УДК 514

Масальцев Л.А., Петров Е.В. Минимальные поверхности в группе Гейзенберга

Трехмерная группа Гейзенберга или в терминологии [1,гл.4] геометрия Nil представляет собой трехмерную действительную группу Ли с умножением

$$L_{\overline{a}}\overline{x} = (a^1, a^2, a^3)(x, y, z) = (x + a^1, y + a^2, z + a^3 + a^1 y),$$

с левоинвариантной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. Группа изометрий Nil описана в [1]. Она имеет размерность 4, содержит подгруппу трансляций, изоморфную самой Nil, затем одномерную подгруппу вращений относительно вертикальных слоев и отражения типа $(x, y, z) \to (x, -y, -z)$. В [2, теорема 0] отмечено, что группа изометрий группы Гейзенберга разлагается в полупрямое произведение группы трансляций и $Aut(nil) \cap O(f)$ - группы автоморфизмов алгебры Ли nil, сохраняющих метрику. Тензор Римана метрики Nil имеет следующие ненулевые компоненты : $R_{1212} = \frac{x^2-3}{4}$, $R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{4}$, $R_{1213} = -\frac{x}{4}$. Для того чтобы оценить, в каких пределах меняется секционная кривизна Nil, очевидно, достаточно это сделать в начале координат. Если выбрать в $T_e Nil$ два ортонормированных вектора $X = (\cos u, \sin u, 0)$ и $Y = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, \sin v)$, то секционная кривизна $K(X, Y)$ в направлении двумерной плоскости, натянутой на X, Y, может быть найдена по формуле

$$K(X, Y) = R_{1212} \cos^2 v + R_{1313} \cos^2 u \sin^2 v + R_{2323} \sin^2 u \sin^2 v +$$

$$+2R_{1223} \sin u \cos v \sin v + 2R_{1312} \cos u \cos v \sin v + 2R_{1323} \cos u \sin u \sin^2 v =$$

$$= -\frac{3}{4} \cos^2 v + \frac{1}{4} \sin^2 v.$$

Следовательно, $-\frac{3}{4} \leq K(X, Y) \leq \frac{1}{4}$ и поэтому Nil представляет собой пример трехмерной односвязной римановой группы Ли (в терминологии [2]) со знакопеременной секционной кривизной. Представляет интерес описание множества минимальных поверхностей в Nil. В первом разделе мы изучаем поведение геодезических Nil. Оказывается, что их естественно классифицировать на "горизонтальные", "вертикальные" и "винтовые". Во втором разделе мы находим все линейчатые минимальные поверхности , состоящие из "горизонтальных" и, отдельно, из "вертикальных" геодезических. В третьем разделе приведены формулы для коэффициентов первой и второй фундаментальных форм поверхности в Nil, заданной в виде $(x, y, z(x, y))$, получено уравнение явно заданной минимальной поверхности и доказано несуществование вполне геодезических поверхностей в Nil. В последнем разделе мы приводим формулы для $SO(2)$- инвариантных минимальных поверхностей в группе Гейзенберга. Заметим, что $SO(2)$ - инвариантные поверхности постоянной ненулевой средней кривизны были исследованы П. Томтером в [5]. Первым из авторов написаны разделы 1-3, а вторым последний раздел.

1. Геодезические в Nil

В этом разделе мы опишем поведение связки геодезических выходящих из произвольной точки многообразия Nil. Ковариантный и контравариантный метрический тензор имеют вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Символы Кристоффеля выражаются следующим образом

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & x/2 & -1/2 \\ x/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^3_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x^2-1}{2} & -x/2 \\ \frac{x^2-1}{2} & 0 & 0 \\ -x/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Классические уравнения геодезической в Nil следующие (штрихом обозначено дифференцирование по натуральному параметру геодезической)

$$\left[\begin{array}{l} x'' - xy'^2 + y'z' = 0, \\ y'' + xx'y' - x'z' = 0, \\ z'' + (x^2-1)x'y' - xx'z' = 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Умножая первое уравнение на x', а второе на y' и складывая, получим $x'^2 + y'^2 = c_1^2$. Умножая второе уравнение на x и вычитая из него третье , получим $xy' - z' = c_2$. Поскольку $x'^2 + y'^2 + (z' - xy')^2 = 1$, то постоянные c_1, c_2 связаны следующим образом $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

Подставляя $z' = xy' - c_2$ в первое и второе уравнения системы (1), получим

$$\begin{array}{l} x'' - c_2 y' = 0, \\ y'' + c_2 x' = 0. \end{array} \tag{2}$$

Интегрируем эту систему

$$x' - c_2 y = c_3,$$

$$y' + c_2 x = c_4.$$

Отсюда получаем следующее уравнение

$$x'' + c_2^2 x - c_2 c_4 = 0 \tag{3}$$

Здесь надо различать два случая 1) $c_2 = 0$ и 2) $c_2 \neq 0$. В первом случае имеем

$$x = c_3 s + c_5, y = c_4 s + c_6, z = c_3 c_4 \frac{s^2}{2} + c_5 c_4 s + c_7, \tag{4}$$

причем постоянные c_3, c_4 должны быть связаны условием $c_3^2 + c_4^2 = 1$, для того чтобы s было длиной дуги.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение орта оси z $(0,0,1)$ на касательный вектор геодезической (4) равно нулю в любой точке этой геодезической. Проекцией геодезической (4) на координатную плоскость xOy является прямая, поэтому мы будем называть геодезическую (4) "горизонтальной".

Рассмотрим теперь случай 2) $c_2 \neq 0$. В этом случае интегрируя сначала уравнение (3), а затем и оставшиеся уравнения системы, получим

$$\begin{gathered} x = c_5 \cos(c_2 s) + c_6 \sin(c_2 s) + \frac{c_4}{c_2}, \\ y = -c_5 \sin(c_2 s) + c_6 \cos(c_2 s) - \frac{c_3}{c_2}, \\ z = \frac{c_5 c_6}{2} \cos(2 c_2 s) + \frac{c_6^2 - c_5^2}{4} \sin(2 c_2 s) - \frac{c_4}{c_2}(c_5 \sin(c_2 s) - c_6 \cos(c_2 s)) - \\ - \frac{(c_5^2 + c_6^2 + 2) c_2 s}{2} + c_7, \end{gathered} \tag{5}$$

причем условие, что s является длиной дуги влечет $c_2^2(c_5^2 + c_6^2 + 1) = 1$.

Геодезическая (5) проектируется на плоскость xOy в окружность радиуса $r = \sqrt{c_5^2 + c_6^2}$, которая может выродиться в точку. Поскольку орт оси z образует с касательным вектором геодезической (5) постоянный угол, то мы будем называть геодезическую (5) "винтовой", если $c_5^2 + c_6^2 > 0$ и "вертикальной", если $c_5 = c_6 = 0$. Таким образом, "вертикальная" геодезическая имеет следующие уравнения

$$x = c_4, y = c_3, z = s + c_7. \tag{6}$$

2. Линейчатые минимальные поверхности в Nil.

Линейчатые минимальные поверхности в Nil следует искать в виде однопараметрических семейств геодезических каждого из трех описаннных в разделе 1 видов, т.е. как коллекции "горизонтальных", "вертикальных" и "винтовых" геодезических, проходящих через некоторую фиксированную кривую в Nil.

Теорема 1.*Линейчатая минимальная поверхность в Nil, состоящая из "горизонтальных" геодезических (4) имеет один из следующих двух видов*

$$1) r(s,t) = (s\cos t - a_0 ctgt + b_0, s\sin t,$$
$$\left.\frac{s^2}{4}\sin 2t + s(-a_0 ctgt + b_0)\sin t + \frac{a_0^2}{2}ctgt + c_0 t + d_0\right), \tag{7}$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 - произвольные действительные постоянные,

$$2) r(s,t) = (c_3(t)s, c_6(t), a_0 c_6(t) + b_0),$$

где c_3, c_6, c_7 -произвольные дифференцируемые функции переменной t

Доказательство. 1) Предположим, что искомая линейчатая минимальная поверхность, составленная из "горизонтальных" геодезических, пересекает "плоскость" xOz. Выберем тогда в качестве направляющей семейства "горизонтальных" геодезических кривую $(c_5(t), 0, c_7(t))$, расположенную в плоскости xOz. Кроме того мы можем положить $c_3 = \cos t$ и тогда в силу того, что всегда $c_3^2 + c_4^2 = 1$ будем иметь $c_4 = \sin t$. Таким образом, можно искать линейчатую минимальную поверхность,составленную из семейства "горизонтальных" геодезических (4) в виде

$$r(s,t) = \left(s\cos t + c_5(t), s\sin t, \frac{s^2}{4}\sin 2t + sc_5(t)\sin t + c_7(t)\right)$$

Касательные векторы к ней имеют вид

$$r'_s = (\cos t, \sin t, (s\cos t + c_5)\sin t),$$

$$r'_t = (-s\sin t + c'_5, s\cos t, s\cos t(s\cos t + c_5) - A),$$

где $A = \frac{s^2}{2} - s(c_5)'\sin t - (c_7)'$. Вектор нормали (n^1, n^2, n^3) к поверхности имеет следующие координаты

$$\left(\frac{-A\sin t, A\cos t, A\cos t(s\cos t + c_5) + s - (c_5)'\sin t}{\sqrt{A^2 + (s - (c_5)'\sin t)^2}}\right).$$

Затем находим коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности

$$\overline{g}_{11} = < r'_s, r'_s > = x_s^2 + y_s^2 + (z_s - xy_s)^2 = 1,$$

$$\overline{g}_{12} = < r'_s, r'_t > = x_s x_t + y_s y_t + (z_s - xy_s)(z_t - xy_t) = (c_5)'\cos t.$$

Значение коэффициента g_{22} окажется несущественным и поэтому мы его не приводим. Коэффициенты второй фундаментальной формы поверхности мы находим по формулам [3,гл.5, с.119].

$$b_{ij} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} y^\mu_{,i} y^\nu_{,j}\right) n^\beta.$$

Вычислим b_{11}. Имеем $\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} = (0, 0, \frac{1}{2}\sin 2t)$, $\Gamma^1_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = \Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = 0$, $\Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = -\frac{1}{2}\sin 2t$.

Следовательно, вектор $\frac{\partial y^\alpha}{\partial s^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$ и поэтому $b_{11} =< 0, n >= 0$.

Найдем b_{12}. Имеем $\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial t} = (-\sin t, \cos t, s\cos 2t + (c_5 \sin t)')$, $\Gamma^1_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = -\frac{1}{2}A\sin t$, $\Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = \frac{1}{2}A\cos t$, $\Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = -\frac{1}{2}(s\cos 2t + (c_5)'\sin t) + \frac{1}{2}A\cos t(s\cos t + c_5)$.

Вектор $f^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial s \partial t} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2}$ равен

$$\Big(-(\frac{A}{2}+1)\sin t, (\frac{A}{2}+1)\cos t,$$

$$\frac{s}{2}\cos 2t + \frac{(c_5)'}{2}\sin t + c_5\cos t + \frac{A}{2}\cos t(s\cos t + c_5)\Big)$$

Поэтому

$$b_{12} =< f, n >= f^1 n^1 + f^2 n^2 + (f^3 - x f^2)(n^3 - x n^2) = \frac{\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}(c_5)'^2\sin^2 t - (c_7)'}{\sqrt{A^2 + (s - (c_5)'\sin t)^2}}$$

Вычислим b_{22}. Имеем

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \left(-s\cos t + c_5'', -s\sin t, -s^2\sin 2t + s(c_5\sin t)'' + c_7''\right),$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = -sA\cos t, \Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = A(-s\sin t + c_5'),$$
$$\Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = ((-s\sin t + c_5')(A(s\cos t + c_5) - s\cos t)$$

Вектор $g^\alpha = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial t^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2}$ имеет координаты

$$g^1 = -s(1+A)\cos t + c_5'', g^2 = -s(1+A)\sin t + Ac_5',$$
$$g^3 = (s\cos t + c_5)(-s\sin t(1+A) + Ac_5') + sc_5''\sin t + sc_5'\cos t + c_7''$$

$$b_{22} =< g, n >= g^1 n^1 + g^2 n^2 + (g^3 - x g^2)(n^3 - x n^2) =$$
$$= \frac{A^2 c_5'\cos t + \frac{s^2}{2}c_5''\sin t + sc_5'\cos t(s - c_5'\sin t) + sc_7'' + c_5''c_7'\sin t - c_5'c_7''\sin t}{\sqrt{A^2 + (s - c_5'\sin t)^2}}.$$

Условие минимальности $\overline{g}_{22}b_{11} - 2\overline{g}_{12}b_{12} + \overline{g}_{11}b_{22} = 0$ сводится к уравнению $0 = b_{22} - 2c_5' \cos t b_{12}$, которое в свою очередь приводится к виду

$$s^2(\frac{c_5''}{2}\sin t + c_5'\cos t) + s(c_7'' - (c_5')^2 \sin t\cos t) + (c_5''c_7' - c_5'c_7'')\sin t +$$
$$+ \cos t \sin^2 t(c_5')^3 + 2c_5'c_7'\cos t = 0 \qquad (8)$$

Отсюда следует, что коэффициенты при s^2 и s должны аннулироваться, что приводит к двум уравнениям

$$1)\frac{c_5''}{2}\sin t + c_5\cos t = 0,$$

$$2)c_7'' - (c_5')^2\sin t\cos t = 0.$$

Решениями этой системы уравнений являются функции

$$c_5(t) = -a_0 ctgt + b_0, c_7(t) = \frac{a_0^2}{2}ctgt + c_0 t + d_0,$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 - произвольные действительные постоянные.

Легко проверить, что при подстановке найденных функций в уравнение (8) аннулируется также и свободный член (зависящий только от переменной t), откуда и следует указанная в формулировке теоремы параметризация 1) линейчатой минимальной поверхности, составленной из "горизонтальных" геодезических пересекающих "плоскость" xOz.

2) Предположим, теперь, что линейчатая минимальная поверхность, составленная из "горизонтальных" геодезических, не пересекает "плоскости" xOz. Тогда проекция любой "горизонтальной" геодезической на xOy будет прямой, параллельной оси Ox. Из (4) следует, что $c_4 = 0$ и уравнения произвольной "горизонтальной" геодезической таковы

$$x = c_3 s + c_5, y = c_6, z = c_7,$$

где c_3, c_5, c_6, c_7 - некоторые неизвестные функции, зависящие от параметра t, которые нужно подобрать таким образом, чтобы поверхность была минимальной. Мы можем также положить $c_5 = 0$, если расположим направляющую кривую поверхности в плоскости yOz.

Касательные векторы к данной поверхности есть $r_s = (c_3, 0, 0)$ и $r_t = (c_3's, c_6', c_7')$. Вектор нормали

$$n = \frac{(0, c_7' - xc_6', -c_6' + x(c_7' - xc_6'))}{\sqrt{(c_7' - xc_6')^2 + c_6'^2}}.$$

Коэффициенты первой фундаментальной формы имеют вид

$$\overline{g}_{11}=c_3^2, \overline{g}_{12}=c_3c_3's.$$

(Мы не вычисляем g_{22} потому что $b_{11}=0$). Имеем $r_{ss}=(0,0,0)$, $\Gamma^1_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,1}=\Gamma^2_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,1}=\Gamma^3_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,1}=0$. Отсюда следует, что $b_{11}=0$.

Далее $r_{st}=(c_3',0,0)$, $\Gamma^1_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,2}=0$, $\Gamma^2_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,2}=\frac{1}{2}c_3(xc_6'-c_7')$, $\Gamma^3_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,2}=\frac{1}{2}c_3((x^2-1)c_6'-xc_7')$.

Отсюда находим

$$b_{12}=\frac{c_3\left(c_6'^2-(xc_6'-c_7)^2\right)}{2\sqrt{(c_7'-xc_6')^2+c_6'^2}}.$$

Находим $r_{tt}=(c_3''s,c_6'',c_7'')$,

$\Gamma^1_{\mu\nu}y^\mu_{,2}y^\nu_{,2}=c_6'(c_7'-xc_6')$, $\Gamma^2_{\mu\nu}y^\mu_{,2}y^\nu_{,2}=c_3's(xc_6'-c_7')$, $\Gamma^3_{\mu\nu}y^\mu_{,2}y^\nu_{,2}=c_3's(x^2-1)c_6'-xc_7)$.

Отсюда следует, что

$$b_{22}=\frac{c_3's\left(c_6'^2-(xc_6'-c_7)^2\right)+c_7'c_6''-c_7''c_6'}{\sqrt{(c_7'-xc_6')^2+c_6'^2}}.$$

Теперь нетрудно проверить, что условие минимальности линейчатой поверхности сводится к решению уравнения $c_7'c_6''-c_7''c_6'=0$, откуда следует, что $c_7(t)=a_0c_6(t)+b_0$, что и доказывает справедливость параметризации 2), указанной в формулировке теоремы.

Найдем теперь минимальные линейчатые поверхности, составленные из "вертикальных" геодезических (6).

Теорема 2. *Линейчатая минимальная поверхность, составленная из "вертикальных" геодезических, имеет вид*

$$r(s,t)=(s,a_0s+b_0,t)\,,$$

где a_0,b_0 - произвольные действительные постоянные.

Доказательство. Пусть искомая поверхность проектируется в кривую $(u(s),v(s),0)$ плоскости xOy и имеет следующее параметрическое представление в Nil :

$$r(s,t)=(u(s),v(s),t)\,.$$

Касательные векторы есть $r_s=(u',v',0)$, $r_t'=(0,0,1)$. Нормаль к поверхности имеет вид $n=\frac{1}{\sqrt{u'^2+v'^2}}(-v',u',uu')$. Коэффициенты первой фундаментальной формы есть: $\overline{g}_{11}=<r_s',r_s'>=u'^2+v'^2+u^2v'^2$, $\overline{g}_{12}=<r_s',r_t'>=-uv'$, $\overline{g}_{22}=<r_t',r_t'>=1$. Вычислим вторую фундаментальную форму поверхности. Найдем b_{11}: $r_{ss}=(u'',v'',0)$, $\Gamma^1_{\mu\nu}y^\mu_{,1}y^\nu_{,1}=-uv'^2$,

$\Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = uu'v'$, $\Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1} = (u^2-1)u'v'$. Вектор $\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial s^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,1}$ равен $f_1 = \big(u'' - uv'^2, v'' + uu'v', (u^2-1)u'v'\big)$.

Поэтому

$$b_{11} =< n, f_1 >= \frac{-u''v' + u'v'' + uv'(u'^2+v'^2)}{\sqrt{u'^2+v'^2}}.$$

Вычислим b_{12}. Имеем: $r_{st} = 0, \Gamma^1_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = \frac{1}{2}v'$, $\Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = -\frac{1}{2}u'$, $\Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,1} y^\nu_{,2} = -\frac{uu'}{2}$, $f_2 = \big(\frac{v'}{2}, -\frac{u'}{2}, -\frac{uu'}{2}\big)$,

$$b_{12} =< n, f_2 >= -\frac{1}{2}\sqrt{u'^2+v'^2}.$$

Наконец, $r_{tt} = \Gamma^1_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = \Gamma^2_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = \Gamma^3_{\mu\nu} y^\mu_{,2} y^\nu_{,2} = 0$ и $b_{22} = 0$.

Следовательно, условие минимальности $\overline{g}_{11} b_{22} - 2\overline{g}_{12} b_{12} + \overline{g}_{22} b_{11} = 0$ приводит к уравнению

$$u''v' - u'v'' = 0,$$

решением которого является линейная функция $v = a_0 u + b_0$, что и доказывает теорему.

Следствие. *В Nil не существует вполне геодезической поверхности, составленной из "вертикальных" геодезических.*

Для доказательства следует обратить внимание на коэффициент b_{12}, который всегда отличен от нуля для невырожденной кривой $(u(s), v(s))$ в плоскости xOy.

3. Несуществование вполне геодезических поверхностей в Nil.

Пусть поверхность в Nil задана в виде $(x, y, z(x,y))$. Касательные векторы к ней есть $(1, 0, z_x)$, $(0, 1, z_y)$ и нормаль

$$n = \frac{(-z_x, x - z_y, 1 + x^2 - xz_y)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}.$$

Вычисления, подобные проведенным в разделе 2, дают следующие выражения для коэффициентов первой и второй фундаментальных форм поверхности

$$\overline{g}_{11} = 1 + z_x^2, \overline{g}_{12} = z_x(z_y - x), \overline{g}_{22} = 1 + (z_y - x)^2,$$

$$b_{11} = \frac{-z_{xx} - z_x(z_y - x)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}, b_{12} = \frac{-z_{xy} - \frac{1}{2}(z_y - x)^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}, \qquad (9)$$

$$b_{22} = \frac{-z_{yy} + z_x(z_y - x)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}.$$

Уравнение минимальной поверхности в Nil, заданной над "плоскостью" xOy имеет вид

$$(1+(z_y-x)^2)z_{xx}-2z_x(z_y-x)z_{xy}+z_{yy}(1+z_x^2)+z_x(z_y-x)=0. \quad (10)$$

Замечание. Полученная в теореме 1 параметризация 2) линейчатой минимальной поверхности, составленной из "горизонтальных" геодези ческих, параллельных оси Ox, очевидно, может быть представлена в виде $z(x,y) = a_0 y + b_0$ и нетрудно убедиться в том, что данная поверхность удовлетворяет уравнению (10). Если же положить $a_0 = b_0 = 0$ в формуле (7), то получается следующее решение уравнения (10): $z = \frac{1}{2}xy + c_0 arctg\frac{y}{x} + d_0$

Теорема 3. *В Nil не существует вполне геодезических поверхностей.*
Доказательство. Сначала покажем, что не существует вполне геодезической поверхности, заданной в виде $(x,y,z(x,y))$. Если такая поверхность существует, то все коэффициенты b_{ij} ее второй фундаментальной формы должны обращаться в нуль в некоторой области плоскости xOy. Используя их выражения (9), получим следующую систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l} z_{xx}+z_x(z_y-x)=0, \\ -z_{xy}-\frac{1}{2}(z_y-x)^2+\frac{1}{2}+\frac{z_x^2}{2}=0, \\ z_{yy}-z_x(z_y-x)=0. \end{array}\right. \quad (11)$$

Сложив первое и третье уравнения, получим $z_{xx}+z_{yy}=0$. Если продифференцировать первое уравнение по y, а второе по x и сложить, то получим $z_x(z_{xx}+z_{yy})+z_y-x=0$. Следовательно, должно выполняться уравнение $z_y = x$. Тогда из второго уравнения системы (11) получаем, что $\pm z_x = 1$, что несовместно с условием $z_y = x$. Полученное противоречие доказывает несуществование явно заданной над областью плоскости xOy вполне геодезической поверхности. В комбинации со следствием, доказанным в разделе 2, мы получаем доказательство несуществования вполне геодезической поверхности в Nil.

Замечание. Можно предложить иной способ доказательства теоремы 3, основанный на одной теореме, принадлежащей Риччи [4, гл.4, с.218]. Она утверждает, что нормали к вполне геодезической поверхности являются собственными векторами тензора Риччи объемлющего пространства. В случае, когда исследуются вполне геодезические поверхности в Nil, тензор Риччи имеет следующие ненулевые компоненты $R_{11} = \frac{1}{2}$, $R_{22} = \frac{1-x^2}{2}$, $R_{23} = \frac{x}{2}$, $R_{33} = -\frac{1}{2}$. Собственных значений тензора Риччи два : $\rho_1 = \frac{1}{2}$ с собственными векторами

$v_1 = (1,0,0)$ и $v_2 = (0,1,x)$ и $\rho_2 = -\frac{1}{2}$ с собственным вектором $v_3 = (0,0,1)$. Однако двумерное распределение, натянутое на векторы v_1, v_2 не является интегрируемым, поскольку скобка $[v_1, v_2] = v_3$ и, следовательно, v_3 не может образовывать поля нормалей к вполне геодезической поверхности. Затем можно показать, что и линейная комбинация векторов v_1, v_2 также не может служить полем нормалей к вполне геодезической поверхности. Действительно, пусть поле $v = av_1 + bv_2 = (a, b, xb)$ будет нормальным полем к вполне геодезической поверхности, однозначно проектирующейся на плоскость "xOy". Тогда базис касательных пространств к этой поверхности образуют поля v_3 и $v^\perp = (-b, a, 0)$. Вычисляя их скобку, получим $[v_3, v^\perp] = \left(-\frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z}, 0\right)$. Для интегрируемости поля касательных плоскостей, натянутых на $v_3, v^\perp$ необходимо, чтобы $[v_3, v^\perp] = \alpha v_3 + \beta v^\perp$, откуда следует, что $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$. Тогда нормальное поле имеет вид $v = b(\phi(x,y), 1, x)$ и после нормировки приводится к виду $n = \frac{(\phi,1,x)}{\sqrt{1+\phi^2}}$. Однако, сравнивая это выражение с полученным ранее выражением для нормали явно заданной поверхности $n = \frac{(-z_x, x-z_y, 1+x^2-xz_y)}{\sqrt{1+z_x^2+(z_y-x)^2}}$ легко прийти к противоречию. Поскольку не существует вполне геодезических поверхностей, проектирующихся в кривую на плоскости xOy, то этим доказано отсутствие вполне геодезических поверхностей в Nil.

4. SO(2)-инвариантные минимальные поверхности в Nil.

Рассмотрим преобразования Nil вида $R_v(x,y,z) = (x\cos v - y\sin v, x\sin v + y\cos v, z + \frac{1}{2}\sin v(x^2\cos v - y^2\cos v - 2xy\sin v)); v \in [0, 2\pi)$ (см. [1], с.123).

Утверждение 1.R_v *образуют подгруппу в Iso(Nil), изоморфную SO(2).*

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что $R_{v_1} \circ R_{v_2} = R_{v_1+v_2}, (R_v)^{-1} = R_{-v}, R_0 = Id$. Отсюда следует, что данные преобразования составляют группу, изоморфную SO(2) (или U(1)). Осталось проверить, что R_v - изометрии: если обозначить$R_v(x,y,z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ (для произвольного фиксированного $v \in [0, 2\pi)$), имеем

$$d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2 + (d\overline{z} - \overline{x}d\overline{y})^2 = dx^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + dy^2(\sin^2 v + \cos^2 v) +$$

$$2dxdy(-\sin v\cos v + \cos v\sin v) + (dz + \sin v\cos v(xdx - ydy) - \sin^2 v(xdy + ydx) -$$

$$(x\cos v - y\sin v)(\sin v dx + \cos v dy))^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2,$$

что и доказывает утверждение.

Замечание. Поскольку $R_v(0,0,0) = (0,0,0)$, это подгруппа $Iso_e(Nil)$ - подгруппы изометрий Nil, оставляющих неподвижной единицу Nil.

Утверждение 2. *Связная компонента единицы $Iso_e(Nil)$ совпадает с подгруппой, образованной R_v:*

$$(Iso_e(Nil))_0 = \{R_v, v \in [0, 2\pi)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли nil группы Nil. Коммутатор (скобка Ли) в nil имеет вид $[(p, q, t), (p', q', t')] = (0, 0, pq' - qp')$. Рассмотрим базис $X_1 = (1, 0, 0), X_2 = (0, 1, 0), X_3 = (0, 0, 1)$ с единственным нетривиальным соотношением $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3$. Левоинвариантная метрика Nil индуцирует на $nil = T_eNil$ декартово скалярное произведение f. Найдём группу $Aut(nil) \bigcap O(f)$. Тут O(f)=O(3). Рассмотрим линейный оператор C на nil: $C(X_j) = C^i_jX_i$.Условие $C \in Aut(nil)$:

$$[C(X_1), C(X_2)] = C(X_3)$$

$$[C^i_1X_i, C^j_2X_j] = C^k_3X_k$$

$$(C^1_1C^2_2 - C^2_1C^1_2)X_3 = C^i_3X_i$$

Отсюда, $C^1_3 = C^2_3 = 0, C^3_3 = C^1_1C^2_2 - C^2_1C^1_2$. Соотношения $[C(X_1), C(X_3)] = [C(X_2), C(X_3)] = 0$ тогда выполняются автоматически. Найдём для $C \in Aut(nil)$ условие ортогональности ($C \in O(3)$):

$$C^i_kC^k_j = \delta^i_j$$

$$(C^1_1)^2 + (C^1_2)^2 = (C^2_1)^2 + (C^2_2)^2 = (C^3_1)^2 + (C^3_2)^2 + (C^3_3)^2 = 1,$$
$$C^1_1C^2_1 + C^1_2C^2_2 = C^3_1C^1_1 + C^3_2C^1_2 = C^3_1C^2_1 + C^3_2C^2_2 = 0.$$

Введём переменные v_1 и v_2: $C^1_1 = \cos v_1, C^1_2 = \sin v_1, C^2_1 = \sin v_2, C^2_2 = \cos v_2$. Тогда $0 = C^1_1C^2_1 + C^1_2C^2_2 = \cos v_1 \sin v_2 + \sin v_1 \cos v_2 = \sin(v_1 + v_2), C^3_3 = C^1_1C^2_2 - C^2_1C^1_2 = \cos v_1 \cos v_2 - \sin v_1 \sin v_2 = \cos(v_1 + v_2)$, и либо $v_1 + v_2 = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, тогда обозначив $v = v_2$, имеем $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cos v, C^2_1 = -C^1_2 = \sin v, C^3_3 = 1$, либо $v_1 + v_2 = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, и тогда обозначив $v = v_1$, имеем $\frac{1}{1} = -C^2_2 = \cos v, C^2_1 = C^1_2 = \sin v, C^3_3 = -1$. В любом случае, $(C^3_1)^2 + (C^3_2)^2 = 1 - (C^3_3)^2 = 0, C^3_1 = C^3_2 = 0$, и $Aut(nil) \bigcap O(3)$ образована операторами вида $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ \sin v & -\cos v & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Как видим, она состоит из двух связных компонент, и $(Aut(nil) \bigcap O(3))_0 = \{\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ \sin v & -\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Согласно [2, теорема 0], $Iso_e(Nil)$ изоморфна

$Aut(nil \bigcap O(3))$, при этом изометриям отвечают их дифференциалы в единице. Поскольку $dR_v|_e = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(Iso_e(Nil))_0 = \{R_v\}$.

Замечание. Из доказательства предыдущего утверждения и [2, теорема 0] следует, что $Iso_e(Nil)$ изоморфна O(2), и $Iso(Nil) = O(2) \cdot Nil$ - полупрямое произведение.

Рассмотрим в Nil поверхность, инвариантную относительно действия $\{R_v\}$ (поверхность вращения). Её можно задать кривой в плоскости y=0. Пусть $(x(u), 0, z(u))$ - такая кривая с натуральным параметром u: $(x'(u))^2 + (z'(u))^2 = 1$. Тогда возможна следующая параметризация поверхности:

$$r(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + \frac{1}{2}\sin v \cos v (x(u))^2). \tag{12}$$

Далее вместо x(u),z(u) будем писать x,z соответственно.В [5] изучались поверхности вращения в Nil постоянной средней кривизны, не равной 0. Рассмотрим минимальные поверхности вращения.

Теорема 4.*Минимальные поверхности вращения вида (12) в Nil задаются кривыми*

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}},$$

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{(C - C^2)u^2 + \frac{4}{C} - 4}{Cu^2 + \frac{4}{C} - 4}} du,$$

где C - константа ($C \in (0, 1]$).

Доказательство. Производные радиус-вектора поверхности таковы:

$$r_u = (x'\cos v, x'\sin v, z' + \sin v \cos v x x'),$$

$$r_v = (-x\sin v, x\cos v, \frac{1}{2}\cos 2v x^2),$$

$$r_{uu} = (x''\cos v, x''\sin v, z'' + \sin v \cos v (x x'' + (x')^2)),$$

$$r_{uv} = (-x'\sin v, x'\cos v, \cos 2v x x'),$$

$$r_{vv} = (-x\cos v, -x\sin v, -\sin 2v x^2).$$

Отсюда, коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности следующие: $\bar{g}_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = (x')^2 + (z')^2 = 1, \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = -\frac{1}{2}z'x^2, \bar{g}_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Вектор нормали к поверхности имеет вид $(n^1, n^2, n^3) = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}xx'\sin v + z'\cos v, z'\sin v - \frac{1}{2}xx'\cos v, -x' + xz'\sin v\cos v - \frac{1}{2}x^2x'\cos^2 v)$, где $\Delta^2 = 1 + \frac{1}{4}(xx')^2$ (используется $(x')^2 + (z')^2 = 1$). В частности, гауссово отображение в S^2 для данной поверхности имеет вид $g(u,v) = (g^1, g^2, g^3) = (n^1, n^2, n^3 - x\cos v n^2) = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}xx'\sin v + z'\cos v, z'\sin v - \frac{1}{2}xx'\cos v, -x')$. Найдём вторую фундаментальную форму поверхности, используя деривационные формулы Гаусса. Найдём вторые ковариантные производные радиус-вектора:

$$r_{u,u} = r_{uu} + (\Gamma^1_{ij} r^i_u r^j_u, \Gamma^2_{ij} r^i_u r^j_u, \Gamma^3_{ij} r^i_u r^j_u) = (x''\cos v, x''\sin v, z'' + \sin v\cos v(xx'' + (x')^2)) + (-x\cos v(x'\sin v)^2 + x'\sin v(z' + \sin v\cos v xx'), x\cos v x'\cos v x'\sin v - x'\cos v(z' + \sin v\cos v xx'), (x^2\cos^2 v - 1)x'\cos v x'\sin v - x\cos v x'\cos v(z' + \sin v\cos v xx')) = (x''\cos v + x'z'\sin v, x''\sin v - x'z'\cos v, z'' + xx''\sin v\cos v - xx'z'\cos^2 v),$$

$$r_{u,v} = r_{uv} + (\Gamma^1_{ij} r^i_u r^j_v, \Gamma^2_{ij} r^i_u r^j_v, \Gamma^3_{ij} r^i_u r^j_v) = (-x'\sin v, x'\cos v, \cos 2v xx') + (-x \cos v x'\sin v x\cos v + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x'x^2\sin v\cos 2v + x\cos v(z' + \sin v\cos v xx')), \frac{1}{2}x\cos v (xx'\cos^2 v - xx'\sin^2 v) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2x'\cos v\cos 2v - x\sin v(z' + \sin v\cos v xx')), \frac{1}{2}(x^2 \cos^2 v - 1)(xx'\cos^2 v - xx'\sin^2 v) - \frac{1}{2}x\cos v(\frac{1}{2}x^2x'\cos v\cos 2v - x\sin v(z' + \sin v\cos v xx'))) = (-x'\sin v - \frac{1}{4}x^2x'\sin v + \frac{1}{2}xz'\cos v, x'\cos v + \frac{1}{4}x^2x'\cos v + \frac{1}{2}xz'\sin v, \frac{1}{2}xx'\cos 2v + \frac{1}{4}x^3x'\cos^2 v + \frac{1}{2}x^2z'\sin v\cos v),$$

$$r_{v,v} = r_{vv} + (\Gamma^1_{ij} r^i_v r^j_v, \Gamma^2_{ij} r^i_v r^j_v, \Gamma^3_{ij} r^i_v r^j_v) = (-x\cos v, -x\sin v, -\sin 2v x^2) + (-x \cos v(x\cos v)^2 + \frac{1}{2}x^3\cos 2v\cos v, x\cos v(-x\sin v)x\cos v - (-x\sin v)\frac{1}{2}x^2\cos 2v, (x^2\cos^2 v - 1)(-x\sin v)x\cos v - x\cos v(-x\sin v)\frac{1}{2}x^2\cos 2v) = (-x\cos v - \frac{1}{2}x^3 \cos v, -x\sin v - \frac{1}{2}x^3\sin v, -x^2\sin v\cos v - \frac{1}{2}x^4\sin v\cos v).$$

Коэффициенты второй фундаментальной формы находятся как скалярные произведения (в касательном к Nil) этих производных на n:

$$b_{11} = \langle r_{u,u}, n\rangle = (r_{u,u})^1 g^1 + (r_{u,u})^2 g^2 + ((r_{u,u})^3 - x\cos v(r_{u,u})^2)g^3 = \frac{1}{\Delta}(x''z' + \frac{1}{2}x (x')^2z' - z''x'),$$

$$b_{12} = b_{21} = \langle r_{u,v}, n\rangle = (r_{u,v})^1 g^1 + (r_{u,v})^2 g^2 + ((r_{u,v})^3 - x\cos v(r_{u,v})^2)g^3 = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}x$$

$$(z')^2 - \frac{1}{8}x^3(x')^2),$$

$$b_{22} = \langle r_{v,v}, n\rangle = (r_{v,v})^1 g^1 + (r_{v,v})^2 g^2 + ((r_{v,v})^3 - x\cos v (r_{v,v})^2) g^3 = \frac{1}{\Delta}(-xz' - \frac{1}{2}x^3 z').$$

Найдём среднюю кривизну поверхности:

$$H = \frac{b_{11}\bar{g}_{22} - 2b_{12}\bar{g}_{12} + b_{22}\bar{g}_{11}}{2(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - (\bar{g}_{12})^2)} = \frac{1}{2\Delta^3}(x''z' - z''x')(1 + \frac{1}{4}x^2) - \frac{z'}{2\Delta^3 x}.$$

Отсюда, условие минимальности представляет собой следующее дифференциальное уравнение:

$$(x''z' - z''x')(1 + \frac{1}{4}x^2) = \frac{z'}{x}.$$

Кроме того, по условию натуральности u, $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Преобразуем и исключим z':

$$-(x')^2(\frac{z'}{x'})'(1 + \frac{1}{4}x^2) = \frac{z'}{x},$$

$$z' = \sqrt{1-(x')^2}, (\frac{z'}{x'})' = (\sqrt{\frac{1}{(x')^2} - 1})' = -\frac{x''}{(x')^2\sqrt{1-(x')^2}},$$

$$x''x(1 + \frac{1}{4}x^2) = 1 - (x')^2.$$

Заменим $w(u) = \frac{1}{2}x^2(u), w' = xx', w'' = xx'' + (x')^2$. Отсюда, $(x')^2 = \frac{(w')^2}{2w}, x''x = w'' - \frac{(w')^2}{2w}$:

$$(w'' - \frac{(w')^2}{2w})(1 + \frac{w}{2}) = 1 - \frac{(w')^2}{2w},$$

$$\frac{w''w'}{1 + \frac{(w')^2}{4}} = \frac{w'}{1 + \frac{w}{2}},$$

$$(\ln(1 + \frac{(w')^2}{4}))' = (\ln(1 + \frac{w}{2}))',$$

$$1 + \frac{(w')^2}{4} = C(1 + \frac{w}{2}),$$

где C - константа. Решая полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$w = \frac{C}{2}u^2 - 2 + \frac{2}{C},$$

Подставляя, получаем:

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}}.$$

Из условия $(x'(u))^2 + (z'(u))^2 = 1$ находим:

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1-(x')^2}du = \int_0^u \sqrt{\frac{(C-C^2)u^2 + \frac{4}{C} - 4}{Cu^2 + \frac{4}{C} - 4}}du.$$

Рассматривая области определения этих выражений, получаем, что $C \in (0, 1]$.

Замечание. Выражая u через x, можно найти явное задание профильной кривой:

$$z(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{x^2+4}{Kx^2-4}}dx,$$

где $K = \frac{C}{1-C}, K \in (0, \infty)$.

Литература. 1. П.Скотт, Геометрии на трехмерных многообразиях, М., "Мир", 1989.

2. В.В. Горбацевич, Об изометриях некоторых римановых групп Ли, Известия РАН, сер. математ., т.66, n.4, 2002, с.27-46.

3. Ю.А. Аминов, Геометрия подмногообразий, Киев, изд. Наукова думка,2002.

4. Л.П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., изд. иностр. лит., 1948.

5. P.Tomter, Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group, Proc. of Symp. pure math., v.54(1993), part 1, p.485-495.