

О стабильности минимальных поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга

Известный результат М. до Кармо и С.К. Пенга [6] утверждает, что единственной полной устойчивой минимальной поверхностью M в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 является плоскость. В случае, когда объемлющее риманово 3-х мерное многообразие N^3 имеет неотрицательную скалярную кривизну, Д.Фишер-Колбри и Р. Шоен в [7] доказали классификационную теорему для полных ориентируемых устойчивых поверхностей: 1) если M компактно, то M конформно эквивалентно сфере S^2 или M есть вполне геодезический плоский тор, 2) если M некомпактно, то M конформно эквивалентно комплексной плоскости \mathbb{C} или цилиндру. Для 3-мерных римановых многообразий знакопеременной кривизны Риччи имеются отдельные примеры устойчивых полных поверхностей, например в [8]. В настоящей работе мы исследуем устойчивость некоторых минимальных поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга Nil с левоинвариантной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. Ненулевые компоненты тензора Риччи этой метрики есть : $\rho_{11} = -\frac{1}{2}, \rho_{22} = \frac{x^2-1}{2}, \rho_{33} = \frac{1}{2}, \rho_{23} = -\frac{x}{2}$, и следовательно, кривизна Риччи меняется в пределах $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и скалярная кривизна равна $-\frac{1}{2}$. Через nil будем обозначать алгебру Ли группы Nil . Группа изометрий Nil описана в [4]. Она имеет размерность 4, содержит подгруппу трансляций, изоморфную самой Nil , одномерную подгруппу вращений относительно вертикальных слоев и отражения типа $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$. Поэтому, описанные в теоремах 1 и 2 минимальные поверхности в Nil следует рассматривать с точностью до изометрий. В теореме 1 мы доказываем устойчивость 1) "вертикальных плоскостей" Nil (т.е. поверхностей, допускающих параметризацию $r(s, t) = (0, s, t)$ и $r(s, t) = (s, as + b, t)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ – постоянные) и образов вертикальных плоскостей nil при экспоненциальном отображении $exp: nil \rightarrow Nil$ (т.е. поверхностей с параметризацией $r(s, t) = (s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b))$), 2) "наклонных плоскостей, параллельных оси Ox " в Nil (т.е. поверхностей, допускающих параметризацию $r(s, t) = (s, t, as + b)$), в том числе и "горизонтальной плоскости $z = 0$ ", 3) поверхностей, заданных уравнениями $z = ax + by + c + \frac{1}{2}xy$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ – постоянные), которые представляют собой образы наклонных плоскостей nil при экспоненциальном отображении.

Известен критерий устойчивости области на минимальной поверхности в \mathbb{R}^3 , найденный Барбосой и до Кармо [5] : область D на минимальной поверхности устойчива, если площадь ее сферического образа $g(D)$ меньше, чем 2π , в частности, геликоид и катеноид являются неустойчивыми поверхностями. В работе Ю.А.Аминова [2] доказаны теоремы неустойчивости для поверхностей, гомеоморфных сфере в римановом пространстве, секционная кривизна которого лежит в пределах $(\frac{1}{4}, 1]$. С.Т.Яо и Р.Шоен в [9] доказали также неустойчивость ориентируемой минимальной поверхности рода $p > 0$ в римановом пространстве положительной скалярной кривизны. В теореме 2 мы доказываем неустойчивость $SO(2)$ - инвариантных поверхностей вращения (аналогов катеноида) в Nil , описанных в [3], а также получаем вторым способом один из результатов теоремы 1.

1 Устойчивость некоторых полных линейчатых минимальных поверхностей в Nil .

Напомним некоторые сведения, относящиеся к проблеме устойчивости минимальной поверхности M в трехмерном римановом пространстве N^3 . Пусть (s, t) - координаты на поверхности M , $r(s, t)$ - радиус-вектор поверхности, $n(s, t)$ - вектор нормали к M в данной точке и $w(s, t)$ кусочно-дифференцируемая функция с компактным носителем, заданная на поверхности. Тогда для второй вариации площади поверхности M , определяемой радиусом-вектором $r(s, t) + w(s, t)n(s, t)$ справедлива формула [1, с.212]

$$\delta^2 S = \int_M (|\nabla w|^2 - (Ric(n, n) + \|h\|^2)w^2) d\sigma = - \int_M wLwd\sigma, \quad (1)$$

где $Ric(n, n) = \rho_{ij}n^i n^j$ - кривизна Риччи пространства N^3 в направлении единичной нормали n , $\|h\|^2 = \sum_i k_i^2$ - квадрат длины второй квадратичной формы поверхности, $d\sigma$ - элемент площади поверхности M , оператор устойчивости L есть $L = \Delta_M + (Ric(n, n) + \|h\|^2)$ (Δ_M - оператор Лапласа метрики поверхности M , индуцированной ее изометрическим погружением в N^3). Минимальная поверхность M называется устойчивой, если $\delta^2 S \geq 0$ для произвольных варьирующих функций w с компактным носителем на M . При доказательстве устойчивости мы будем пользоваться критерием

устойчивости, который был доказан в работе Фишер-Колбри и Шоена [7, теорема 1]: поверхность устойчива тогда и только тогда, когда существует положительная функция g на M , удовлетворяющая уравнению $Lg = (\Delta_M + (Ric(n, n) + \|h\|^2))g = 0$ всюду на M . Минимальность и полнота поверхностей, приведенных в теореме 1 ниже, следуют из рассмотрения их метрических и вторых фундаментальных форм. Некоторые из них были рассмотрены в [3].

Теорема 1. *Следующие полные минимальные поверхности в Nil являются устойчивыми для любых констант $a, b, c \in \mathbb{R}$:*

- 1) „вертикальная плоскость” $r(s, t) = (0, s, t)$,
- 2) "вертикальная плоскость" $r(s, t) = (s, as + b, t)$,
- 3) экспоненциальный образ вертикальной плоскости nil $r(s, t) = (s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b))$,
- 4) произвольная "наклонная плоскость, параллельная оси Ox " $r(s, t) = (s, t, at + b)$,
- 5) экспоненциальный образ наклонной плоскости nil $r(s, t) = (s, t, as + bt + c + \frac{1}{2}st)$.

Доказательство. 1) Для случая $r(s, t) = (0, s, t)$ коэффициенты фундаментальных форм равны $g_{11} = g_{22} = 1$, $b_{12} = \frac{1}{2}$, остальные 0, $n = (1, 0, 0)$, $-k_1^2 = -k_2^2 = k_1k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{1}{4}$, и $Ric(n, n) + \|h\|^2 = 0$. Тогда стабильность следует непосредственно из формулы (1): оператор $L = \Delta_M$ и для второй вариации получается выражение $\delta^2 S = \int_M |\nabla w|^2 d\sigma \geq 0$.

2) В случае "вертикальной" плоскости $r(s, t) = (s, as + b, t)$ можно использовать найденные в теореме 2 в [3] коэффициенты первой и второй фундаментальной форм поверхности: $g_{11} = 1 + a^2(1 + s^2)$, $g_{12} = -as$, $g_{22} = 1$, $b_{11} = a\sqrt{1 + a^2}s$, $b_{12} = -\frac{\sqrt{1 + a^2}}{2}$, $b_{22} = 0$. Отсюда находим $-k_1^2 = k_1k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{1}{4}$, и $\|h\|^2 = k_1^2 + k_2^2 = \frac{1}{2}$. Нормаль к "вертикальной плоскости" имеет вид $n = \frac{(-a, 1, s)}{\sqrt{1 + a^2}}$ и кривизна Риччи в направлении нормали равна $Ric(n, n) = -\frac{1}{2}$. Аналогично предыдущему пункту, получаем стабильность.

3) Будем обозначать $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, x)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ – ортонормированный базис левоинвариантных векторных полей в Nil . Рассмотрим поверхность с параметризацией $r(s, t) = (s, as + b, t + \frac{1}{2}s(as + b))$. Первая фундаментальная форма равна $(1 + a^2)ds^2 + (\frac{1}{2}bds + dt)^2$, при этом $n = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(-a, 1, x)$, и $Ric(n, n) = -\frac{1}{2}$. Вторая фундаментальная форма поверхности равна $-\sqrt{1 + a^2}(\frac{1}{2}bds^2 + dsdt)$, и $\|h\|^2 = \frac{1}{2}$. Доказательство стабильности проводится тогда как в двух предыдущих пунктах.

4) В случае "наклонной плоскости, параллельной оси Ox " с параметризацией $r(s, t) = (s, t, at + b)$ коэффициенты первой и второй фундаментальных форм есть: $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1 + (a - s)^2$, $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = \frac{1 - (a - s)^2}{2\sqrt{1 + (a - s)^2}}$. Поэтому $-k_1^2 = -k_2^2 = k_1k_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{(1 - (a - s)^2)^2}{4(1 + (a - s)^2)^2}$. и, следовательно, $\|h\|^2 = 2k_1^2 = \frac{(1 - (a - s)^2)^2}{2(1 + (a - s)^2)^2}$. Кривизна Риччи в направлении нормали есть: $Ric(n, n) = \frac{1 - (a - s)^2}{2(1 + (a - s)^2)}$. Оператор Лапласа метрики g_{ij} "наклонной плоскости" есть

$$\Delta_M = g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^i \partial s^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial s^k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{1 + (a - s)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{a - s}{1 + (a - s)^2} \frac{a - s}{1 + (a - s)^2} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Поэтому, согласно критерию устойчивости Фишер-Колбри и Шоена достаточно указать положительное решение g уравнения

$$Lg = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{1}{1 + (a - s)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{a - s}{1 + (a - s)^2} \frac{a - s}{1 + (a - s)^2} \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{1 - (a - s)^2}{(1 + (a - s)^2)^2} g = 0.$$

Такое решение, заданное для всех (s, t) нетрудно найти: $g = (1 + (a - s)^2)^{-\frac{1}{2}}$ откуда и следует устойчивость "наклонной плоскости".

5) В случае, когда минимальная поверхность параметризована уравнением $r(s, t) = (s, t, as + bt + c + \frac{1}{2}st)$, коэффициенты ее первой и второй фундаментальных форм равны: $g_{11} = 1 + (a + \frac{1}{2}t)^2$, $g_{12} = (a + \frac{1}{2}t)(b - \frac{1}{2}s)$, $g_{22} = 1 + (b - \frac{1}{2}s)^2$, $b_{11} = -b_{22} = -\frac{1}{\Delta}(a + \frac{1}{2}t)(b - \frac{1}{2}s)$, $b_{12} = \frac{1}{2\Delta}((a + \frac{1}{2}t)^2 - (b - \frac{1}{2}s)^2)$, где $\Delta^2 = 1 + (a + \frac{1}{2}t)^2 + (b - \frac{1}{2}s)^2$. Вектор нормали есть $n =$

$\frac{1}{\Delta} (a + \frac{1}{2}t, b + \frac{1}{2}s, 1 + (b + \frac{1}{2}s)s)$. При этом $\|h\|^2 = \frac{1}{2\Delta^4} \left((a + \frac{1}{2}t)^2 + (b - \frac{1}{2}s)^2 \right)^2$, и кривизна Риччи $Ric(n, n) = \frac{1}{2\Delta^2} \left(1 - (a + \frac{1}{2}t)^2 - (b - \frac{1}{2}s)^2 \right)$. Тогда оператор устойчивости L имеет вид $L = \Delta_M + \frac{1}{2\Delta^4}$. Оператор Лапласа для выписанной выше метрики этой параметризации поверхности есть

$$\Delta_M = \frac{1}{\Delta^2} \left(\left(1 + (b - \frac{1}{2}s)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2(a + \frac{1}{2}t)(b - \frac{1}{2}s) \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + \left(1 + (a + \frac{1}{2}t)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{b - \frac{1}{2}s}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{a + \frac{1}{2}t}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Нетрудно проверить, что функция $g(s, t) = \frac{1}{\Delta}$ представляет собой положительное решение уравнения $Lg = 0$, заданное на всей поверхности, откуда и вытекает устойчивость рассматриваемой минимальной поверхности. \square

Замечание. Отметим, что "вертикальная плоскость" с параметризацией $r(s, t) = (a, s, t)$, где $a \in \mathbb{R}$ — константа, равно как и экспоненциальный образ вертикальной плоскости nil $x = a$ с параметризацией $r(s, t) = (a, s, t + \frac{1}{2}as)$, минимальны тогда и только тогда, когда $a = 0$, а "наклонная плоскость" с параметризацией $r(s, t) = (s, t, cs + at + b)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ — тогда и только тогда, когда $c = 0$. Это означает что в теореме 1 перечислены все поверхности из класса минимальных поверхностей Nil , представляющих собой аналоги плоскостей или экспоненциальные образы плоскостей алгебры nil .

2 Неустойчивость $SO(2)$ — инвариантных минимальных поверхностей в Nil .

В [3] были рассмотрены поверхности, инвариантные относительно действия связной компоненты единицы подгруппы $Iso(Nil)$, стабилизирующей 0. Они задаются следующими погружениями:

$$r(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u) + \frac{1}{2} \sin v \cos v (x(u))^2),$$

где $x(u), z(u)$ — числовые функции. Метрическая форма поверхности и вторая фундаментальная форма погружения имеют вид:

$$I = du^2 - z'x^2 dudv + (x^2 + \frac{1}{4}x^4)dv^2,$$

$$II = \frac{1}{\Delta} (x''z' + \frac{1}{2}x(x')^2z' - z''x')du^2 + \frac{2}{\Delta} (\frac{1}{2}x(z')^2 - \frac{1}{8}x^3(x')^2)dudv + \frac{1}{\Delta} (-xz' - \frac{1}{2}x^3z')dv^2,$$

где $\Delta = \sqrt{1 + \frac{1}{4}xx'}$. Единичный вектор нормали к поверхности равен

$$n = \frac{1}{\Delta} (\frac{1}{2}xx' \sin v + z' \cos v, z' \sin v - \frac{1}{2}xx' \cos v, -x' + xz' \sin v \cos v - \frac{1}{2}x^2x' \cos^2 v).$$

Было установлено ([3]), что поверхность минимальна тогда и только тогда, когда

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}}, \quad C \in (0, 1], \quad (2)$$

а z находится из условия натуральности параметра $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Обозначим минимальную поверхность, соответствующую параметру C , через M_C . Непосредственным вычислением устанавливается, что для данной поверхности $Ric(n, n) + \|h\|^2 = -8 \frac{(C^5 - 2C^4)u^4 + (16C^3 - 16C^2)u^2 - 16C^2 + 48C - 32}{(4 + C^2u^2)^2(C^2u^2 - 4C + 4)^2} C$. В пространстве функций на поверхности, не зависящих от v ($\phi(u, v) = \phi(u)$), оператор Лапласа-Бельтрами имеет вид:

$$\Delta_{M_C} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{Cu(C^2u^2 - 2C + 4)}{(4 + C^2u^2)(C^2u^2 - 4C + 4)} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Теорема 2. Для поверхностей M_C выполнены факты:

- 1) M_C при $C \in (0, 1)$ неустойчивы;

2) M_1 устойчива.

Доказательство. Рассмотрим на M_C не зависящие от v функции $w(u, v) = w(u)$. Для таких функций уравнение Якоби $Lw = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. При $C = 1$ это

$$w'' + \frac{2u^2 + 4}{u(4 + u^2)} w' + \frac{8}{(4 + u^2)^2} w = 0.$$

У этого уравнения существует решение $w(u, v) = w(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}}$, гладкое и положительное на всей поверхности, и, согласно [7, теорема 1], M_1 стабильна.

Рассмотрим случай $C \in (0, 1)$. Тогда среди решений $Lw = 0$ есть функция

$$w(u, v) = w(u) = \frac{u \int \frac{\sqrt{(C^2 u^2 + 4)(C^2 u^2 - 4C + 4)}}{u^2} du}{\sqrt{(C^2 u^2 + 4)(C^2 u^2 - 4C + 4)}}, \quad (3)$$

тут интегралом обозначена та первообразная, которая является нечетной функцией (она существует, т.к. интегрируемая функция четная). Несложно установить, что w – гладкая на всей оси и $w(0) = -1$. С другой стороны, $\lim_{u \rightarrow +\infty} w = 1$. Тогда из гладкости и четности w следует, что существует $a \in (0, +\infty)$ такое, что $w(a) = w(-a) = 0$. Тем самым мы получили на кольцевой области $D = \{u \in (-a, a), v \in [0, 2\pi)\}$ с компактным замыканием решение уравнения Якоби $Lw = 0$. Согласно лемме, принадлежащей Смейлу (см. [10, теорема 3.4.1]) это означает, что при $C \in (0, 1)$ поверхности M_C неустойчивы. \square

Замечание. Легко видеть, что M_C при $C = 1$ – это поверхность $z = \frac{1}{2}xy$, т.е. мы другим способом доказали пункт 5) теоремы 1 для случая $a = b = c = 0$.

Список литературы

- [1] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий, Киев, Наукова думка, 2002.
- [2] Аминов Ю.А. О неустойчивости минимальной поверхности в n -мерном римановом пространстве положительной кривизны. Матем. сб. (1976), 100, п.3, с.400-419.
- [3] Масальцев Л.А., Петров Е.В. Минимальные поверхности в группе Гейзенберга Вісник Харків. нац. унів. п.602, сер. Матем. прикладна матем. механіка, вип.53, (2003), с. 35-45.
- [4] Скотт П. Геометрии на 3-мерных многообразиях, М. "Мир", 1986.
- [5] J.L.Barbosa, M. do Carmo, On the size of a stable minimal surface in R^3 , Amer. J. Math. 98,(1976), p.515-528.
- [6] do Carmo M., Peng C.K. The stable minimal surfaces in R^3 are planes. Bull. Amer.Math. Soc.-1979-1, n.6, p.903-906.
- [7] Fischer-Colbrie, D., Schoen, R. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. Comm. Rure Appl.Math. 33, (1980),p.199-211.
- [8] Kokubu M. On minimal surfaces in the real special linear group $SL(2, \mathbb{R})$. //Tokyo J. Math.– 1997.– 20.– № 2.– p. 287-297.
- [9] Schoen R., Yau S.T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negatie scalar curvature. Ann. of Math. (1979), 110, n.1, p.127-142.
- [10] Simons J. Minimal varieties in riemannian manifold. Ann. of Math. 88(1968), p. 62-105.