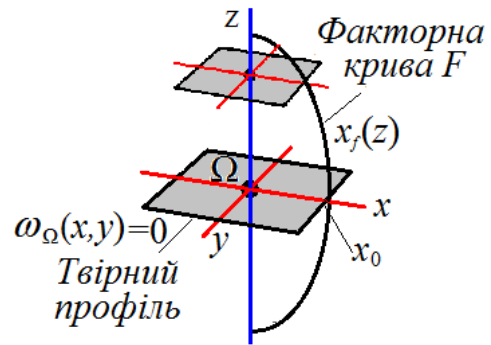
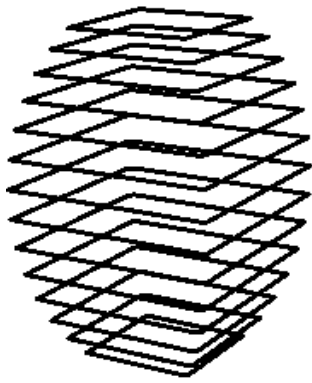
```
w3d=ir(w6z,wz) # ідентифікатор скінченної призми
```

Звісно, що кривою переносу може бути не пряма лінія. Наприклад, побудуємо функцію ідентифікації тіла, отриманого перенесенням одиничного кола з площини XY по параболі  $x = -z^2$  від площини  $z = -3/4$  до площини  $z = 3/4$ . Аналогічно до попереднього, наведемо лише зображення результтивного тіла і виразів, використаних при побудові проміжних і завершального ідентифікаторів.

```
w1=1-x**2-y**2  
w1z=w1.subs(x,x+z**2) # ідентифікатор  
# нескінченної «труби»  
wz=layer(z,S(-3)/4,S(3)/4)  
w3d=ir(w1z,wz) # ідентифікатор тіла
```



**Тіла пропорційних поперечних перерізів з прямолінійною віссю.** Поверхнею пропорційних поперечних перерізів [3] зветься поверхня, перерізи якої паралельними площинами є подібними кривими пропорційних розмірів. Наприклад, всі перерізи можуть бути квадратами (твірний профіль), як показано на наступному рисунку ліворуч.



Якщо поперечні перерізи тіла  $\Sigma$  мають подібну форму, але різні розміри, то всі вони пропорційні одній основній твірній фігурі  $\Omega$ , яку оберемо в площині  $XY$ , і абсцису перетину якої з віссю  $X$  позначимо через  $x_0$  (контур  $\Omega$  не обов'язково лежатиме на поверхні тіла, він тільки визначатиме форму перерізів). Ми розглядатимемо лише такі поверхні і обмежувані ними тіла, які утворюються паралельним рухом «масштабованого» твірного профілю  $\Omega$  без повороту так, що його базова точка  $(0,0)$  (центр масштабування) прямуватиме вздовж осі  $Z$ .

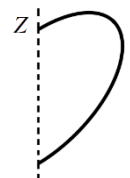
Нехай лінія перетину поверхні  $\Sigma$  з площиною  $XZ$  задається кривою  $F$  (факторна або напрямна лінія) з явним рівнянням  $x = x_f(z)$  в цій площині. Позначимо ідентифікатор твірного профілю через  $\omega_\Omega(x, y)$ . В площині  $z = z_0$  ідентифікатор  $\omega_\Omega^{z_0}(x, y)$  перерізу визначатиметься масштабним коефіцієнтом  $k(z) > 0$  (див. наслідок з твердження 2 п. 4.3), який, очевидно, залежатиме від координати  $z$ . Тобто  $\omega_\Omega^{z_0}(x, y) = \omega_\Omega(x/k(z_0), y/k(z_0))$ . При чому зрозуміло, що  $k(z)$  буде пропорційним абсцисі точки кривої  $F$  на цій висоті, тобто  $k(z_0) = \alpha \cdot x_f(z_0)$ . Оскільки твірний профіль  $\Omega$  перетинає вісь  $X$  в точці з абсцисою  $x_0$ , а пропорційний йому «екваторіальний» переріз  $z = 0$  в перетині з віссю  $X$  повинен мати абсцису  $x_f(0)$ , то для масштабного коефіцієнту отримуємо співвідношення  $x_0 \cdot k(0) = x_f(0)$ , або  $x_0 \cdot \alpha \cdot x_f(0) = x_f(0)$ . Звідки  $\alpha = 1/x_0$ , тобто  $k(z) = x_f(z)/x_0$ . Отже, справджується наступна

**Лема 2.** Нехай  $\epsilon$  тіло  $\Sigma$  пропорційних поперечних перерізів, поверхня якого перетинає площину  $XZ$  по кривій  $F$  з рівнянням  $x = x_f(z) > 0, y = 0$ . Нехай також всі перерізи тіла площинами  $z = Const$  пропорційні фігурі  $\Omega$ , яка розташована в площині  $XY$ , перетинає вісь  $X$  в точці з абсцисою  $x_0$ , і має функцію ідентифікації  $\omega_\Omega(x, y)$ . Тоді функцією ідентифікації  $W(x, y, z)$  тіла  $\Sigma$  може бути

$$W(x, y, z) = \omega_\Omega(x \cdot x_0/x_f(z), y \cdot x_0/x_f(z)). \quad (6)$$

Таким чином, маючи ідентифікатор твірного профілю  $\omega_\Omega(x, y)$  та явне рівняння  $x = x_f(z)$  факторної кривої, за формулою (6) можна сконструювати ідентифікатор тіла пропорційних поперечних перерізів.

*Зауваження 1.* Криві, для яких не існує явного рівняння  $x = x_f(z)$ , наприклад, таких, які зображено праворуч, використовувати в якості факторних кривих неможливо, бо поперечні перерізи на різних висотах  $Z$  можуть мати різну топологію.





*Зауваження 2.* Оскільки масштабний коефіцієнт  $k(z) > 0$  повинен бути позитивним, то частини кривої  $x = x_f(z)$ ,  $y = 0$ , де  $x_f(z) < 0$ , в неявному рівнянні  $\omega_\Omega\left(x \cdot \frac{x_0}{x_f(z)}, y \cdot \frac{x_0}{x_f(z)}\right) = 0$  можуть створювати «паразитні» шматки поверхні.

*Зауваження 3.* При деяких  $z$  факторна крива може перетинати вісь  $Z$ , тобто можливо  $x_f(z) = 0$ , що приводить до ділення на нуль в формулі (6). Цю неприємність інколи можна подолати, якщо праву частину (6) доповнити невід'ємним множником  $(x_f(z))^\alpha$  з коректно підібраним ступенем  $\alpha > 0$  (він залежить від функції  $\omega_\Omega(x, y)$ ), тобто генерувати функцію ідентифікації  $W(x, y, z)$  за формулою

$$W(x, y, z) = (x_f(z))^\alpha \cdot \omega_\Omega(x \cdot x_0/x_f(z), y \cdot x_0/x_f(z)). \quad (7)$$

(нулі функції  $x_f(z)$  компенсують особливості в аргументах другого множника, або будуть розташовані на поверхні тіла  $\Sigma$ ).

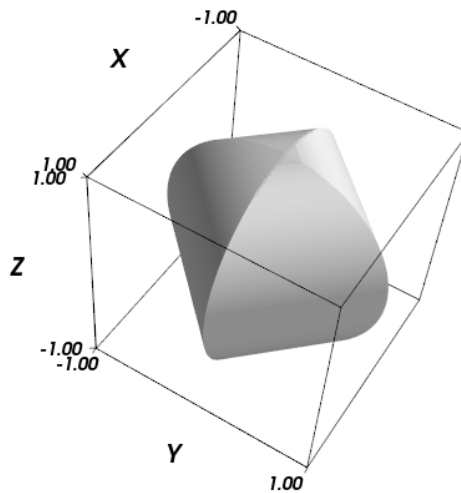
*Зауваження 4.* «Паразитні» ділянки поверхонь  $W(x, y, z) = 0$  (ті, що відповідають частинам факторної кривої  $x = x_f(z) < 0$ ,  $y = 0$ ) можуть не з'являтися. Але з'являючись, вони можуть відрізнитися у поверхонь, функції ідентифікації  $W(x, y, z)$  яких побудовані за формулами (6), (7).

**Приклад 5.** Нехай факторною кривою є півколо з рівнянням  $x = \sqrt{1 - z^2}$ , а твірним профілем квадрат з функцією ідентифікації  $\omega_\Omega(x, y) = 1 - |x| - |y|$ . Побудувати ідентифікатор відповідного тіла пропорційних поперечних перерізів і візуалізувати його.

*Розв'язання.* Застосовуючи формулу (7) при  $\alpha = 1$  і, враховуючи що  $x_0 = 1$ , отримуємо

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= \sqrt{1 - z^2} \cdot \left(1 - \left|\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}\right| - \left|\frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}\right|\right) = \\ &= \sqrt{1 - z^2} - |x| - |y|. \end{aligned}$$

```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, sqrt, lambdify
mlab.close(all=True)
x, y, z = symbols(«x y z»)
w3d=sqrt(1-z**2)-Abs(x)-Abs(y)
F=lambdify((x, y, z), w3d, 'numpy')
X, Y, Z = np.mgrid[-1:1:101j, -1:1:101j, -1:1:201j]
W=F(X, Y, Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X, Y, Z, W, contours=[0], color=(0.8, 0.8, 0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



*Зауваження.* Звісно, що при використанні діапазону по  $z$ , ширшого за  $[-1, 1]$ , програма може генерувати попередження.

*Зауваження 2.* Неважко зрозуміти, що функція  $W(x, y, z) = f(z) - |x| - |y|$  буде ідентифікатором тіла з квадратними поперечними перерізами і факторною кривою, рівня якої має вигляд  $x = f(z)$ .

**Приклад 6.** Нехай факторною кривою є кут з рівнянням  $x = 2 - |z|$ , а твірним профілем чотирикутник з вершинами в точках  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -2)$ . Побудувати функцію ідентифікації відповідного тіла пропорційних поперечних перерізів і візуалізувати його.

*Розв'язання.* Оскільки діагоналі чотирикутника розташовані на осях координат, то його функцію ідентифікації можна сконструювати за формулою (2) п. 4.4.1.

$$\begin{aligned} \omega_{\Omega}(x, y) &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{-1} \right) x - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{-2} \right) y - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{-1} \right) |x| - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{-2} \right) |y| = \\ &= 1 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} y - \frac{3}{4} |x| - \frac{3}{4} |y|. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу (7) при  $\alpha = 1$  і, враховуючи що  $x_0 = 2$ , отримуємо

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= (2 - |z|) \cdot \omega_{\Omega} \left( \frac{2x}{2 - |z|}, \frac{2y}{2 - |z|} \right) = \\ &= 2 - |z| + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y - \frac{3}{2} |x| - \frac{3}{2} |y|. \end{aligned}$$

Оскільки факторна і твірна криві перетинаються в точці  $(2, 0, 0)$ , то «екватор» фігури (лінія перетину з площиною  $XY$ ) співпадає з твірним профілем.

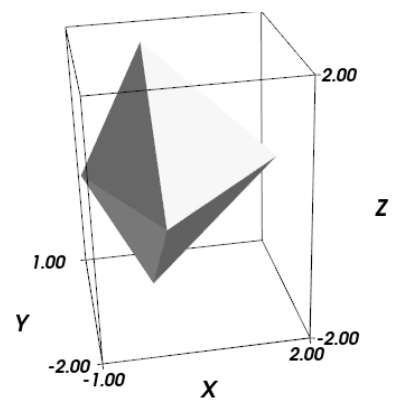
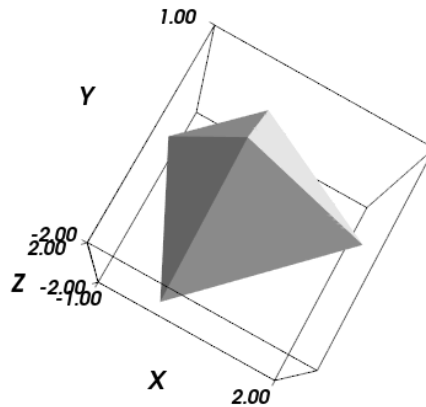
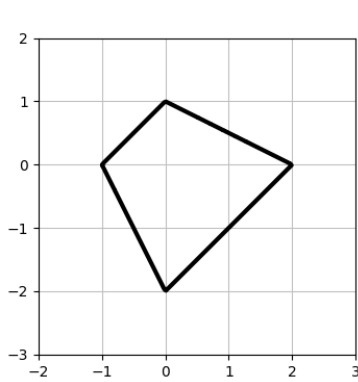
```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, sqrt, lambdify
from spb import plot_implicit
x, y, z = symbols(«x y z»)
wb=1+x/4-y/4-3/4*Abs(x)-3/4*Abs(y) # ідентифікатор чотирикутника
plot_implicit(wb, (x, -2, 3), (y, -3, 2), # наступний рисунок ліворуч
              {«linewidths»:3},
              aspect=(1,1), n=200, color='k',
              legend=False, grid=True)
```



```

w3d=2-Abs(z)+x/2-y/2-3/2*Abs(x)-3/2*Abs(y) # ідентифікатор тіла
F=lambdify((x,y,z),w3d,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-2:2:101j,-2:2:101j,-2:2:201j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()

```



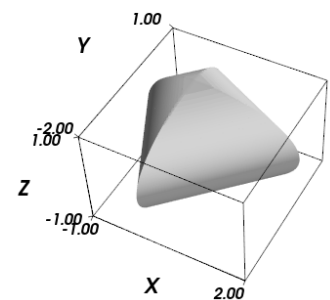
На попередньому рисунку твірна крива  $\omega_{\Omega}(x, y) = 1 + \frac{x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{3}{4}|x| - \frac{3}{4}|y| = 0$  показана ліворуч, а в центрі і праворуч зображено одну і ту ж поверхню пропорційних поперечних перерізів, тільки з різних кутів зору. ■

Якщо факторна крива – півколо  $x = \sqrt{4 - z^2}$ , твірний профіль такий, як в попередньому прикладі, то тіло пропорційних поперечних перерізів матиме функцію ідентифікації

$$\begin{aligned}
 W_0(x, y, z) &= \sqrt{4 - z^2} \cdot \omega_{\Omega}\left(\frac{2x}{\sqrt{4 - z^2}}, \frac{2y}{\sqrt{4 - z^2}}\right) = \\
 &= \sqrt{4 - z^2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}|x| - \frac{3}{2}|y|.
 \end{aligned}$$

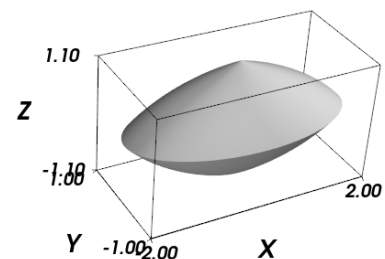
Стиснемо це тіло вздовж Z в два рази. Для цього в функції  $W_0(x, y, z)$  змінну z розділимо на факторний множник  $k_z = \frac{1}{2}$ . Результівне тіло матиме функцію ідентифікації

$$W(x, y, z) = \sqrt{4 - 4z^2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}|x| - \frac{3}{2}|y|.$$



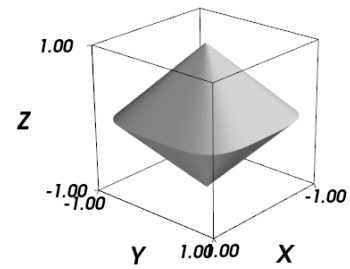
**Вправа 1.** Побудувати функцію ідентифікації тіла, факторна крива якого задана рівнянням  $x = 3 - e^{|z|}, y = 0$ , а твірна є еліпсом  $1 - \sqrt{x^2/4 + y^2} = 0$  (тут  $x_0 = 2$ ).

Відповідь:  $W(x, y, z) = 3 - e^{|z|} - \sqrt{x^2 + 4y^2}$



**Вправа 2.** Побудувати функцію ідентифікації тіла, факторна крива якого задана рівнянням  $x = 1 - |z|, y = 0$ , а твірна – рівнянням  $1 - \sqrt{x^4 + y^4} = 0$ .

Відповідь:  $W(x, y, z) = 1 - |z| - \sqrt{x^4 + y^4}$

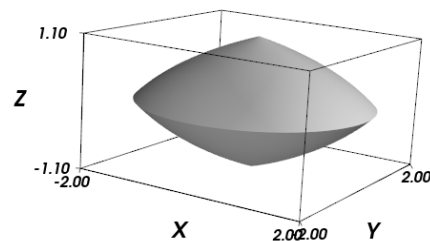
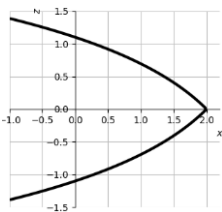


Лему 2 можна застосувати для побудови функції ідентифікації поверхні обертання кривої  $x = X(z), y = 0$  навколо осі Z. Для цього ідентифікатор твірного профілю можна обрати у вигляді  $\omega_\Omega(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Оскільки  $x_0 = 1$ , то покладаючи в (7) параметр  $\alpha = 1$ , матимемо

$$W(x, y, z) = X(z) \cdot \left(1 - \sqrt{x^2/X^2(z) + y^2/X^2(z)}\right) = X(z) - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Це те ж саме, що в ідентифікаторі факторного профілю  $\omega_f(x, z) = X(z) - x$  зробити заміну  $x \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ , як пропонує формула (2) леми 1.

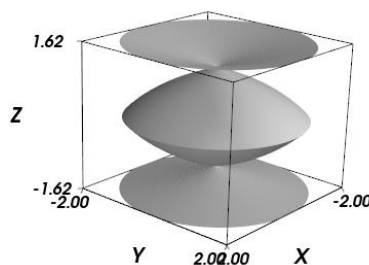
Наприклад, тіло, обмежене поверхнею обертання кривої  $x = 3 - e^{|z|}$  матиме функцію ідентифікації  $W(x, y, z) = 3 - e^{|z|} - \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Крива обертання  $x = 3 - e^{|z|}$ .

Поверхня обертання  $3 - e^{|z|} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ .

*Зауваження.* Якщо в якості ідентифікатора твірного профілю обрати  $\omega_\Omega(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ , то рівняння  $W(x, y, z) = X^2(z) - x^2 - y^2 = 0$ , отримане з (7) при  $\alpha = 2$ , відповідатиме поверхні обертання необмеженої лінії  $x = X(z), y = 0$  навколо осі Z. Наприклад, для розглядуваної вище кривої  $x = 3 - e^{|z|}$  неявне рівняння  $(3 - e^{|z|})^2 - x^2 - y^2 = 0$  визначатиме поверхню, зображену на наступному рисунку.



**Тіла замітання.** Для побудови ідентифікатора тіла пропорційних поперечних перерізів застосувати лему 2 не завжди виходить, бо вона припускає, що факторна крива визначається явним рівнянням  $x = x_f(z) \geq 0, y = 0$ . Але це не завжди можливо. Іноколи в нагоді може стати інший спосіб, за допомогою якого будуються ідентифікатори тіл замітання, серед множини яких зустрічаються і тіла пропорційних поперечних перерізів.

Для пояснення способу формоутворення таких тіл повернемося до питання побудови функцій ідентифікації тіл обертання навколо осі Z твірних фігур  $\Phi$ ,

розташованих в площині  $XZ$  з відомим ідентифікатором  $\omega(x, z)$ . Частину  $\Phi$ , розташовану в «позитивній» півплощині  $XZ (x \geq 0)$ , позначатимемо через  $\Phi_+$  (це може бути  $\Phi$  цілком). Координати точок в площині  $XZ$  позначатимемо через  $(x, z)$ , а координати точок в просторі через  $X, Y, Z$ . Окружності, по яким рухаються точки  $(x, z) \in \Phi_+$  при утворенні тіла обертання, мають рівняння  $\sqrt{X^2 + Y^2} = x, Z = z$ . Виконавши в  $\omega(x, z)$  заміну  $x \rightarrow \sqrt{X^2 + Y^2}, z \rightarrow Z$ , ми отримуємо функцію  $W(X, Y, Z) = \omega(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)$ , яка у внутрішніх точках тіла обертання є позитивною, нуль на межі, і негативною зовні. Тобто це є функція ідентифікації тіла обертання фігури  $\Phi_+$  навколо осі  $Z$  (оскільки  $\sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0$ , то в  $\omega(x, z)$  використовується лише «позитивна» частина  $\Phi$ ).

Подібні побудови можна виконати коли напрямні криві (траєкторії точок) мають форму відмінну від окружностей. Тіла утворювані таким способом, відносяться до класу тіл замітання (їх ще можна назвати узагальненими тілами перенесення). До цього класу відносяться будь-які «солідні» тіла (мають ненульовий об'єм), утворювані переміщенням точок ділянки поверхні вздовж деяких (напрямних) кривих. При такому визначенні безліч тіл можна віднести до зазначеного типу.

Тут ми розглядатимемо лише тіла, напрямні яких розташовані в площинах, паралельних площині  $XY$ , і визначаються рівняннями  $C_x: f(X, Y) = x, Z = z$ , де  $x$  є абсцисою точки перетину напрямної кривої з площиною  $XZ$ , і  $f$  є неперервною функцією двох аргументів. Зауважимо, що співвідношення  $f(X, Y) = x$  при різних  $x$  можна розглядати як лінії рівня функції  $f(X, Y)$ , тому відповідні різним  $x$  криві не перетинатимуться.

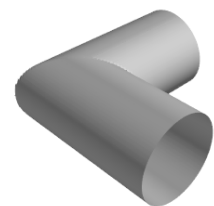
Нехай ідентифікатором твірної фігури  $\Phi \subset$  пл.  $XZ$  є  $\omega(x, z)$ . Виконавши в  $\omega(x, z)$  заміну  $x \rightarrow f(X, Y), z \rightarrow Z$ , створюємо функцію

$$W(X, Y, Z) = \omega(f(X, Y), Z), \quad (8)$$

яку можна розглядати як ідентифікатор тіла замітання, сформованого рухом точок твірної фігури  $\Phi$  вздовж відповідних напрямних ліній.

**Приклад 7.** Побудувати неявне рівняння нескінченної круглої «труби», дві ділянки якої з'єднані під прямим кутом.

Розв'язання. В якості ідентифікатора твірного профілю  $\Phi$  візьмемо функцію  $\omega(x, z) = 1 - x^2 - z^2$ , а рівняння напрямних кривих – у вигляді  $(X - Y + |X + Y|)/2 = x$ .

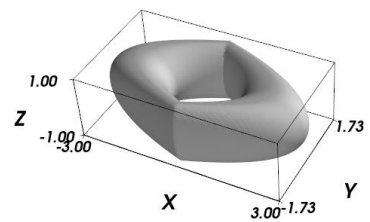


Всі точки одиничного кола  $\omega(x, z) \geq 0, y = 0$ , рухаючись по напрямним лініям, утворюватимуть тіло замітання, ідентифікатор  $W(X, Y, Z)$  якого можна побудувати за формулою (8), де  $f(X, Y) = (X - Y + |X + Y|)/2$ . Після невеликих спрощень з (8) отримуємо

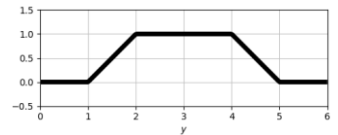
$$W(X, Y, Z) = 1 - \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} - Z^2 - \frac{(X - Y) |X + Y|}{2}.$$

Отже, неявним рівнянням поверхні буде  $W(X, Y, Z) = 0$ . ■

**Вправа 3.** За формулою (8) побудувати ідентифікатор тіла, утвореного переміщенням точок кола  $1 - (x - 2)^2 - z^2 = 0, y = 0$  по кривим  $x = |X| + Y^2$ .  
Відповідь:  $W(x, y, z) = -3 - x^2 - z^2 - y^4 - 2y^2|x| + 4y^2 + 4|x|$

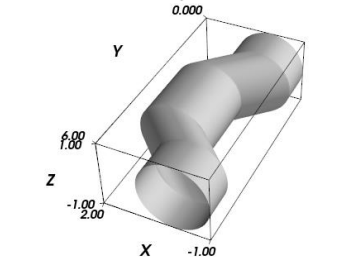


**Вправа 4.** За формулою (8) побудувати ідентифікатор тіла, утвореного переміщенням точок одиничного кола  $1 - x^2 - z^2 = 0, y = 0$  по напрямним у формі ламаної в площині YX, зображеної праворуч (її злами розташовані в точках  $(y_i, x_i) = (1,0), (2,1), (4,1), (5,0)$ ).  
Відповідь:



$$W(x, y, z) = 1 - z^2 - \left( x - \frac{|y-1|}{2} + \frac{|y-2|}{2} + \frac{|y-4|}{2} - \frac{|y-5|}{2} \right)^2.$$

*Вказівка:* рівняння ламаної побудуйте за формулою Бернштейна (1) п. 4.4.2.



*Зауваження.* Конструкція тіл замітання (не обов'язково по плоским кривим) може бути дуже різноманітною. Розглянуті раніше тіла переносу потрапляють в цей клас. Наприклад, плоскі напрямні мають тіла з прикладу 4 і їх ідентифікатори можуть бути побудовані за формулою (8).

Для точок  $(x, z)$  фігури  $\Phi$ , напрямні криві (траєкторії руху)  $f(X, Y) = x, Z = z$ , які мають однакову абсцису  $x$ , будуть «однаковими», але розташованими в різних площинах  $Z = z$ . Направні криві точок  $(x, z) \in \Phi$ , які мають однакову аплікату  $z$  і різні абсциси  $x$ , звісно, відрізнятимуться. Якщо виявиться, що  $f(kx, ky) = kf(x, y)$  ( $k > 0$ ) (тобто  $f(x, y)$  є додатно однорідною функцією першого ступеня), то такі криві будуть гомотетичними (матимуть пропорційні розміри). Дійсно, нехай є дві криві  $C_1: f(X, Y) = x_1$  та  $C_2: f(X, Y) = x_2$ . Позначимо  $k = x_2/x_1$ . Крива  $C^{(k)}$ , гомотетична до  $C_1$  з масштабним коефіцієнтом  $k$ , відповідно до леми 1 п. 4.3, матиме рівняння  $C^{(k)}: f(X/k, Y/k) = x_1$ . З огляду на властивість  $f(X/k, Y/k) = f(X, Y)/k$ , для  $C^{(k)}$  матимемо  $f(X, Y) = kx_1 = x_2$ , тобто  $C^{(k)} \equiv C_2$ . Як наслідок, всі напрямні криві (з однаковими і різними аплікатами) будуть пропорційними якійсь одній напрямній лінії. Коли далі в тексті ми казатимемо про напрямну в однині, то матиметься на увазі будь-яка така крива. Інколи ми використовуватимемо термін напрямний профіль з ідентифікатором  $\omega(x, y)$ , але це означатиме, що в якості напрямної обрано криву з неявним рівнянням  $\omega(x, y) = 0$ .

Тіла, утворені рухом точок деякої фігури по пропорційним кривим, ми зватимемо тілами замітання по пропорційним кривим/траєкторіям. Розглянуті раніше тіла пропорційних поперечних перерізів входять в цей клас. Тороподібні тіла також будуть відноситися до цього типу.

Таким чином, справджується наступна

**Лема 3.** Нехай твірним профілем тіла замітання є фігура  $\Phi$  в площині XZ з функцією ідентифікації  $\omega(x, z)$ . Нехай напрямні криві визначаються рівнянням  $f(X, Y) = x, Z = z$ , при чому  $x$  є абсцисою точок перетину напрямних з

площиною  $XZ$ . Якщо неперервна функція  $f$  двох змінних є додатно однорідною функцією першого ступеня, тобто задовольняє співвідношенню  $f(kx, ky) = kf(x, y)$  ( $k > 0$ ), то функція  $W(X, Y, Z)$ , побудована за формулою (8), буде ідентифікатором тіла замітання (фігури  $\Phi$ ) по пропорційним кривим.

Частину фігури  $\Phi$ , розташовану в «позитивній» півплощині  $XZ$  ( $x \geq 0$ ), як і раніше, позначатимемо через  $\Phi_+$  (це може бути  $\Phi$  цілком). Розглянемо випадок, коли напрямна крива задана в площині  $XY$  неявним рівнянням  $w_\Omega(X, Y) = Const$ , яке не пов'язано з абсцисою  $x$  точки її перетину з віссю  $X$ . Тоді  $x$  можна спробувати знайти, розв'язавши рівняння  $w_\Omega(X, Y) = w_\Omega(x, 0)$ . Позначимо його *позитивний* розв'язок через  $x = f(X, Y)$  і вважатимемо, що він єдиний для кожної точки  $(X, Y)$ . Припускаємо також, що криві з неявним рівнянням  $w_\Omega(X, Y) = w_\Omega(x, 0)$  охоплюють початок координат (для будь-якого  $x$  з діапазону абсцис фігури  $\Phi_+$ ). Ідентифікатор тіла замітання можна побудувати за формулою (8). А якщо виявиться, що  $f(x, y)$  задовольняє умові  $f(kx, ky) = kf(x, y)$  ( $k > 0$ ), то з лема 3 впливатиме, що траєкторії руху точок  $\Phi_+$  будуть пропорційними кривими. Таким чином справджується наступна

**Лема 4.** Нехай напрямна крива тіла замітання задається неявним рівнянням  $w_\Omega(X, Y) = Const$ . Якщо позитивний розв'язок рівняння  $w_\Omega(X, Y) = w_\Omega(x, 0)$  визначається функцією  $x = f(X, Y)$ , для якої виконується співвідношення  $f(kx, ky) = kf(x, y)$  ( $k > 0$ ), і криві  $w_\Omega(X, Y) = w_\Omega(x, 0)$  охоплюють початок координат (для будь-якого  $x$  з діапазону абсцис фігури  $\Phi_+$ ), то множина  $W(X, Y, Z) \geq 0$ , де  $W(X, Y, Z)$  побудовано за формулою (8), визначатиме тіло замітання фігури  $\Phi_+$  по пропорційним кривим.

**Наслідок.** Якщо контур фігури  $\Phi_+$  (виключаючи ділянку на осі  $Z$ ) перетинається горизонтальними прямими  $z = Const$  в єдиній точці (контур також може містити суцільні горизонтальні відрізки), то тіло замітання  $\Sigma$  (фігурою  $\Phi_+$ ) по пропорційним кривим буде тілом пропорційних поперечних перерізів.

**Доведення.** По-перше зрозуміло, що плоскі фігури, отримувані в перерізах  $\Sigma$  площинами  $Z = z$  не матимуть «дірок», а їх зовнішні контури, утворені як траєкторії руху граничних точок фігури  $\Phi_+$ , розташованих на висоті  $z$ , будуть пропорційними (тіло  $\Sigma$  побудовано як тіло замітання по пропорційним кривим). Отже і фігури перерізів можна вважати пропорційними. Окрім того, в перетині поверхні  $\Sigma$  з площиною  $XZ$  (тобто при  $Y = 0$ ) маємо  $W(X, 0, Z) = \omega(f(X, 0), Z) = \omega(x, z)$ , оскільки з сенсу функції  $f(X, Y)$  прямує  $f(X, 0) = x$ . Це все і означає, що  $\Sigma$  є бажаним тілом пропорційних перерізів.

**Приклад 8.** Побудувати тіло пропорційних поперечних перерізів, факторною кривою якого є одиничне коло  $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ , а напрямною – контур квадрата  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  в площині  $XY$ .

**Розв'язання.** Хоча для цього прикладу можна використати формули (6), (7) спробуємо застосувати лему 4. Ідентифікатор твірного/факторного кола  $\Phi$  оберемо у вигляді  $\omega(x, z) = 1 - x^2 - z^2$ . Потім побудуємо ідентифікатор

напрямого квадрата за формулою (5) п. 4.1.1:  $w_{\Omega}(x, y) = 2 - |x| - |y| - ||y| - |x||$ . Рівняння  $\omega_{\Omega}(X, Y) = \omega_{\Omega}(x, 0)$  набуває вигляду

$$2 - |X| - |Y| - ||Y| - |X|| = 2 - |x| - ||x||$$

Оскільки шукається  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$ . Тоді

$$x = f(X, Y) = \frac{1}{2}(|X| + |Y| + ||Y| - |X||)$$

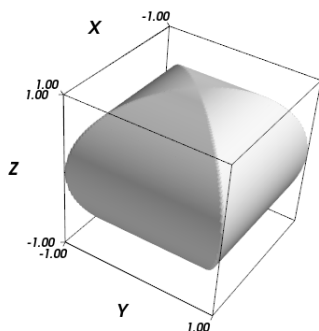
З отриманої формули зрозуміло, що  $f(X, Y)$  є додатно однорідною функцією першого ступеня. Тому, з леми 4 і її наслідку, випливає, що функція

$$W(x, y, z) = \omega(f(x, y), z) = 1 - \frac{1}{4}(|x| + |y| + ||y| - |x||)^2 - z^2$$

є ідентифікатором тіла пропорційних поперечних перерізів. Останній вираз спрощується

$$W(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{|x^2 - y^2|}{2} - z^2.$$

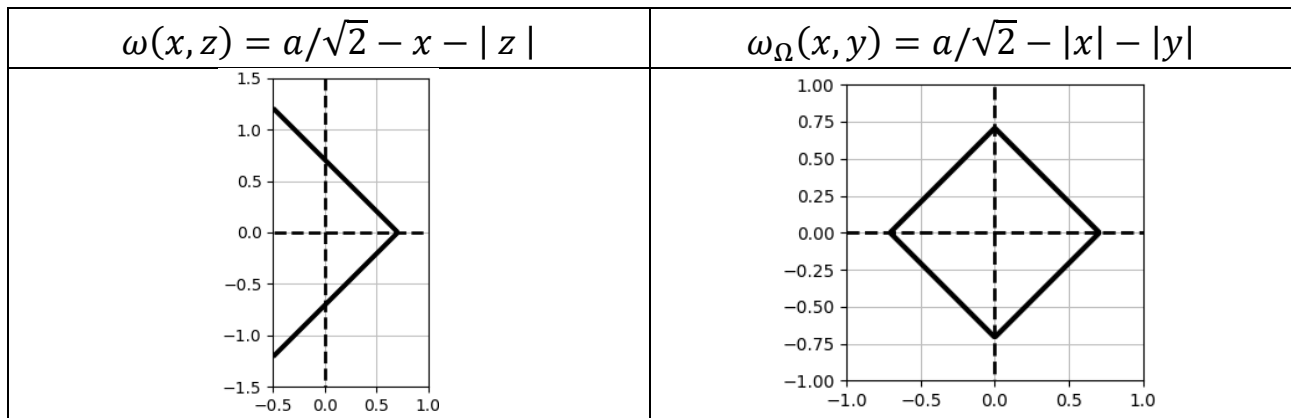
```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, sqrt, lambdify
mlab.close(all=True)
x, y, z = symbols(«x y z»)
wf=1-x**2-z**2
xo=(Abs(x)+Abs(y)+Abs(Abs(y)-Abs(x)))/2
w3d=wf.subs(x,xo)
# w3d=1-x**2/2-y**2/2-Abs(x**2-y**2)/2-z**2
F=lambdify((x,y,z),w3d,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-1.1:1.1:101j,-1.1:1.1:101j,-1.1:1.1:201j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.8,0.8,0.8))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



Ще раз підкреслимо, що ми згенерували ідентифікатор  $W(x, y, z)$  тіла  $\Sigma$  замінання по пропорційним траєкторіям. Але всі перетини тіла  $\Sigma$  з площинами  $Z = z$  виявляються квадратами, а всі квадрати є пропорційними кривими. Крім того, в перетині поверхні  $\Sigma$  з площиною  $XZ$  (тобто  $y = 0$ ) маємо  $W(x, 0, z) = 1 - x^2 - z^2 = \omega(x, z)$  – ідентифікатор факторного профілю. Ці дві встановлені особливості означають, що  $\Sigma$  є тілом пропорційних поперечних перерізів, яке перетинає площину  $XZ$  по факторній кривій  $\omega(x, z) = 0$ .

**Приклад 9.** Побудувати неявне рівняння октаедра, просторові діагоналі якого співпадають з осями координат, а довжина ребер дорівнює  $a$ .

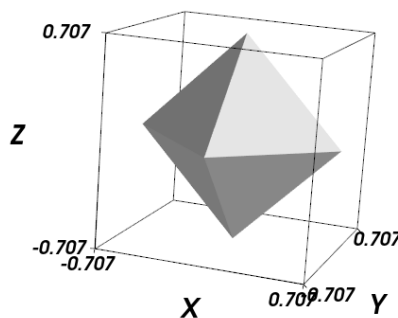
Розв'язання. Для твірної і напрямної фігури можна сконструювати наступні функції (в прикладі оберемо  $a = 1$ ).



Тоді, відповідно до леми 4, відносно  $x$  розв'язуємо рівняння  $\omega_{\Omega}(X, Y) = \omega_{\Omega}(x, 0)$ , тобто  $a/\sqrt{2} - |X| - |Y| = a/\sqrt{2} - |x|$ . Звідки  $|x| = |X| + |Y|$ . Оскільки шукається  $x \geq 0$ , то  $x = f(X, Y) = |X| + |Y|$ . З цієї формули зрозуміло, що  $f(X, Y)$  є додатно однорідною функцією першого ступеня. Тому, з леми 4 і її наслідку, випливає, що функція

$$W(X, Y, Z) = \omega(f(X, Y), Z) = a/\sqrt{2} - |X| - |Y| - |Z|.$$

є ідентифікатором тіла пропорційних поперечних перерізів. Міняючи позначення  $X, Y, Z$  на  $x, y, z$ , отримуємо неявне рівняння поверхні октаедра у вигляді  $\frac{a}{\sqrt{2}} - |x| - |y| - |z| = 0$ .



Візуалізація тіла виконується так само, як в коді попереднього прикладу, де змінну `w3d` слід задати за отриманою формулою для  $W(X, Y, Z)$ .

**Вправа 5.** Використовуючи лему 4, сконструювати функцію ідентифікації куба  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

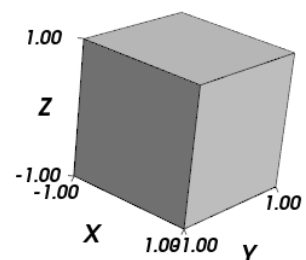
*Вказівка:* для факторної і напрямної кривих оберіть функції

$$\omega(x, z) = 1 - \frac{1}{2}|x - z| - \frac{1}{2}|x + z|.$$

$$\omega_{\Omega}(x, y) = 1 - \frac{1}{2}|x - y| - \frac{1}{2}|x + y|.$$

Відповідь:  $W(x, y, z) = 1 - \frac{1}{4}(|x - y| + |x + y| - 2z) -$

$$-\frac{1}{4}(|x - y| + |x + y| + 2z).$$



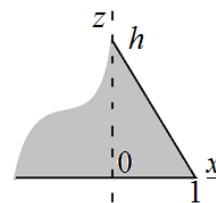
Порівняйте з виразом  $\omega_{cube}(x, y, z)$ , отриманим для куба в прикладі 3 п. 4.2.



**Приклад 10.** Побудувати неявне рівняння поверхні чотирикутної піраміди висотою  $h = 2$  і квадратом в основі  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Основа розташована в площині  $XY$ , а вісь піраміди співпадає з прямою  $Z$ .

Розв'язання. В якості твірного профілю візьмемо кут з ідентифікатором

$$\omega(x, z) = ir(h - h x - z, z) = \frac{1}{2}(h - h x - |h - h x - 2 z|)$$

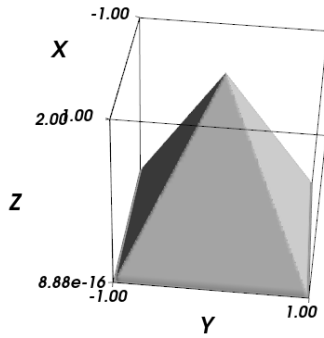


Ідентифікатор квадрата  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  побудуємо за формулою, отриманою в прикладі 2 п. 4.4.1:  $w_{\Omega}(x, y) = 1 - \frac{1}{2}|x - y| - \frac{1}{2}|x + y|$ . Відповідно то леми 4 розв'язуємо рівняння  $\omega_{\Omega}(X, Y) = \omega_{\Omega}(x, 0)$  відносно  $x$  (враховуючи, що  $x \geq 0$ ), тобто  $1 - \frac{1}{2}|X - Y| - \frac{1}{2}|X + Y| = 1 - x$ . Звідки  $x = \frac{1}{2}|X - Y| + \frac{1}{2}|X + Y| = f(X, Y)$ . Застосовуючи формулу (8) (і міняючи позначення  $X, Y, Z$  на  $x, y, z$ ), отримуємо

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( h - \frac{h}{2} (|x - y| + |x + y|) - \left| h - \frac{h}{2} (|x - y| + |x + y|) - 2 z \right| \right).$$

Оскільки  $f(k x, k y) = k f(x, y)$  ( $k > 0$ ), то множина точок  $W(x, y, z) \geq 0$  буде тілом пропорційних перерізів.

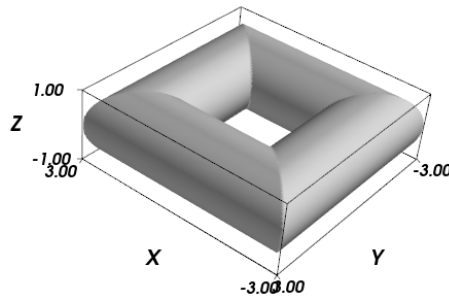
```
import numpy as np
from mayavi import mlab
from sympy import symbols, Abs, simplify, sqrt, lambdify, S
mlab.close(all=True)
def ir(u,v): return (u+v-Abs(u-v))/S(2)
x,y,z = symbols("x y z")
h=S(2)
w1=h-h*x-z
w2=z
wf=ir(w1,w2) # ідентифікатор факторного профіля
X=(Abs(x-y)+Abs(x+y))/2 # ідентифікатор квадрата
wd=wf.subs(x,X)
F=lambdify((x,y,z),wd,'numpy')
X,Y,Z = np.mgrid[-2:2:201j, -2:2:201j, -1:4:101j]
W=F(X,Y,Z)
fig=mlab.figure(fgcolor=(0, 0, 0), bgcolor=(1, 1, 1))
mlab.contour3d(X,Y,Z,W,contours=[0],color=(0.7,0.7,0.7))
mlab.outline()
mlab.axes()
```



**Приклад 11.** Побудувати неявне рівняння квадратного тороподібного тіла, твірна крива якого є зсунутим в точку  $(2,0)$  одиничним колом, а напрямною в площині  $XY$  – контур квадрата  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ .

Розв’язання. Маємо  $\omega_{\Omega}(x, y) = 2 - \frac{1}{2}|x - y| - \frac{1}{2}|x + y|$ ,  $\omega(x, z) = 1 - (x - 2)^2 - z^2$ . Розв’язуємо рівняння  $\omega_{\Omega}(X, Y) = \omega_{\Omega}(x, 0)$  відносно  $x$  (враховуючи, що  $x \geq 0$ ), тобто  $2 - \frac{1}{2}|X - Y| - \frac{1}{2}|X + Y| = 2 - x$ . Звідки  $x = \frac{1}{2}|X - Y| + \frac{1}{2}|X + Y|$ . Тоді  $W(X, Y, Z) = \omega(f(X, Y), Z)$ . Міняючи позначення  $X, Y, Z$  на  $x, y, z$ , після деяких спрощень отримуємо

$$W(x, y, z) = -3 - z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}|x^2 - y^2| + 2|x - y| + 2|x + y|$$

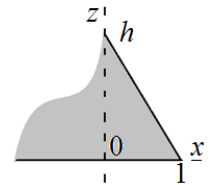


Звісно, що неявним рівнянням поверхні буде  $W(x, y, z) = 0$ .

**Приклад 12.** Побудувати функцію ідентифікації еліптичного конуса висотою  $h = 2$ , вертикальна вісь якого співпадає з віссю  $Z$ . Еліпс основи знаходиться в площині  $XY$ , його осі розташовані на координатних осях  $X$  та  $Y$ , а довжини півосей 1 та 2.

Розв’язання. В якості твірного профілю візьмемо кут з прикладу 10.

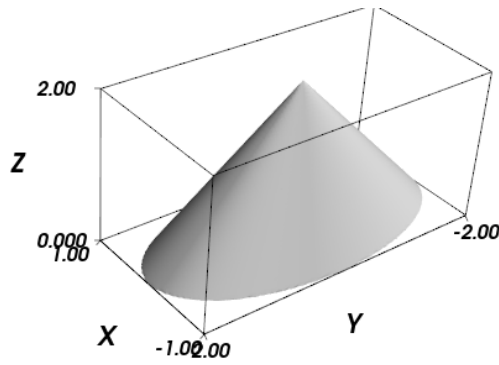
$$\omega(x, z) = \frac{1}{2}(h - h|x| - |h - h|x| - 2z|).$$



Неявним рівнянням еліпса основи є  $\omega_{\Omega}(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 0$ . Розв’язуємо рівняння  $\omega_{\Omega}(X, Y) = \omega_{\Omega}(x, 0)$  відносно  $x$  ( $x \geq 0$ ), тобто  $1 - X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1 - x^2$ .

Звідки  $x = \sqrt{X^2 + \frac{Y^2}{4}}$ . Міняючи в (8) позначення  $X, Y, Z$  на  $x, y, z$ , отримуємо

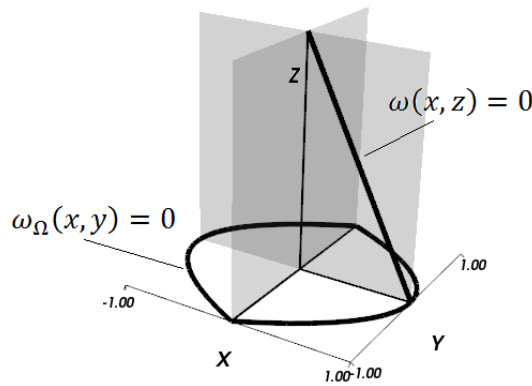
$$W(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(h - h\sqrt{x^2 + y^2/4} - \left|h - h\sqrt{x^2 + y^2/4} - 2z\right|\right)$$



Оскільки  $\sqrt{(kX)^2 + \frac{(kY)^2}{4}} = k\sqrt{X^2 + \frac{Y^2}{4}}$ , то всі перерізи поверхні площинами  $Z = z > 0$  будуть пропорційними еліпсами

Розглянемо випадок, коли для функції  $f(x, y)$  не виконується умова  $f(kx, ky) = kf(x, y)$ .

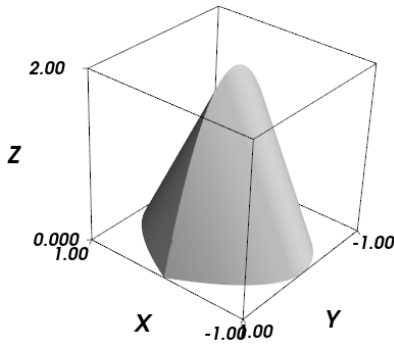
**Приклад 13.** Побудувати функцію ідентифікації тіла замітання півплощиною  $\omega(x, z) = h - hx - z \geq 0$  (точніше частиною півплощини  $h - hx - z \geq 0$ , яка розташована в «позитивній» півплощині  $x \geq 0$  площини XZ) по напрямним, які визначаються неявним рівнянням  $\omega_\Omega(x, y) = 1 - |x| - y^2 = 0$ .



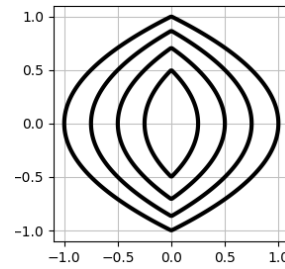
Розв'язання. Рівняння  $\omega_\Omega(X, Y) = \omega_\Omega(x, 0)$ , тобто  $1 - |X| - Y^2 = 1 - |x|$ , для  $x \geq 0$  має розв'язок  $x = f(X, Y) = |X| + Y^2$ . Звідки зрозуміло, що  $f(kx, ky) \neq kf(x, y)$ . Ми все одно можемо побудувати функцію  $W(X, Y, Z)$  за формулою (8), але тепер траєкторії руху точок твірної фігури не будуть пропорційними, хоча і будуть схожими.

$$W(X, Y, Z) = \omega(f(X, Y), Z) = h - h(|X| + Y^2) - Z$$

На наступному рисунку ліворуч зображено результатівне тіло замітання  $\Sigma_1$  (при  $h = 2$ ), а праворуч – контури його перерізів площинами  $z = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ . Зауважимо, що тіло  $\Sigma_1$  сягає нескінченно вниз – ліворуч показано лише його частину  $z \geq 0$ .



Тіло замітання при  $h = 2$ .



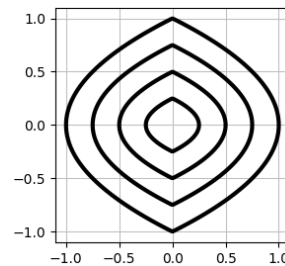
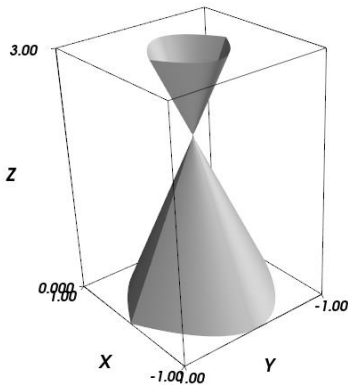
Перерізи  $z = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

Маючи ті ж самі факторну криву  $\omega(x, z) = h - h x - z = 0$  і напрямний профіль  $\omega_\Omega(x, y) = 1 - |x| - y^2 \geq 0$ , за формулою (6) згенеруємо функцію ідентифікації  $W(x, y, z)$  справжнього тіла  $\Sigma_2$  пропорційних поперечних перерізів. Єдина незручність полягає в тому, що в цьому випадку з'явиться «паразитна» конічна порожнина при  $z > h$ . Звісно, що це можна подолати, побудувавши функцію  $ir(W(x, y, z), h - z)$ , але тут ми цього робити не станемо.

Явним рівнянням факторної лінії є  $x(z) = 1 - z/h$  з абсцисою  $x_0 = 1$  точки її перетину з віссю X. Тоді з (6) отримуємо

$$W(x, y, z) = 1 - \left| \frac{x}{x(z)} \right| - \left( \frac{y}{x(z)} \right)^2.$$

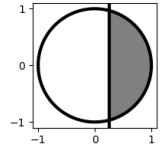
Зображення поверхні  $\Sigma_2$  наведено на наступному рисунку ліворуч, а праворуч – контури його перерізів площинами  $z = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ . Для цих висот вони побудовані як криві, гомотетичні до  $\omega_\Omega(x, y) = 0$ , з масштабними коефіцієнтами  $k = x(z) = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ .



Як бачите, перерізи  $Z = z$  поверхні пропорційних поперечних перерізів  $\Sigma_2$  відрізняються від перерізів тіла замітання  $\Sigma_1$ , так само як відрізняються і самі поверхні.

**Вправи до глави.**

1. Побудувати функцію ідентифікації зони перетину одиничного кола з центром в точці  $(0,0)$  і півплощини  $x \geq \frac{1}{4}$ .



Відповідь:  $\omega(x, y) = \frac{3}{8} - \frac{x^2+y^2-x}{2} - \frac{1}{2} \left| x^2 + y^2 + x - \frac{5}{4} \right|$ .

2. Написати неявне рівняння прямокутного трикутника з вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , і візуалізувати його по цьому рівнянню.

3. Написати неявне рівняння паралелограма (координати вершин задайте самостійно), і візуалізувати його по цьому рівнянню.

4. Написати неявне рівняння трапеції (координати вершин задайте самостійно), і візуалізувати її по цьому рівнянню.

5. Вивести загальну формулу для ідентифікатора трикутника, вершини якого  $A, B, C$  мають координати  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ .

6. Написати неявне рівняння контура області, зображення якої наведено праворуч (параметри фігури оберіть самостійно). По згенерованому рівнянню побудувати лінію.



7. Побудувати неявне рівняння контура фігури, координати точок якої задовольняють наступним обмеженням.



$$1 - x + y \geq 0, 1 + x + y \geq 0, 10 - 2x^2 - 3y^2 \geq 0.$$

8. Написати неявне рівняння контура літери К і візуалізувати її.



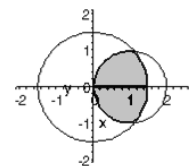
9. Сконструювати неявне рівняння контура цифри 4 та цифри 7.



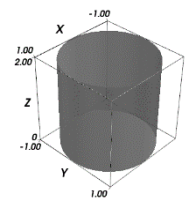
10. Сконструювати неявне рівняння контура слова ХНУ (абревіатура від Харківський національний університет) і побудувати його графік.



11. Написати неявне рівняння контура фігури, зображення якої наведено праворуч. По згенерованому рівнянню виконайте візуалізацію. Відповідь:  $\frac{9}{8} - x^2 - y^2 + x - \frac{1}{2} \left| 2x - \frac{9}{4} \right| = 0$ .

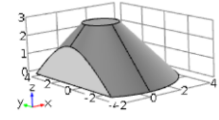


12. Застосовуючи підхід п. 4.2, побудувати функцію ідентифікації циліндра радіуса  $r$  і висотою  $h$  (вісь циліндра розташувати на осі  $Z$ , а нижню основу – в площині  $XY$ ). Графічно зобразити циліндр (при деяких  $r, h$ ), використовуючи згенеровану функцію. На рисунку  $h = 2, r = 1$ . Відповідь:  $w(x, y, z) = h + 2r^2 - 2x^2 - 2y^2 - |h - 2z| - |h - 2r^2 + 2x^2 + 2y^2 - |h - 2z||$

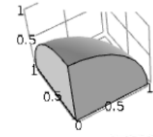


13. Застосовуючи підхід п. 4.2, побудувати ідентифікатор прямого кругового конуса радіуса  $r$  і висотою  $h$  (вісь конуса розташована на осі  $Z$ , а основа – в площині  $XY$ ). Графічно зобразити конус (при деяких  $r, h$ ), використовуючи згенеровану функцію ідентифікації.

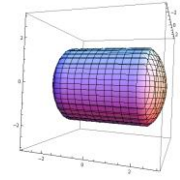
14. Застосовуючи підхід п. 4.2, сконструювати неявне рівняння поверхні тіла, зображеного праворуч, і візуалізувати його. Розміри фігури оберіть самостійно.



15. Застосовуючи підхід п. 4.2, сконструювати неявне рівняння поверхні тіла, зображеного праворуч (осьмушка кулі). Розміри фігури оберіть самостійно.



16. Застосовуючи підхід п. 4.2, побудувати неявне рівняння поверхні тіла, координати точок якої задовольняють наступним обмеженням:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $y^2 + z^2 \leq 4$  (перетин циліндра і кулі).

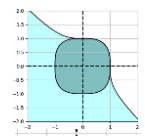


17. Написати неявне рівняння поверхні тривимірної літери – першої літери вашого прізвища або імені. Побудувати її зображення.

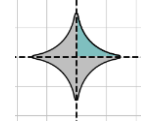
18. Написати неявне рівняння поверхні вертикального циліндра (фіксованої висоти) з горизонтальним циліндричним отвором. Параметри фігури оберіть самостійно.

19. Написати неявне рівняння поверхні вертикального циліндра (фіксованої висоти) із горизонтальним отвором квадратного перерізу. Параметри фігури оберіть самостійно.

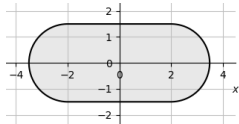
20. Застосовуючи твердження 8 п. 4.3, виконати «симетризацію» зони, ідентифікатор якої має вигляд  $\omega = 1 - x^3 - y^3$ .



21. Застосовуючи твердження 8 п. 4.3, виконати «симетризацію» фігури з ідентифікатором  $\omega = 1 - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ .

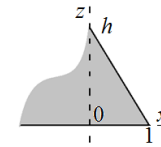


22. Застосовуючи формулу (9) п. 4.4.2, сконструювати функцію ідентифікації зони «стадіону (без отвору), параметри якого задано в прикладі 2 п. 4.1.5. Відповідь:



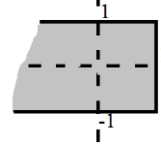
$$w(x, y) = -7 - 4x^2 - 4y^2 - 2(x - 2)|x - 2| + 2(x + 2)|x + 2|$$

23. Написати неявне рівняння поверхні обертання ламаної, зображеної праворуч, навколо вертикальної осі. Відповідь:



$$W(x, y, z) = h - h\sqrt{x^2 + y^2} - |h\sqrt{x^2 + y^2} - h + 2z|$$

24. Побудувати функцію ідентифікації циліндра, як тіла обертання напівсмуги  $|z| \leq 1 \wedge x \leq 1$  навколо осі Z.



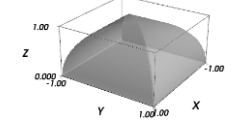
Відповідь:  $W(x, y, z) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} - |z| - |\sqrt{x^2 + y^2} - |z||$

25. Побудувати неявне рівняння трапеції з вершинами в точках A(1,1), B(2,-1), C(-2,-1), D(-1,1). Відповідь:



$$\frac{9}{8} - \frac{3y}{8} - \frac{3}{16}|1 + 2x - 3y| - \frac{3}{16}|-1 + 2x + 3y| = 0$$

26. Побудувати функцію ідентифікації верхньої половини тіла з прикладу 8 п. 4.5 і візуалізувати його.



Вказівка. В якості твірної кривої обрати верхнє півколо з ідентифікатором  $\omega(x, z) = ir(1 - x^2 - z^2, z)$ , а для напрямного

профілю візьміть функцію ідентифікації квадрата у вигляді  $\omega_{\Omega}(x, y) = 1 - \frac{1}{2}|x - y| - \frac{1}{2}|x + y|$ .

**27.** За формулою (8) п.4.5 сконструювати функцію ідентифікації тіла, розглянутого в прикладі 5 п.4.5. Його факторною кривою є одиничне коло з ідентифікатором  $\omega(x, z) = 1 - x^2 - z^2$ , а напрямним профілем – квадрат з ідентифікатором  $\omega_{\Omega}(x, y) = 1 - |x| - |y|$ .

Відповідь:  $W(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - 2|x \cdot y| - z^2$ .

**28.** Побудувати функцію ідентифікації чотирикутної піраміди висотою  $h = 2$  і з квадратом в основі, діагоналі якого співпадають з осями координат  $X$  та  $Y$ . *Вказівка.* Факторна крива буде кутом, таким як в прикладі 10 п.4.5, а напрямним профілем – квадрат з ідентифікатором  $\omega_{\Omega}(x, y) = 1 - |x| - |y|$ . З останнього випливає, що в функції ідентифікації  $\omega(x, z)$  слід зробити заміну  $x = |X| + |Y|$ . Відповідь:

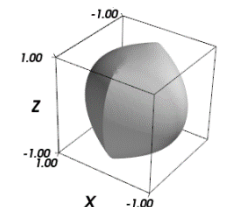
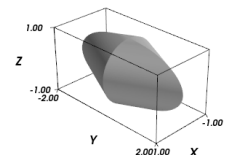
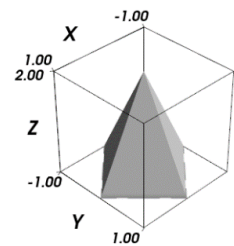
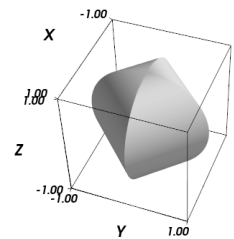
$$W(X, Y, Z) = \frac{1}{2}((h - h(|X| + |Y|) - |h - h(|X| + |Y|) - 2Z|)$$

**29.** Згенерувати ідентифікатор тіла замітання, отриманого переміщенням точок одиничного кола  $\omega(x, y) = 1 - x^2 - z^2$  по напрямним у формі витягнутих вздовж осі  $Y$  ромбів.

*Вказівка.* Напрямна має рівняння  $\omega_{\Omega}(x, y) = 2 - |x| - |y|$ . Відповідно до леми 4 п. 4.5, слід використати заміну  $x = |X| + |Y|$ .

**30.** Згенерувати ідентифікатор тіла замітання, отриманого переміщенням точок одиничного кола по напрямним у формі кривої з неявним рівнянням  $1 - |x| - y^2 = 0$ .

*Вказівка.* Відповідна заміна матиме вигляд  $x = Y^2 + |X|$ .





### **Література до глави.**

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техника, 1967. – 212с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982.-552с.
3. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
4. Доля П.Г. Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики. // Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2006. - № 733. Сер. “Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.6. – С. 106-116.
5. Доля П.Г. Об одном способе представления кусочных полиномов в системах символьной математики. // Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2008. - № 833. Сер. “Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.10. – С.110-120.
6. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых. // Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 661. Сер. “Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.4. – С. 97-103.