Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514 № XXX , xxxx, с.xx-xx

О комплексных подмногообразиях с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа.

О.В. Лыкова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В работе исследованы комплексные подмногообразия $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа.
2000 Mathematics Subject Classification 53B25.

Введение.

Секционная кривизна $\bar{k}$ многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ при $l, p \neq 1$ изменяется в пределах $[0, 2]$. В работе А.А. Борисенко, Ю.А. Николаевского [3] доказано следующее утверждение: секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ по всем площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, принимает максимальное значение ($\bar{k} = 2$) тогда и только тогда, когда поверхность двумерна ($l = 2$), минимальна и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке есть окружность с центром на поверхности; в частности, при $p = 2$ поверхность – комплексная кривая в $\mathbf{C}^2 = E^4$. В статье Е. Муто [5] получено, что если невырожденный грассманов образ поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, касается только тех площадок, вдоль которых секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ принимает минимальное значение ($\bar{k} = 0$), то это возможно тогда и только тогда, когда поверхность имеет плоскую нормальную связность и индуцированная метрика плоская.

А.А. Борисенко поставил задачу об исследовании комплексных подмногообразий $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ с максимальной и минимальной голоморфной кривизной комплексного многообразия Грассмана вдоль грассманова образа комплексного подмногообразия.

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность. Построим в каждой ее точке касательное пространство и перенесем все эти пространства параллельно в начало координат. Полученное подмножество в комплексном многообразии Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется грассмановым образом $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l.

Комплексным внешним нуль-индексом $\mu_{\mathbf{C}}(q)$ в точке $q \in F^l$ называется максимальная размерность подпространства $L(q)$ касательного пространства T_qF^l такого, что $A_\nu y = 0$ для любого вектора $y \in L(q)$, где A_ν –

комплексная вторая квадратичная форма комплексной поверхности F^l в точке q относительно произвольной нормали ν в нормальном пространстве N_qF^l.

Если в каждой точке комплексной поверхности комплексный внешний нуль-индекс равен нулю, то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ будет l-мерным комплексным подмногообразием в $\mathbf{C}G(l, l+p)$ [2].

Голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ изменяется в пределах $[2/r, 2]$, где $r = \min(l, p)$ [6].

В работе [4] нами получено описание комплексных подмногообразий с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа. Доказано, что *если голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, принимает максимальное значение $K_{hol} = 2$ по всем направлениям, то F^l является комплексной гиперповерхностью в $\mathbf{C}^{l+1} \subset \mathbf{C}^{l+p}$.*

В данной работе исследован вопрос о комплексных подмногообразиях с минимальной голоморфной кривизной грассманова образа.

Теорема. *Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$, $l \geq 2$, $p \geq 2$. Тогда для каждой точки $q \in F^l$ существует направление $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательное к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которого $K_{hol}(X) > 2/r$, где $r = min(l, p)$.*

Таким образом, при $l \geq 2$, $p \geq 2$ не существует комплексных поверхностей $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, для которых голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l)$, принимает минимальное значение $K_{hol} = 2/r$, где $r = min(l, p)$, по всем направлениям.

Касательное пространство к грассманову образу комплексного подмногообразия.

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$, точка $q \in F^l$.

В пространстве $\mathbf{C}^{l+p}$ выберем систему координат так, чтобы точка q совпала с началом координат, а касательное пространство T_qF^l – с подпространством $z^1, ..., z^l$. Комплексную поверхность F^l в окрестности точки q можно задать явно, в виде $z^{l+\alpha} = f^\alpha(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., p$, где f^α – голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ и $f^\alpha(0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}|_0 = 0$, $i = 1, ..., l$. Элементы матриц комплексных вторых квадратичных форм A^α комплексной поверхности F^l в точке q будут иметь вид $a^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z^i \partial z^j}|_0$, $\alpha = 1, ..., p$. Касательным пространством к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(q) = 0$ является l-мерное комплексное линейное

пространство, натянутое на векторы [1]

$$X_j = \begin{pmatrix} a^1_{1j} & a^1_{2j} & \dots & a^1_{lj} \\ a^2_{1j} & a^2_{2j} & \dots & a^2_{lj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^p_{1j} & a^p_{2j} & \dots & a^p_{lj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, ..., l. \tag{1}$$

Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана.

Согласно [6] голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора X имеет вид

$$K_{hol}(X) = \frac{2\mathrm{Tr}(XX^*XX^*)}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2}, \tag{2}$$

где X – комплексная $p \times l$-матрица, $X^* = \bar{X}^T$.

В работе [1] было показано, что голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ в точке 0 в направлении вектора $X = (b_{ik})^{p}_{i=1}{}^{l}_{k=1}$ имеет вид

$$K_{hol}(X) = 2 - \frac{4\sum\limits_{i<j}\sum\limits_{k<m}|b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk}|^2}{(\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{l}|b_{ik}|^2)^2}.$$

Из этой формулы следует, что $K_{hol}(X) = 2$ тогда и только тогда, когда все миноры второго порядка матрицы X равны нулю: $b_{ik}b_{jm} - b_{im}b_{jk} = 0$.

Таким образом, *голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана* $\mathbf{C}G(l, l+p)$ *в точке* 0 *в направлении вектора* $X = (b_{ik})^{p}_{i=1}{}^{l}_{k=1}$ *максимальна* ($K_{hol}(X) = 2$) *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* X *равен единице.*

Найдем условия, при которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана в направлении вектора X минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = \min(l, p)$.

Лемма. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана* $\mathbf{C}G(l, l+p)$ *в точке* 0 *в направлении вектора* X *имеет вид*

$$K_{hol}(X) = \frac{2}{r}\left(1 + \frac{\sum\limits_{i<j}(\rho_i - \rho_j)^2}{(\sum\limits_{i=1}^{r}{\rho_i}^2)^2}\right),$$

где $r = \min(l, p)$, ρ_i *– сингулярные числа* $p \times l$-матрицы X, $i = 1, ..., r$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0$.

Доказательство. Запишем для матрицы X сингулярное разложение:

$$X = U\Lambda V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(l)$ – унитарные матрицы, Λ – $p \times l$-матрица с элементами $\Omega_{ii} = \rho_i,\ i = 1, ..., r$, где $r = \min(l, p)$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0$, $\Omega_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Преобразуем формулу (2):

$$K_{hol}(X) = \frac{2}{r}\frac{r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*)}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2} = \frac{2}{r}\left(1 + \frac{r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) - (\mathrm{Tr}XX^*)^2}{(\mathrm{Tr}XX^*)^2}\right).$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\mathrm{Tr}XX^* = \sum_{i=1}^{r} \rho_i^2,$$

$$\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) = \sum_{i=1}^{r} \rho_i^4.$$

Значит,

$$r\mathrm{Tr}(XX^*XX^*) - (\mathrm{Tr}XX^*)^2 = r\sum_{i=1}^{r} \rho_i^4 - (\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2)^2 =$$

$$= (r-1)\sum_{i=1}^{r} \rho_i^4 - 2\sum_{i<j} \rho_i^2\rho_j^2 = \sum_{i<j}(\rho_i - \rho_j)^2,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Следствие. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана* $\mathbf{C}G(l, l+p)$ *в точке* 0 *в направлении вектора* X *минимальна:* $K_{hol}(X) = 2/r$, *где* $r = \min(l, p)$, *тогда и только тогда, когда все сингулярные числа матрицы* X *равны между собой:* $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_r$.

Доказательство теоремы.

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность, $l \geq 2$, $p \geq 2$. Точка $q \in F^l$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbf{C}}(q) = 0$.

Предположим, что для любого вектора $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательного к грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ комплексной поверхности, голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = min(l, p)$.

Пусть A^τ – матрицы комплексных вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l относительно комплексных нормалей ν_τ, $\tau = 1, ..., p$, в точке q.

Произвольный вектор X, касательный к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $0 = \Gamma(q)$ будет следующим:

$$X = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}, \tag{3}$$

где матрицы X_j имеют вид (1), $j = 1, ..., l$.

Запишем для матрицы X сингулярное разложение:

$$X = U\Lambda V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(l)$ – унитарные матрицы, Λ – $p \times l$-матрица с элементами $\Omega_{ii} = \rho_i$, $i = 1, ..., r$, где $r = \min(l, p)$, $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ... \geq \rho_r \geq 0$, $\Omega_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Поскольку $K_{hol}(X) = 2/r$, то согласно следствию из леммы получаем, что все сингулярные числа матрицы X равны между собой: $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_r := \rho$.

1. Пусть $l \leq p$. Тогда $r = l$ и

$$\Lambda = \rho \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка r, O – нулевая $(p - r) \times r$-матрица.

Следовательно, сингулярное разложение матрицы X имеет вид

$$X = U\Lambda V = \rho U \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix} V,$$

где $U \in U(p)$, $V \in U(r)$ – унитарные матрицы.

Пусть b^k – k-й столбец матрицы X. Получаем, что

$$\langle b^k, b^m \rangle_{\mathbf{C}^p} = 0, \ k \neq m, \tag{4}$$

$$\langle b^k, b^k \rangle_{\mathbf{C}^p} = \langle b^m, b^m \rangle_{\mathbf{C}^p}, \tag{5}$$

где $\langle \, . \, , \, . \, \rangle_{\mathbf{C}^p}$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^p$.

Согласно (3) столбец b^k матрицы X имеет вид

$$b^k = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \begin{pmatrix} a_{kj}^1 \\ a_{kj}^2 \\ \vdots \\ a_{kj}^p \end{pmatrix},$$

где a_{kj}^τ – элементы матриц комплексных вторых кавадратичных форм A^τ в точке q, , $\tau = 1, ..., p$; $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbf{C}$.

Значит, условия (4),(5) примут вид

$$\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}=0,\ k\neq m,$$

$$\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ks}^{\tau}=\sum_{j,s=1}^{l}\sum_{\tau=1}^{p}\alpha_j\bar{\alpha}_s a_{mj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}$$

для любых $\alpha_1,...,\alpha_l\in\mathbf{C}$.

Следовательно, получаем, что

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}=0,\ k\neq m, \tag{6}$$

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kj}^{\tau}\bar{a}_{ks}^{\tau}=\sum_{\tau=1}^{p}a_{mj}^{\tau}\bar{a}_{ms}^{\tau}, \tag{7}$$

где $j,s,k,m=1,...,l$.

В частности, при $j=m, s=k$ условие (6) примет вид

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{km}^{\tau}\bar{a}_{mk}^{\tau}=\sum_{\tau=1}^{p}|a_{km}^{\tau}|^2=0,\ k\neq m.$$

Значит, элементы $a_{km}^{\tau}=0$ при $k\neq m,\ \tau=1,...,p;\ k,m=1,...,l$.

Тогда условие (7) будет следующим:

$$\sum_{\tau=1}^{p}a_{kk}^{\tau}\bar{a}_{kk}^{\tau}=0.$$

Следовательно, элементы $a_{kk}^{\tau}=0,\ \tau=1,...,p;\ k=1,...,l$.

Таким образом, получаем, что матрицы комплексных вторых квадратичных форм в точке $q\in F^l$ нулевые: $A^{\tau}\equiv 0$, $\tau=1,...,p$.

2. Пусть $l\geq p$. Тогда $r=p$ и

$$\Lambda=\rho\begin{pmatrix} E & O\end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка r, O – нулевая $r\times(l-r)$-матрица.

Следовательно, сингулярное разложение матрицы X имеет вид

$$X=U\Lambda V=\rho U\begin{pmatrix} E & O\end{pmatrix}V,$$

где $U\in U(r)$, $V\in U(l)$ – унитарные матрицы.

Пусть b_k – k-я строка матрицы X. Получаем, что

$$\langle b_k,b_m\rangle_{\mathbf{C}^l}=0,\ k\neq m, \tag{8}$$

$$\langle b_k, b_k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \langle b_m, b_m\rangle_{\mathbf{C}^l}, \tag{9}$$

где $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_{\mathbf{C}^l}$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Согласно (3) строка b_k матрицы X имеет вид

$$b_k = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j d_j^k, \quad \text{где} \quad d_j^k = (a_{1j}^k a_{2j}^k ... a_{lj}^k).$$

Заметим, что элементы строк d_j^k являются элементами j-х столбцов матриц комплексных вторых квадратичных форм A^k, $k = 1, ..., p$; $j = 1, ..., l$.

Значит, условия (8),(9) примут вид

$$\sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^k, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l} = 0,\ k \neq m,$$

$$\sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^k, d_s^k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \sum_{j,s=1}^{l} \alpha_j \bar{\alpha}_s \langle d_j^m, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l}$$

для любых $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbf{C}$.

Следовательно, получаем, что

$$\langle d_j^k, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l} = 0,\ k \neq m, \tag{10}$$

$$\langle d_j^k, d_s^k\rangle_{\mathbf{C}^l} = \langle d_j^m, d_s^m\rangle_{\mathbf{C}^l}, \tag{11}$$

где $j, s = 1, ..., l$; $\quad k, m = 1, ..., p$.

Условия (10), (11) означают, что матрицы комплексных вторых квадратичных форм в точке $q \in F^l$ обладают следующими свойствами

$$A^k \bar{A}^m = 0, \qquad k \neq m, \tag{12}$$

$$A^k \bar{A}^k = A^m \bar{A}^m, \tag{13}$$

где $k, m = 1, ..., p$.

Так как A^k – комплексные симметричные матрицы, то из (12) следует, что $\bar{A}^m A^k = 0$. Домножая это равенство слева на A^m, а справа на A^k, и используя (13), получаем, что $(A^k \bar{A}^k)^2 = 0$. Следовательно, $A^k \equiv 0$, $k = 1, ..., p$.

Таким образом, предположив, что для любого вектора $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательного к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ минимальна: $K_{hol}(X) = 2/r$, где $r = min(l, p)$, получаем, что матрицы комплексных вторых квадратичных

форм в точке $q \in F^l$ нулевые: $A^\tau \equiv 0$, $\tau = 1, ..., p$. Но это невозможно, поскольку комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbf{C}}(q) = 0$.

Значит, для каждой точки $q \in F^l$ существует направление $X \in T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^l)$, касательное к невырожденному грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которого $K_{hol}(X) > 2/r$, где $r = min(l, p)$.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А., Лейбина О.В. Классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т.9, № 4. – С. 572-594.

2. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи математических наук. – 1991.– Т. 46, **2(278)**. – С. 41-83.

3. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа // Математические заметки. – 1990. – Т.48, **3**. – С.12-13.

4. Лейбина О.В. О комплексных подмногообразиях с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа // Математические заметки. – 2007. Т.81, **4**. – С.561-568.

5. Muto Y. The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space // J.Math.Soc.Japan. – 1978. – V.30. – № 1. – P.85-100.

6. Wong Y.C. Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc.Nat.Acad.Sci.USA. – 1968. – V.60. – № 1. – P. 75-79.