Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514 № 711, 2005, с.121–126

Комплексные подмногообразия со вполне геодезическим грассмановым образом

О.В. Лейбина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В работе получена классификация комплексных подмногообразий $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ с невырожденным вполне геодезическим грассмановым образом. *2000 Mathematics Subject Classification* 53B25.

Полная классификация многомерных поверхностей $F^l \subset E^{l+p}$, грассманов образ которых вполне геодезичен в объемлющем многообразии Грассмана была получена Ю.А. Николаевским [3]. Классификация двумерных поверхностей со вполне геодезическим грассмановым образом была дана Б. Ченом и С. Ямагучи [5].

Поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ является произведением поверхностей $F^{l_1} \subset E^{l_1+p_1}$, ..., $F^{l_k} \subset E^{l_k+p_k}$, если $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i = l$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = p$, $F^l = F^{l_1} \times \ldots \times F^{l_k}$ и евклидовы пространства $E^{l_i+p_i}$ попарно ортогональны в E^{l+p}.

Имеет место

Теорема. [3] *Регулярная поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ класса C^3 в евклидовом пространстве имеет невырожденный вполне геодезический грассманов образ $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$ тогда и только тогда, когда она является произведением поверхностей, каждая из которых является либо*

1) вещественной гиперповерхностью, либо

2) комплексной гиперповерхностью, либо

3) поверхностью с параллельной второй квадратичной формой,

причем каждая поверхность-сомножитель имеет нулевой внешний нуль-индекс.

Д. Ферусом [6],[7] доказано, что параллельность второй квадратичной формы регулярной поверхности эквивалентна каждому из следующих условий:

1) поверхность является внешне симметрической (т.е. евклидова симметрия объемлющего пространства относительно нормального пространства к поверхности в каждой ее точке отображает поверхность на себя), *2) поверхность является открытой областью на стандартно вложенном симметрическом R-пространстве или на его произведении с евклидовым пространством.*

К симметрическим R-пространствам относятся все эрмитовы симметрические пространства компактного типа, грассмановы многообразия, группы $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, пространства $U(2n)/Sp(n)$, $U(n)/O(n)$, произведения двух сфер, проективная плоскость Кэли и три исключительных пространства. Полная классификация получена в [8].

В данной работе рассмотрена задача классификации многомерных комплексных поверхностей в комплексном евклидовом пространстве, грассманов образ которых вполне геодезичен в комплексном многообразии Грассмана.

Комплексным многообразием Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется множество всех l-мерных комплексных плоскостей $l+p$-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^{l+p}$, проходящих через начало кооординат $O \in \mathbf{C}^{l+p}$. Построим в каждой точке комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ касательное пространство и параллельно перенесем все эти пространства в начало кооординат. Полученное подмножество в $\mathbf{C}G(l, l+p)$ называется грассмановым образом $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l. Грассманов образ невырожден, если комплексный внешний нуль-индекс комплексной поверхности равен нулю [1].

Имеет место

Теорема. *Неособая комплексная поверхность $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ имеет невырожденный вполне геодезический грассманов образ $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ тогда и только тогда, когда она является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Рассмотрим $\mathbf{C}^{l+p}$ как евклидово пространство $E^{2(l+p)}$, наделенное коплексной структурой. Тогда комплексное многообразие Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ вполне геодезично в вещественном многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$.*

Доказательство. Согласно [1] касательное пространство к комплексному многообразию Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ есть

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{Z}^T \\ Z & 0 \end{pmatrix},\ Z - \text{комплексная} \quad p \times l\text{-матрица} \right\},$$

а касательное пространство к вещественному многообразию Грассмана ориентированнных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$ имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -X^T \\ X & 0 \end{pmatrix},\ X - \text{вещественная} \quad 2p \times 2l\text{-матрица} \right\}.$$

Будем отождествлять касательный вектор к многообразию Грассмана с соответствующей $2p \times 2l$-подматрицей X.

Пусть касательный вектор к комплексному многообразию Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ задан $p \times l$-матрицей $Z = X_1 + iX_2$.

Рассматривая l-мерные комплексные плоскости в $\mathbf{C}^{l+p}$ как $2l$-мерные J-инвариантные плоскости в $E^{2(l+p)}$, получаем, что касательное пространство к $\mathbf{C}G(l, l+p) \subset G^+(2l, 2l+2p)$ задается $2p \times 2l$-матрицами вида

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & -X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{m}$ – касательное пространство к комплексному многообразию Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p) \subset G^+(2l, 2l+2p)$ в некоторой точке.

Покажем, что $\mathbf{m}$ является тройной системой Ли в касательном пространстве к вещественному многообразию Грассмана $G^+(2l, 2l+2p)$. Тогда согласно теореме Картана комплексное многообразие Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ будет вполне геодезическим подмногообразием в $G^+(2l, 2l+2p)$.

Нам надо показать [4], что $\forall A, B, C \in \mathbf{m}$ $[A, [B, C]] \in \mathbf{m}$.

Согласно (1) касательные векторы $A, B, C \in \mathbf{m}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -X^T \\ X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -X_1^T & -X_2^T \\ 0 & 0 & X_2^T & -X_1^T \\ X_1 & -X_2 & 0 & 0 \\ X_2 & X_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -Y^T \\ Y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y_1^T & -Y_2^T \\ 0 & 0 & Y_2^T & -Y_1^T \\ Y_1 & -Y_2 & 0 & 0 \\ Y_2 & Y_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -Z^T \\ Z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Z_1^T & -Z_2^T \\ 0 & 0 & Z_2^T & -Z_1^T \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & 0 \\ Z_2 & Z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведем необходимые вычисления.

$$[B, C] = BC - CB = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} -Y_1^T Z_1 - Y_2^T Z_2 + Z_1^T Y_1 + Z_2^T Y_2 & Y_1^T Z_2 - Y_2^T Z_1 - Z_1^T Y_2 + Z_2^T Y_1 \\ Y_2^T Z_1 - Y_1^T Z_2 - Z_2^T Y_1 + Z_1^T Y_2 & -Y_2^T Z_2 - Y_1^T Z_1 + Z_2^T Y_2 + Z_1^T Y_1 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -Y_1 Z_1^T - Y_2 Z_2^T + Z_1 Y_1^T + Z_2 Y_2^T & -Y_1 Z_2^T + Y_2 Z_1^T + Z_1 Y_2^T - Z_2 Y_1^T \\ -Y_2 Z_1^T + Y_1 Z_2^T + Z_2 Y_1^T - Z_1 Y_2^T & -Y_2 Z_2^T - Y_1 Z_1^T + Z_2 Y_2^T + Z_1 Y_1^T \end{pmatrix}.$$

Получаем, что тройная скобка Ли имеет вид

$$[A,[B,C]] = \begin{pmatrix} 0 & -Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_1^T & -Q_2^T \\ 0 & 0 & Q_2^T & -Q_1^T \\ Q_1 & -Q_2 & 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 = &-X_1Y_1^TZ_1 - X_1Y_2^TZ_2 + X_1Z_1^TY_1 + X_1Z_2^TY_2 - X_2Y_2^TZ_1 + \\ &+X_2Y_1^TZ_2 + X_2Z_2^TY_1 - X_2Z_1^TY_2 + Y_1Z_1^TX_1 + Y_2Z_2^TX_1 - Z_1Y_1^TX_1 - \\ &-Z_2Y_2^TX_1 + Y_1Z_2^TX_2 - Y_2Z_1^TX_2 - Z_1Y_2^TX_2 + Z_2Y_1^TX_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = &-X_2Y_1^TZ_1 - X_2Y_2^TZ_2 + X_2Z_1^TY_1 + X_2Z_2^TY_2 + X_1Y_2^TZ_1 - \\ &-X_1Y_1^TZ_2 - X_1Z_2^TY_1 + X_1Z_1^TY_2 + Y_2Z_1^TX_1 - Y_1Z_2^TX_1 - Z_2Y_1^TX_1 + \\ &+Z_1Y_2^TX_1 + Y_2Z_2^TX_2 + Y_1Z_1^TX_2 - Z_2Y_2^TX_2 - Z_1Y_1^TX_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $[A,[B,C]] \in \mathbf{m}$.

Доказательство теоремы.

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным вполне геодезическим грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset \mathbf{C}G(l,l+p)$. Напомним, что грассманов образ невырожден, если комплексный внешний нуль-индекс комплексной поверхости F^l равен нулю. Рассмотрим ее как $2l$-мерную поверхность F^{2l} в $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J. Тогда из леммы следует, что грассманов образ $\Gamma(F^{2l})$ вполне геодезичен в вещественном многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l,2l+2p)$.

Согласно теореме Ю.А. Николаевского поверхность $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ со вполне геодезическим в $G^+(2l,2l+2p)$ грассмановым образом является произведением поверхностей $F^{l_1} \subset E^{l_1+p_1}$,..., $F^{l_k} \subset E^{l_k+p_k}$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i = 2l$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 2p$, $F^{2l} = F^{l_1} \times \ldots \times F^{l_k}$ и евклидовы пространства $E^{l_i+p_i}$ попарно ортогональны в $E^{2(l+p)}$. Причем каждая поверхность-сомножитель имеет нулевой внешний нуль-индекс и является либо вещественной гиперповерхностью, либо комплексной гиперповерхностью, либо поверхностью с параллельной второй квадратичной формой.

Учитывая, что поверхность $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ должна быть комплексным подмногообразием $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$, покажем, что F^{2l} не может содержать вещественных сомножителей.

В силу четности коразмерности наличие одного вещественного сомножителя невозможно. Покажем, что произведение двух вещественных гиперповерхностей не может быть комплексным подмногообразием в комплексном евклидовом пространстве.

Пусть $F^{2l} = F^{l_1} \times F^{l_2}$, где $F^{l_1} \subset E^{l_1+1}$, $F^{l_2} \subset E^{l_2+1}$, где $l_1 + l_2 = 2l$ и E^{l_1+1} и E^{l_2+1} ортогональны в E^{2l+2}. Тогда $F^{2l} \subset E^{2l+2}$ можно задать в виде

$$\begin{cases} x^{2l+1} = f^1(x^1, ..., x^{l_1}) \\ x^{2l+2} = f^2(x^{l_1+1}, ..., x^{l_1+l_2}) \end{cases}$$

Следовательно, матрицы вторых квадратичных форм относительно специально выбранного базиса нормалей $\xi_1, \xi_2 \in N_q F^{2l}$ будут иметь вид

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1,A_2 – квадратные матрицы порядков l_1 и l_2 соответственно.

Если $F^{2l} \subset E^{2l+2}$ – комплексное подмногообразие, то A_{ξ_1} и A_{ξ_2} должны удовлетворять условию $A_{\xi_i} J + J A_{\xi_i} = 0$, $i = 1, 2$, где J - комплексная структура на F^{2l}, индуцированная из комплексной структуры в E^{2l+2}. Но тогда $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, а значит, матрицы вторых квадратичных форм A_{ξ_1}, A_{ξ_2} также нулевые. Аналогично показывается, что произведение любого четного числа вещественных гиперповерхностей не может быть комплексным подмногообразием в комплексном евклидовом пространстве.

Теперь покажем, что F^{2l} не может содержать сомножителей с параллельной второй квадратичной формой. Согласно Ферусу поверхность с параллельной второй квадратичной формой является открытой областью на стандартно вложенном симметрическом R-пространстве или на его произведении с евклидовым пространством. Из симметрических R-пространств комплексной структурой обладают эрмитовы симметрические пространства компактного типа, причем их эрмитова структура является кэлеровой. Симметрические пространства компактного типа имеют неотрицательную секционную кривизну и положительно определенный тензор Риччи [2]. Получаем, что эрмитово симметрическое пространство компактного типа не может быть вложенным в комплексное евклидово пространство, так как согласно [2] каждое комплексное подмногообразие в комплексном евклидовом пространстве имеет отрицательно полуопределенный тензор Риччи.

Таким образом, получаем, что F^{2l} является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс.

Обратно, если комплексное подмногообразие $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс, то согласно теореме Ю.А. Николаевского оно имеет вполне геодезический невырожденный грассманов образ $\Gamma(F^{2l}) \subset G^+(2l, 2l+2p)$. С другой стороны $\Gamma(F^{2l}) \subset \mathbf{C}G(l, l+p)$ и согласно лемме комплексное многообразие Грассмана $\mathbf{C}G(l, l+p)$ вполне геодезично в многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$. Следовательно, грассманов образ $\Gamma(F^{2l})$ вполне геодезичен в $\mathbf{C}G(l, l+p)$.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи математических наук. – 1991.– Т. 46, вып. **2(278)**. – С. 41-83.

2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.

3. Николаевский Ю.А. Классификация многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве со вполне геодезическим грассмановым образом // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № **6**. – С. 127-154.

4. Хелгасон С. Диференциальная геометрия и симметрические постранства. М.: Мир, 1964. – 533 с.

5. Chen B.Y. Yamaguchi S. Submanifolds with totally geodesic Gauss image // Geom. dedic.– 1984. – Vol. 15, No. **3**. – P. 313-322.

6. Ferus D. Immersions with parallel second fundamental form // Math. Zeit. – 1974. – Vol. 140, No. **1.** – P. 87-93.

7. Ferus D. Symmetric submanifolds of Euclidean space // Math. Ann. – 1980. – Vol. 247, No. **1.** – P. 81-93.

8. Nagano T. Transformation groups on compact symmetric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 118, No. **2.** – P. 428-453.