Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 514

Поверхности в трехмерной группе Гейзенберга с ограничением на якобиан гауссова отображения

А. А. Борисенко, Е. В. Петров

В работе показано, что в трехмерной группе Гейзенберга не существует явно заданной над горизонтальной плоскостью поверхности с ограничением на якобиан гауссова отображения.

Ключевые слова. Группа Гейзенберга, гауссово отображение.

Keywords. Heisenberg group, Gauss map.

Библиография: 11 названий.

1. Случай евклидова пространства. Несуществование в трехмерном евклидовом пространстве поверхностей с ограниченной сверху отрицательным числом кривизной гарантируется следующей теоремой.

Теорема 1 [5; теорема B]. *В E^3 на всякой полной регулярной поверхности точная верхняя грань гауссовой кривизны не меньше нуля.*

Этот результат обобщает классическую теорему Д. Гильберта о несуществовании полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве ([1]) и был впервые получен Н.В. Ефимовым в [2] и [3] для случая явно заданных поверхностей (альтернативное доказательство приведено в [8]) и в [4] для общего случая (также см. доказательство в [9]).

С теоремой 1 тесно связаны также общие результаты о свойствах гомеоморфизмов двумерных областей, полученные в [6].

Введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – отображение класса C^1, заданное координатными функциями $p(x,y)$ и $q(x,y)$. Обозначим через Δ якобиан ϕ, через J – ротор векторного поля (p,q): $J = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}$. Пусть на $\mathbb{R}^2$ выполняется условие

$$|\Delta| \geqslant a|J| + a^2 \tag{1.1}$$

для некоторой положительной на плоскости функции a. Будем говорить, что обратная величина $b = \frac{1}{a}$ функции a имеет изменение с линейной оценкой, если существуют такие c_1 и c_2 из $\mathbb{R}$, что для любых p_1 и p_2 из $\mathbb{R}^2$ выполняется

$$|b(p_2) - b(p_1)| \leqslant c_1\rho(p_1,p_2) + c_2,$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ – евклидова метрика на $\mathbb{R}^2$.

Теорема 2 [6; теорема II]. *Если существует положительная на всей плоскости функция a, удовлетворяющая условию* (1.1), *обратная величина которой имеет изменение с линейной оценкой, то образом плоскости при отображении ϕ является выпуклая область плоскости и отображение ϕ является гомеоморфизмом на свой образ.*

2. Группа Гейзенберга. Рассмотрим вопрос обобщения теоремы 1 на поверхности в трехмерной группе Гейзенберга Nil (см., например, [7]). Эта группа представляет собой трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с глобальными координатами (x, y, z) и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}\,(y\,dx - x\,dy)\right)^2.$$

Подобная метрика использована, например, в [11]. В качестве ортонормированного базиса левоинвариантных векторных полей будем рассматривать

$$K = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\,y\frac{\partial}{\partial z},\ L = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\,x\frac{\partial}{\partial z},\ Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

В группе Гейзенберга существуют поверхности с ограниченной сверху отрицательной константой внешней кривизной: например, можно рассмотреть цилиндрические поверхности постоянной средней кривизны, параметризованные в виде

$$r(s, t) = (f_1(s), f_2(s), t),$$

где $(f_1(s), f_2(s))$ – прямая либо окружность в плоскости (x, y) (см. [10]). Внешние кривизны таких поверхностей постоянны и не превосходят $-\frac{1}{4}$. Оказывается, однако, что аналог теоремы 1 для группы Nil удается дать в случае явно заданных над (x, y) поверхностей и с заменой кривизны на якобиан гауссова отображения (в случае трехмерного евклидова пространства внешняя кривизна совпадает с внутренней и с якобианом гауссова отображения). Гауссово отображение мы здесь понимаем как гауссово отображение в группе Ли: пусть M – поверхность в трехмерной группе Ли N с левоинвариантной римановой метрикой, η – поле единичных нормалей к M. Тогда гауссовым отображением M называется отображение, ставящее в соответствие , произвольной точке p поверхности M результат переноса $\eta(p)$ в единицу группы N дифференциалом левого сдвига. Очевидно, это будет отображение из M в единичную сферу алгебры Ли группы N.

Теорема 3. *В Nil на всякой регулярной явно заданной над всей плоскостью (x, y) поверхности $z = f(x, y)$ точная нижняя грань модуля якобиана гауссова отображения равна нулю.*

Здесь регулярность означает принадлежность классу C^2. Для доказательства воспользуемся теоремой 2. В качестве локальных координат на поверхности выберем $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Касательные векторные поля имеют следующий вид:

$$v_1 = (1, 0, f_x) = K + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right) Z,\ v_2 = (0, 1, f_y) = L + \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right) Z,$$

в качестве единичного нормального векторного поля выберем

$$\eta = \frac{1}{\delta}\left(-\left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right) K - \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right) L + Z\right),$$

где $\delta = \sqrt{1 + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)^2 + \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)^2}$. Поля K, L и Z левоинвариантны, поэтому для произвольной точки $p \in M$ перенос вектора $\eta(p)$ в единицу группы $e = (0,0,0)$ дифференциалом левого сдвига дает

$$\frac{1}{\delta}\left(-\left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)K(e) - \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)L(e) + Z(e)\right) = \left(-\frac{f_x + \frac{1}{2}\,y}{\delta}, -\frac{f_y - \frac{1}{2}\,x}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right).$$

Отметим, что образ поверхности под действием гауссова отображения лежит в верхней полусфере единичной сферы S^2. Рассмотрим в качестве локальных координат на этой полусфере коэффициенты при полях K и L. Тогда гауссово отображение G задается как

$$(x,y) \mapsto \left(-\frac{f_x + \frac{1}{2}\,y}{\delta}, -\frac{f_y - \frac{1}{2}\,x}{\delta}\right).$$

Матрица Якоби G имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\delta^3}\begin{pmatrix} -f_{xx}\left(1 + \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)^2\right) + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)\left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)\left(f_{xy} - \frac{1}{2}\,\right) & -\left(f_{xy} + \frac{1}{2}\,\right)\left(1 + \left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)^2\right) + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)\left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)f_{yy} \\ -\left(f_{xy} - \frac{1}{2}\,\right)\left(1 + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)\left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)f_{xx} & -f_{yy}\left(1 + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)^2\right) + \left(f_x + \frac{1}{2}\,y\right)\left(f_y - \frac{1}{2}\,x\right)\left(f_{xy} + \frac{1}{2}\,\right) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, якобиан Δ_G отображения G равен $\frac{1}{\delta}\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}\,\right)$. Предположим, что модуль этого выражения ограничен снизу положительной константой c, т.е.

$$\left|f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}\,\right| \geqslant c\delta \geqslant c.$$

Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, представляющее собой композицию гауссова отображения G и проекции сферы из начала координат на касательную плоскость к S^2 в точке $(0,0,1)$. Несложно видеть, что F отображает каждую точку (x,y) в точку $\left(-f_x - \frac{1}{2}\,y, -f_y + \frac{1}{2}\,x\right)$, и якобиан Δ_F отображения F равен $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}$. Кроме того,

$$J_F = \frac{\partial F^1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = -1,$$

поэтому выполняются все условия теоремы 2 (a и b постоянны). Таким образом, F – гомеоморфизм $\mathbb{R}^2$ на некоторую выпуклую область $\mathbb{R}^2$, тогда G – гомеоморфизм $\mathbb{R}^2$ на выпуклую область S^2. Площадь этой области конечна и равна

$$S = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Delta_G dxdy,$$

однако интеграл в правой части этого равенства бесконечен в силу неравенства $|\Delta_G| \geqslant c$. Получили противоречие, которое доказывает требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. Гильберт, *Основания геометрии*, ОГИЗ, М.-Л., 1948.

[2] Н. В. Ефимов, “Исследование полной поверхности отрицательной кривизны”, *ДАН СССР*, **93**:3 (1953), 393–395.

[3] Н. В. Ефимов, “Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны”, *ДАН СССР*, **93**:4 (1953), 609–611.

[4] Н. В. Ефимов, “Невозможность в трехмерном эвклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны”, *ДАН СССР*, **150**:6 (1963), 1206–1209.

[5] Н. В. Ефимов, “Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны”, *Математический сборник*, **64 (106)**:2 (1964), 286–320.

[6] Н. В. Ефимов, “Дифференциальные признаки гомеоморфности некоторых отображений с применением в теории поверхностей”, *Математический сборник*, **76 (118)**:4 (1968), 499–512.

[7] П. Скотт, *Геометрии на трехмерных многообразиях*, Мир, М., 1986.

[8] E. Heintz, “Über Flächen mit eineindeutiger Projection auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind”, *Math. Annalen*, **129** (1955), 451–454.

[9] T. Klotz-Milnor, “Efimov’s theorem about complete immersed surfaces of negative curvature”, *Advances in Math.*, **8**:3 (1972), 474–543.

[10] A. Sanini, “Gauss map of a surface of the Heisenberg group”, *Boll. Unione Mat. It.*, **11-B(7), Suppl. Fasc. 2** (1997), 79–93.

[11] P. Tomter, “Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group”, *Proc. of Symp. Pure Math.*, **54, Part 1**, AMS, Providence, 1993, 485–495.

А. А. Борисенко
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков, Украина
E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

Поступило
16.03.2009

Е. В. Петров
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков, Украина
E-mail: petrov@univer.kharkov.ua

А. А. Борисенко

Кафедра геометрии, механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077 Украина.

Тел.: +380577075358

E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

Е. В. Петров (автор, ответственный за переписку с редакцией)

Кафедра геометрии, механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077 Украина.

Тел.: +380577075439

E-mail: petrov@univer.kharkov.ua